Journées Équations aux dérivées partielles

André Unterberger

Opérateurs pseudo-différentiels et analyse harmonique non commutative

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A12_0>

Opérateurs pseudo-différentiels
et analyse harmonique non commutative

André Unterberger, Université de Reims

Certains domaines de $\mathbb{R}^n$ sont munis d'une géométrie propre, très riche, non héritée de leur plongement dans $\mathbb{R}^n$: il est possible de développer sur de tels domaines une analyse tenant compte à la fois de leur géométrie intrinsèque et de leurs aspects géométriques euclidiens. L'outil essentiel, et plus adaptable qu'on ne le croit généralement, est la transformation de Laplace : les états cohérents utilisés en physique mathématique sont une version déguisée, ou généralisée, de cette transformation.

I - CONES CONVEXES ; ETATS COHERENTS.

Soit C un cône ouvert strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ muni d'une mesure positive dm(t) et d'un groupe transitif G de transformations linéaires laissant dm invariante : on définit la fonction $r > 0$ sur C par l'équation

$$dm(t) = (r(t))^{-n/2}\, dt \tag{1.1}$$

dans laquelle dt désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Les exemples principaux sont les suivants : 1) $C = \mathbb{R}_*^+$, $dm(t) = t^{-1}dt$, G se réduisant au groupe des homothéties de C ; 2) C est le cône de lumière solide défini dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $x_o > 0$ et $r(x) > 0$ avec $r(x) = x_o^2-x_1^2-\ldots-x_n^2$: G est ici le produit direct du groupe de Lorentz propre (i.e. connexe) par le groupe des homothéties de rapport > 0 ; 3) avec $n = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, C est le cône constitué des matrices $A \in GL(\nu,\mathbb{R})$ telles que $A = A' > 0$: ici $r(A) = (\det A)^{2/\nu}$ et G est l'ensemble des applications $A \mapsto B'A\,B$ avec $B \in GL(\nu,\mathbb{R})$; 4) même idée, avec $A \in GL(\nu,\mathbb{C})$ et $A = A^* > 0$.

Le cas de $\mathbb{R}^n$ opérant sur lui-même par translations ne rentre pas, bien entendu, dans le cadre axiomatique ci-haut (il aurait fallu payer de quelques complications la considération d'un groupe de transformations affines) mais on étendra très facilement au cas de $\mathbb{R}^n$ les concepts qui suivent. On peut par ailleurs prendre des produits et considérer en particulier le demi-espace, modèle local des variétés à bord. Enfin, la liste ci-haut n'est pas complète même si on se limite aux modèles irréductibles : le livre d'Helgason [4] contient la liste des domaines d'E. Cartan et des domaines exceptionnels possibles.

Pour simplifier les notations, on supposera que C coïncide avec son dual $\hat{C}$, ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle x,t\rangle > 0$ pour tout $t \in C$, et que si M appartient à G il en est de même pour M'. Pour tout λ réel, on désigne par H_λ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions u mesurables sur C telles que

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_C (r(t))^{-\lambda/2} |u(t)|^2 dt < \infty. \tag{1.2}$$

L'espace de Hilbert de référence H est l'espace de Hilbert H_n des fonctions de carré sommable relativement à la mesure invariante dm : on fait opérer sur H un produit semi-direct de G et du groupe additif de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$(U(M,b)u)(t) = u(M^{-1}t)e^{2i\pi\langle t,b\rangle} , \tag{1.3}$$

ce qui fournit une représentation unitaire irréductible.

