Journal de la société statistique de Paris

Maurice Dumas

Forme canonique du critère χ^2 et plan d'expérience

Journal de la société statistique de Paris, tome 101 (1960), p. 112-115

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1960__101__112_0>

VII

VARIÉTÉ

Forme canonique du critère χ^2 et plan d'expérience

1. — POSITION DE LA QUESTION ET NOTATIONS.

Il est classique d'avoir recours au critère χ^2 de Pearson, lorsque l'on se trouve en présence d'une série de résultats expérimentaux (de *mesures*), et que, envisageant de prendre une certaine loi de probabilités comme modèle mathématique représentant le phénomène qui est à l'origine des mesures, on veut avoir un élément concernant la légitimité de cette attitude. Par ce critère, on fait une *comparaison* entre la série de mesures et la loi.

Il est classique également de remarquer que le résultat du critère en cause dépend non seulement, comme il va de soi, des mesures et de la loi, mais aussi, ce qui est déplorable, des limites choisies pour délimiter les classes utilisées. De là découle l'intérêt qu'il y a à rechercher une forme canonique que l'on donnerait au critère. Voici l'état de nos recherches sur ce point.

Pour les exposer, nous allons suivre la terminologie de l'AFNOR; et nous définissons nos notations en rappelant que si :

N est le nombre des mesures dont on dispose;

k est le nombre des classes considérées;

n_i est le nombre des mesures faisant partie de la classe d'indice i;

p_i est la probabilité que la loi considérée assigne à l'arrivée d'une mesure comprise dans cette même classe,

la valeur χ^2 a pour expression : $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \mathrm{N}\,p_i)^2}{\mathrm{N}\,p_i}$

2. — Cas d'une loi continue.

21. *Choix des* p_i.

En cas de loi continue, il est manifestement possible de choisir les p_i tous égaux entre eux; et puisque cela est possible, nous pensons que cela doit être fait systématiquement.

Voulant en effet comparer une série de mesures à une loi, il ne saurait convenir d'attacher à un intervalle partiel de l'intervalle de variations de la loi une importance autre que celle que lui assigne la loi de probabilité; il ne saurait être question de ne pas attacher la même importance à deux intervalles auxquels correspondent de mêmes probabilités. On aurait donc tort si, comme il arrive parfois, on se laissait guider par une accumulation de mesures dans certaines régions de l'intervalle de variations de la loi pour fixer les limites des classes à considérer : il faut se reporter à la loi et à elle seulement, et si par exemple on retient 10 comme nombre de classes (voir 22 ci-après) on doit prendre pour limites de ces classes, les valeurs auxquelles correspondent d'après la loi, les probabilités intégrales 0 — 0,1 — 0,2 — ... — 0,9 — 1. D'où la règle :

Pour un nombre donné k *de classes, prendre pour limites de ces classes, les valeurs auxquelles correspondent d'après la loi considérée, les probabilités intégrales formant entre 0 et 1 la progression arithmétique de raison 1/*k.

Suivre cette règle paraît bien s'imposer, à partir du moment où l'on a l'attention attirée sur elle.

Il faut bien cependant se rendre compte que les mesures constituant la série ne sont jamais connues physiquement qu'avec une certaine approximation, et qu'une limite de classe déterminée comme il a été dit peut coïncider exactement avec une mesure, de sorte que l'on hésite à rattacher cette mesure à une classe ou à la suivante. Cela peut avoir surtout de l'importance lorsque plusieurs mesures sont égales entre elles; alors il est bon de s'inspirer de ce qui est dit en 3 ci-après relativement aux lois discrètes, ou de se rappeler qu'un fignolage trop poussé ne serait pas en rapport avec la précision dont le critère χ^2 est susceptible.

De toute façon, le choix des p_i est ramené à celui du nombre k de classes.

22. *Choix du nombre k de classes.*

Le nombre k de classes est à choisir en fonction du nombre N des mesures. Nous proposons la règle qui consiste à prendre k voisin du tiers de N, sous réserve des indications du point 4 plus loin.

Nous avons déjà proposé cette règle (*Les épreuves sur échantillon* C. N. R. S. 1955; n° 232) et nous continuons à faire remarquer que nous n'appuyons ce choix par aucune considération théorique, et que nous ne prétendons ni que ce soit la comparaison obtenue avec ce nombre de classes qui soit la seule à considérer, ni même qu'il y ait une valeur de k fonction seulement de N qui s'impose de préférence à toute autre. A vrai dire, le fait que le χ^2 suive une loi dont (voir notamment à ce sujet : Les méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles. Dunas et Maheu. Eyrolles, éditeur, 1952) ni l'espérance mathématique — voisine de N— 0,5 — ni la variance — voisine de 2 N — ne dépendent en première approximation de k, donne à penser que le résultat dépend peu de k, de sorte que l'on ne voit pas pourquoi l'on ne retiendrait pas de prendre canoniquement k voisin de N/3.