Enfin on introduit le tube complexe $\Pi = C+i\mathbb{R}^n$ constitué des points $X = x+i\xi$ tels que x appartienne à C. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \Pi$ on introduit l'<u>état cohérent</u> ψ_X^λ , fonction sur C définie par

$$\psi_X^\lambda(t) = (r(x)r(t))^{\frac{\lambda+n}{4}} e^{-2\pi\langle t,X\rangle} . \tag{1.4}$$

On supposera que pour $\lambda > \lambda_o$ bien choisi on a

$$\int_C (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} e^{-4\pi\langle t,x\rangle} dx < \infty , \tag{1.5}$$

condition indépendante de $t \in C$ vu la relation $r(Mt) = (\det M)^{2/n} r(t)$: cette condition est assurée dans tous les cas indiqués plus haut avec $\lambda_o = 0$ dans le cas de la demi-droite, $\lambda_o = n-1$ dans le cas du cône de lumière en $(n+1)$ variables et $\lambda_o = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ dans celui du cône des matrices > 0 à ν lignes et ν colonnes. Les deux propriétés principales de la famille (ψ_X^λ) lorsque X parcourt Π sont les suivantes, une fois que l'on a noté l'appartenance de ψ_X^λ à H pour $\lambda > \lambda_o - n$:

(1.6) $$U(M,b)\,\psi_X^\lambda = \psi^\lambda_{M'^{-1}X-ib}$$

et, pour $\lambda > \lambda_o$ et $u \in H$,

(1.7) $$\int_\Pi |(u,\psi_X^\lambda)|^2 d\mu(X) = \alpha_\lambda \|u\|^2 .$$

Dans cette dernière formule, la norme et le produit scalaire non affectés d'indices sont ceux dans $H = H_n$, $d\mu(X) = (r(x))^{-n}\, dx\, d\xi$ est la mesure sur Π invariante par l'action de $G \times \mathbb{R}^n$ sur Π qui intervient au second membre de (1.6) et α_λ est une constante finie : la formule (1.7) s'appelle une résolution de l'identité au moyen de la famille d'états cohérents (ψ_X^λ), ce que l'on comprendra aussitôt en la polarisant.

Si l'on se sert de l'isométrie de H sur H_λ qui consiste à multiplier par $(r(t))^{\frac{\lambda-n}{4}}$, on peut aussi écrire (1.7) sous la forme

(1.8) $$\|u\|^2_\lambda = \beta_\lambda \int (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} |\overline{f}(X)|^2\, dx\, d\xi$$

avec

(1.9) $$\overline{f}(X) = \int_C u(t) e^{-2\pi\langle t,\overline{X}\rangle} dt.$$

Il est bien entendu, dans (1.8), que $u \in H_\lambda$ et que β_λ est une constante : $\overline{f}$ n'est autre que la transformée de Laplace de u, c'est une fonction antiholomorphe de $X \in \Pi$. Du reste, une forme du théorème de Paley-Wiener exprime que, pour $\lambda > \lambda_o$, l'application $u \longmapsto \overline{f}$ est une isométrie de H_λ sur un espace de fonctions antiholomorphes sur Π , de carré sommable relativement au poids qui intervient au second membre de (1.8).

Une conséquence immédiate de la notion d'état cohérent est la famille suivante d'inégalités de Carleman, dans laquelle $\delta(x)$ désigne la distance euclidienne de $x \in C$ au bord de C : on suppose, et c'est le cas pour tous les modèles cités, que l'on a pour une certaine constante $C > 0$ (personne ne la confondra avec le cône C) l'inégalité

$$C^{-1} r(x) \leqslant r(y) \leqslant C\, r(x)$$

pour tout couple (x,y) de points de C tels que $|x-y| \leqslant \frac{\delta(x)}{2}$.

Théorème 1.1. Posons, pour tout $\lambda > \lambda_o$ et tout entier $k \geqslant 0$,

$$I_{\lambda,k}(t) = \int_C (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} (\delta(x))^{2k} e^{-4\pi<t,x>} dx .$$

Alors, pour toute fonction $u \in C_o^\infty(C)$ et tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants $P(D)$ sur $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\int (r(t))^{-\lambda/2} |P(D)u(t)|^2 dt \geqslant C^{-1} \sum_\alpha \int I_{\lambda,|\alpha|}(t) \; |P^{(\alpha)}(D)u(t)|^2 dt$$

dans laquelle la constante C ne dépend que du cône C envisagé et du degré de P .

Preuve. On écrit l'intégrale de gauche sous la forme

$$\|P(D)u\|_\lambda^2 = \beta_\lambda \int (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} |\bar{P}(iX)|^2 \; |\bar{f}(X)|^2 dx\, d\xi$$

et comme le rapport $(\frac{r(x)}{r(y)})^{\pm 1}$ reste uniformément borné lorsque $|x-y| \leqslant \frac{\delta(x)}{4}$, on peut sans guère augmenter l'intégrale y remplacer la fonction $|\bar{P}(iX)|^2 |\bar{f}(X)|^2$ par sa valeur moyenne sur la boule de $\mathbb{C}^n$ définie par $|X-Y| \leqslant \frac{\delta(x)}{4}$. Le théorème résulte alors de l'inégalité

$$(1.10) \quad \varepsilon^{2|\alpha|} |P^{(\alpha)}(0)|^2 |f(0)|^2 \leqslant C\, \varepsilon^{-2n} \int_{|Y_1| \leqslant \varepsilon, \ldots} |P(Y)|^2 |f(Y)|^2 \, dy\, d\eta$$

valable pour toute fonction f holomorphe au voisinage du polydisque qui intervient à droite et tout polynôme P : la preuve de cette inégalité (dans laquelle C ne dépend que de n et du degré de P) est du reste triviale puisqu'on se ramène par changement d'échelle au cas où $\varepsilon = 1$, puis à celui où $n = 1$, enfin au cas où P est de degré 1. Dans le cas de la demi-droite, on a $\delta(x) = x$, $r(t) = t^2$, et $I_{\lambda,k}(t) = \gamma t^{-\lambda-2k}$ où γ est une constante, de sorte que le théorème redonne les inégalités de Hardy un peu généralisées ; dans le cas du cône de lumière, on a $\delta(x) \sim x_o^{-1} r(x)$ et, ainsi que le montre un calcul un peu fastidieux, $I_{\lambda,k}(t) \sim t_o^{-2k}(r(t))^{-\lambda/2}$, ce qui conduit à des inégalités peut-être nouvelles.

Sur $\mathbb{R}^n$, l'importance des inégalités de Carleman dans les équations aux dérivées partielles a été reconnue très tôt par Calderon [3] , Hörmander ([5] , chap.8), Schwartz, Trèves [10]. Etant donné $\lambda > 0$, on introduit le système de coordonnées complexes $X_j = \lambda^{\frac{1}{2}} x_j + i\lambda^{-\frac{1}{2}} \xi_j$ et la norme

$$(1.11) \qquad \|u\|_\lambda^2 = \int e^{2\pi\lambda|t|^2} |u(t)|^2 dt$$

qui s'écrit aussi

$$(1.12) \qquad \|u\|_\lambda^2 = \int e^{-\pi(\lambda|x|^2+\lambda^{-1}|\xi|^2)} |\bar{f}(X)|^2 \, dx \, d\xi$$

si l'on pose

$$(1.13) \qquad \bar{f}(X) = (2\lambda)^{n/4} \exp(-\frac{\pi}{2} \Sigma \bar{X}_j^2) \int u(t) e^{2\pi\lambda^{\frac{1}{2}} \langle t,\bar{X}\rangle} dt \ :$$

cette transformée de Laplace un peu modifiée s'appelle ici la transformée de Bargmann-Fock (cf. Igusa [7]) et (1.10) conduit tout aussi immédiatement à l'inégalité [10]

$$(1.14) \qquad \int e^{2\pi\lambda\,|t|^2} |P(D)u|^2 dt \geqslant C^{-1} \Sigma\ \lambda^{|\alpha|} \int e^{2\pi\lambda|t|^2} |P^{(\alpha)}(D)u|^2 dt.$$

II - CALCULS DE FUCHS.