Certains peuvent trouver que cette règle conduit à une valeur de k qui est bien faible lorsque N n'est pas grand. La règle rappellera opportunément que lorsque N est faible, on ne peut faire qu'une comparaison très approximative; et de toute façon la règle est à assouplir pour y inclure le résultat de Vessereau (pour 4, plus loin).

Certains peuvent trouver au contraire que cette règle conduit à une valeur de k bien forte lorsque N est lui-même grand. Mais si, N étant grand, on ne prend pas k lui-même grand, on risque de procéder à une comparaison qui estompe trop des différences pouvant être significatives entre la série de mesures et la loi.

3. Cas d'une loi discrète.

Dans le cas d'une loi discrète, il ne saurait être question de préconiser une règle telle que tous les p_i soient égaux entre eux; il ne peut même pas être question que les p_i soient de l'ordre de 3/N, si ce n'est dans le cas où la loi discrète se rapproche pratiquement beaucoup d'une loi continue. Mais nous devons chercher à nous rapprocher de la règle retenue pour le cas de la loi continue, et voici comment nous y parvenons.

La loi discrète considérée fait correspondre la probabilité q_j à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire ; alors :

— ou bien les q_j sont tous supérieurs à 3/N, et chaque valeur possible constitue à elle seule une classe;

— ou bien les q_j sont tous inférieurs nettement à 3/N, et il y a lieu de grouper ensemble des valeurs possibles se suivant, jusqu'à ce que le total des probabilités élémentaires correspondantes soit de l'ordre de 3/N.

— ou bien les deux cas ci-dessus se présentent, et l'on agit comme il vient d'être dit respectivement dans chacune des régions en lesquelles se divise naturellement l'intervalle de variations de la loi.

4. Domaine d'application de la règle.

Le domaine dans lequel la règle de 3/N peut valablement être appliquée est à préciser à l'aide d'un résultat dernièrement obtenu par M. Vessereau, et exposé par lui sous le titre « Sur les conditions d'application du critère χ^2 » dans la *Revue de Statistique appliquée* (1958, vol. VI, n° 2); nous en retenons spécialement ceci :

La règle du χ^2 est encore pratiquement valable dans le cas où le nombre N des mesures dont on dispose est voisin de dix, à la double condition que les classes soient de probabilités égales entre elles, et que ces classes soient en nombre de 5 à 10.

Appliquons ce résultat au cas d'une loi continue. On voit que si N est supérieur à 15, la règle conduit à k au moins égal à 5, et que l'on peut se servir valablement du critère χ^2. Par contre, si N est inférieur à 10, il est téméraire de faire confiance à ce critère. Dans l'intervalle de 10 à 15, il convient de prendre $k = 5$, quitte à transgresser un peu la règle de 3/N.

Dans le cas d'une loi discrète, le mieux semble bien être de se rapprocher autant que possible des indications qui précèdent, valables pour le cas d'une loi continue; mais si l'on est ainsi amené à s'éloigner de la condition des probabilités égales, sans doute convient-il corrélativement, de s'éloigner aussi des valeurs indiquées comme limites inférieures de N.

5. Plan d'expérience.

Un des buts que peut se proposer un expérimentateur est de déterminer un modèle mathématique, rendant compte des résultats expérimentaux, obtenus dans les conditions d'essais retenues par lui. Tout naturellement, cet expérimentateur poursuit la recherche du modèle destiné à lui donner satisfaction compte tenu des applications futures qu'il a en vue de rendre possibles, dans différentes voies. Il se laisse guider notamment par des considérations théoriques, par des représentations graphiques, et par des calculs de χ^2 faits au mieux — nous étions tenté d'écrire : au moins mal — à l'aide des quelques résultats dont il dispose.

Il vient un moment où le choix du modèle est fixé autant qu'il peut l'être après la période de dégrossissage dont il vient d'être question. Il reste maintenant à établir le plan d'expérience, suivant lequel seront recherchés les résultats destinés à être comparés audit modèle, en vue finalement d'apprécier si ce modèle doit être rejeté, ou si, n'ayant aucune raison ni de le rejeter, ni de le retoucher, on n'a qu'à l'adopter jusqu'à plus ample informé.

Hypothèse est faite ici que l'expérimentateur désire établir le plan d'expérience de façon telle qu'il puisse procéder dans de bonnes conditions à un calcul de χ^2; par suite, la question qui se pose est d'arrêter, au moins comme ordre de grandeur, le nombre de N de résultats valables après l'obtention desquels le calcul sera exécuté. De bien des points de vue, il serait manifestement désirable de choisir ce nombre N grand, mais des difficultés pratiques surgissent presque toujours, de sorte que l'on cherche à réduire au minimum admissible le nombre des résultats dont on aura finalement à se servir.

C'est dans ces conditions que le nombre N cherché est à choisir de manière que la règle exposée plus haut, puisse être valablement appliquée.

M. Maurice Dumas

***