Le problème évoqué ici est celui de la construction d'une analyse pseudo-différentielle exactement adaptée à la géométrie d'un domaine C de $\mathbb{R}^n$. Prenons par exemple le cas de la demi-droite : il est habituel de procéder en étendant simplement à ce cas la définition usuelle du calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels, c'est-à-dire en posant

$$(2.1') \qquad (Op(f)u)(s) = \int f(s,\eta) u(t) e^{2i\pi\eta(s-t)} dt \, d\eta \ ,$$

le symbole f étant défini sur le demi-plan $s > 0$. Cependant, si l'on appelle $\mathcal{F}_2^{-1} f$ la transformée de Fourier inverse de f relativement à η , on voit que la restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ de l'opérateur ne dépend en fait que de la restriction de $(\mathcal{F}_2^{-1} f)(s,z)$ à l'ensemble défini par $z < s$: l'hypothèse que le support de cette distribution est contenu dans l'ensemble défini par $z \leqslant s$ est l'hypothèse de lacunarité introduite par Melrose dans son calcul des opérateurs totalement caractéristiques [9] : bien entendu, ce n'est que pour simplifier les notations que nous considérons ici la demi-droite plutôt que le demi-espace, sur lequel tout ce qui va suivre s'étend si l'on utilise dans les variables tangentielles le calcul de Weyl.

Nous remplacerons le calcul (2.1) par le suivant :

(2.2)
$$[(s^{-\frac{1}{2}})\,\mathrm{Op}_F(f)\,(s^{\frac{1}{2}}u)](s) = \int f((st)^{\frac{1}{2}},\eta)\,u(t)\,e^{2i\pi\eta(s-t)}\,dt\,d\eta$$

dans lequel le problème précédent ne se pose plus puisque l'application $(s,t) \longmapsto ((st)^{\frac{1}{2}}, s-t)$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$: le fait d'avoir conjugué la définition par l'opérateur de multiplication par $s^{\frac{1}{2}}$ est sans importance et ne répond qu'au souci de considérer $H = L^2(\mathbb{R}_*^+, s^{-1}ds)$ comme espace de Hilbert de référence. Plus généralement, soit C un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni par ailleurs d'une structure riemannienne qui en fasse un espace symétrique : ceci permet de définir le milieu $\mathrm{mil}(s,t)$ de deux points ou, si l'on préfère, la symétrie géodésique S_y autour de tout point y de C. Faisons l'hypothèse, vérifiée dans tous les cas cités au début de cet exposé, que l'application $(s,t) \longmapsto (\mathrm{mil}(s,t), s-t)$ est un difféomorphisme global de $C \times C$ sur $C \times \mathbb{R}^n$. On peut alors définir le calcul de Fuchs du domaine C par la formule

(2.3)
$$(\mathrm{Op}_F(f)u)(t) = 2^n \int_{C\times\mathbb{R}^n} f(y,\eta)\,u(S_y t)\,e^{2i\pi\langle\eta,\, t-S_y t\rangle}\,dy\,d\eta.$$

La première chose à faire est de construire au moyen de ce calcul des algèbres d'opérateurs bornés sur $H = L^2(C, dm(t))$, en analogie avec celles associées, sur $\mathbb{R}^n$, aux classes de symboles $S^0_{0,0}$ ou bien

$S^o_{1,o} = S^o_{o,o} \cap S^o_{1,1}$: il est commode d'appeler classes de symboles de type uniforme (resp. classique) celles qui généralisent les premières ou les secondes ; la terminologie se comprendra si l'on examine, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, l'effet sur un symbole de la classe $S^o_{o,o}$ d'une translation par un vecteur appartenant à $\mathbb{R}^{2n}$.

Dans le cas de la demi-droite, l'utilisation de la représentation unitaire U définie en (1.3) conduit à la formule de covariance

$$(2.4) \qquad U(a,b)\,\mathrm{Op}_F(f)\,U(a,b)^{-1} = \mathrm{Op}_F(f(a^{-1}y, a(\eta-b))$$

dans laquelle les couples (a,b) décrivent le groupe affine : les opérateurs différentiels

$$(2.5) \qquad e_1 = y\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_1 = y^{-1}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

commutent à l'action du groupe affine sur le demi-plan $\{(y,\eta) : y>0\}$, d'où la définition

<u>Définition 2.1</u>. <u>Un symbole de type uniforme de poids</u> 1 <u>est une fonction</u> f <u>de classe</u> C^∞ <u>sur le demi-plan telle que, pour tout couple</u> (j,k) <u>d'entiers</u> ≥ 0, <u>la fonction</u>

$$\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^j \left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^k f(y,\eta)$$

<u>soit bornée</u>.

Bien entendu, on peut définir des symboles de type uniforme de poids beaucoup plus général [11]. Le tube complexe Π dont il a été question plus haut dans un cadre général se réduit ici au demi-plan de Poincaré $\{x+i\xi : x > 0\}$ sur lequel la distance intrinsèque est donnée par la formule classique

$$(2.6) \qquad \mathrm{ch}\; d(X,X') = \frac{x^2+x'^2+(\xi-\xi')^2}{2xx'} .$$

L'utilisation des états cohérents ψ^λ_X définis en (1.4) conduit, au prix d'un travail déjà important même s'il ne s'agit ici que de la demi-droite, à la caractérisation suivante :

Théorème 2.2. Il y a identité entre la classe des opérateurs de la forme $Op_F(f)$, où f est un symbole de type uniforme de poids 1, et celle des opérateurs A bornés sur H qui vérifient la propriété suivante : pour tout N > 0, il existe $\lambda_1 > 0$ et, pour tout $\lambda > \lambda_1$, une constante C > 0 telle que l'on ait

$$|(A\psi_X^\lambda \ , \ \psi_{X'}^\lambda)| \leqslant C \ e^{-Nd(X,X')}$$

pour tout couple (X,X') de points de Π .

Il résulte immédiatement de ce théorème que les opérateurs en question constituent une algèbre. Dans le cas où C est le cône de lumière, ce théorème s'étend exactement, mais la preuve en est d'une longueur considérable [12] . Nous conjecturons qu'il reste valable, avec la notion convenable de symbole de type uniforme, toutes les fois que le tube complexe Π peut être muni lui-même d'un ds^2 se réduisant sur C à celui déjà connu et qui fasse de C un espace hermitien symétrique : c'est bien le cas pour les modèles cités.

On passe de la notion de symbole de type uniforme à celle de symbole de type classique en remplaçant comme à l'accoutumée l'hypothèse qu'il est inoffensif de dériver par celle que c'est avantageux.

Définition 2.3. Soient m et μ deux nombres réels. Nous dirons que $f \in \Sigma^{m,\mu}$ si f est une fonction de classe C^∞ sur le demi-plan vérifiant les estimations

$$|(y \frac{\partial}{\partial y})^j (y^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta})^k f(y,\eta)| \leqslant C_{jk} \ y^\mu (1+y^2\mu^2)^{\frac{m-k}{2}} \quad .$$

Nous dirons aussi que f, ou l'opérateur associé $Op_F(f)$, est de type classique d'ordre (m,μ).

Si l'on pose

$$(2.7) \qquad f(y,\eta) = a(y,y\eta) ,$$

la condition s'écrit aussi

$$(2.8) \qquad |(y \frac{\partial}{\partial y})^j (\frac{\partial}{\partial \xi})^k a(y,\zeta)| \leqslant C_{jk} \ y^\mu (1+|\zeta|)^{m-k} \ :$$

on voit que, lorsque $\mu = 0$, la classe englobe celle des symboles totalement caractéristiques, dont la définition est plus exigeante aussi bien lorsque $y \to 0$ que lorsque $y \to \infty$. Dans ce dernier cas, on parvient aux mêmes classes d'opérateurs, que l'on utilise la formule (2.2) ou la formule (2.1), à condition de faire dans le deuxième cas une hypothèse supplémentaire de lacunarité. Les symboles de type classique permettent encore de constituer des algèbres, mais surtout autorisent des développements asymptotiques [11] .

Dans le cas du cône de lumière, il est commode de transformer au moyen du difféomorphisme $t \mapsto x = (x_o, x_*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, avec

$$(2.9) \qquad t_o = x_o(1+|x_*|^2), \quad t_k = 2x_o x_k ,$$

le cône C en le demi-cylindre $x_o > 0$, $|x_*| < 1$: le ds^2 est en effet plus simple dans les nouvelles coordonnées et la classe des symboles classiques d'ordre (m, μ, ν) est, avec

$$(2.10) \qquad f(x,\xi) = a(x_o, x_* ; x_o\xi_o, (1-|x_*|^2)\xi_*),$$

caractérisée par les inégalités

$$(2.11) \qquad |(\frac{\partial}{\partial x_o})^j (\frac{\partial}{\partial x_*})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi_o})^k (\frac{\partial}{\partial \xi_*})^\beta a(x,\xi)|$$

$$\leqslant C\, x_o^{\mu-j}(1-|x_*|^2)^{\nu-|\alpha|}(1+|\xi|)^{m-k-|\beta|}.$$

En particulier, les opérateurs différentiels totalement caractéristiques sont engendrés par les opérateurs $x_o \frac{\partial}{\partial x_o}$, $(1-|x_*|^2)\frac{\partial}{\partial x_j}$: on pourra consulter [12] pour les détails.

Revenons une dernière fois au cas de la demi-droite. Les opérateurs infinitésimaux de la représentation U qui intervient ici sont l'opérateur (t) de multiplication par t et l'opérateur $(2i\pi)^{-1} t \frac{t}{dt}$. Définissons, pour m entier $\geqslant 0$ et μ réel, l'appartenance de u à l'espace $H^{m,\mu}$ par les conditions que $t^\mu (t \frac{d}{dt})^j u$ appartienne à $H = L^2(\mathbb{R}_*^+ , t^{-1}dt)$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant m$; étendons par dualité la définition au cas où m est entier négatif. On peut alors obtenir une caractérisation "à la Beals" (cf [1]) des opérateurs de type classique :

Théorème 2.4. Pour qu'un opérateur A borné sur H soit de type classique d'ordre (0,0), il faut et il suffit que, pour tout couple (j,k) d'entiers $\geqslant 0$, l'opérateur

$$(\mathrm{ad}(t))^{j}(\mathrm{ad}(\frac{1}{2i\pi}\, t\, \frac{d}{dt}))^{k} A$$

s'étende en un opérateur borné de $H^{-j,j}$ dans H.

On tire de là la conséquence, d'un style habituel, relative à l'inverse d'un opérateur de type classique inversible simultanément dans tous les espaces $H^{-j,j}$ et surtout le fait que l'on reste dans la classe si l'on transforme un opérateur de ce type par un difféomorphisme φ , pourvu que φ vérifie les estimations $|(t\frac{d}{dt})^{N}\varphi(t)| \leqslant C_N t$ et qu'il en soit de même de son inverse φ^{-1}. Comme $\mathbb{R}_{*}^{+} \times \mathbb{R}^{n}$ est le demi-espace, modèle local des variétés à bord, on voit que la théorie permet d'obtenir sur ces dernières un calcul pseudo-différentiel, par les procédés barbares de découpage et de recollement nécessités, dans le cas général, par l'absence de symétries.

III LA CLASSE $S_{1,1}$.

Nous avons vu dans les deux premières sections l'intérêt des états cohérents liés à la transformation de Laplace, qui permettent de représenter des fonctions de variables réelles à l'aide de fonctions holomorphes. On peut bien entendu concevoir qu'il puisse être utile de remplacer les équations de Cauchy-Riemann par d'autres systèmes elliptiques : en voici un exemple, lié à l'opérateur de Klein-Gordon modifié obtenu en remplaçant t par it dans l'opérateur de Klein-Gordon.

L'espace complexe Π considéré jusqu'à présent doit maintenant être remplacé par l'espace symétrique réel de rang un Π_0 constitué des points $Y = (\varepsilon,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\varepsilon > 0$: il est muni de la métrique $ds^2 = \varepsilon^{-2}(d\varepsilon^2+|dy|^2)$, ce qui conduit à la formule classique (voir par exemple Lax-Phillips [8])

$$\mathrm{ch}\, d(Y,Y') = (2\varepsilon\varepsilon')^{-1}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+|y-y'|^2), \tag{3.1}$$

et de la mesure associée $d\mu(Y) = \varepsilon^{-n-1}d\varepsilon dy$. Son interprétation "physique" est ici celle d'un espace-temps de Minkowski dans lequel on aurait remplacé t par it, ce qui transforme l'équation de Klein-Gordon en une équation elliptique.

On s'intéresse ici à des fonctions ou distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ et, comme dans la section 1, à une chaîne d'espaces de Hilbert H_λ : ce ne sont autres, à présent, que les espaces de Sobolev habituellement désignés ainsi, et l'espace H sera simplement $H_o = L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose $<\xi> = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'on définit, pour tout entier λ , la fonction $\psi_\varepsilon^\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par sa transformée de Fourier

$$(3.2) \qquad \hat{\psi}_\varepsilon^\lambda(\xi) = \varepsilon^{\frac{n}{2}+\lambda} <\xi>^\lambda e^{-2\pi\varepsilon<\xi>} \quad ;$$

Plus généralement, on pose, si $Y = (\varepsilon,y) \in \Pi_o$,

$$(3.3) \qquad \psi_{\varepsilon,y}^\lambda(x) = \psi_\varepsilon^\lambda(x-y) \quad :$$

ce sont les états cohérents cherchés. En dehors de l'action évidente des translations, il n'y a pas de formule analogue à (1.6) permutant les états cohérents entre eux sous l'effet des opérateurs d'une représentation de groupe. On a cependant la formule de résolution de l'identité

$$(3.4) \qquad \int_{\Pi_o} |(u,\psi_Y^\lambda)|^2 d\mu(Y) = \alpha_\lambda \, ||u||^2$$

valable avec une constante finie si $\lambda \geqslant 1$. Cette formule est analogue à (1.7) mais on peut aussi l'écrire sous la forme (analogue à (1.8))

$$(3.5) \qquad \alpha_\lambda \, ||u||^2_{-\lambda} = \int_{\Pi_o} \varepsilon^{2\lambda+n} |f(Y)|^2 d\mu(Y)$$

si l'on pose

$$(3.6) \qquad f(Y) = \int \hat{u}(\xi) e^{-2\pi\varepsilon<\xi>} e^{2i\pi<y,\xi>} d\xi \ .$$

On observera que la fonction f vérifie l'équation de Klein-Gordon modifiée

$$(3.7) \qquad 4\pi^2 f = [\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} + \Sigma \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}] \ f \ .$$

Au contraire de la transformation de Bargmann-Fock des fonctions sur $\mathbb{R}^n$, bien adaptée à la caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels de la classe $S_{o,o}$ (cf [12], section 1), la transformation $u \longmapsto f$ que l'on vient de définir est bien adaptée aux opérateurs de la classe $S_{1,1}$. Rappelons que, à la suite de travaux plus anciens de Stein, Bourdaud [2] a montré comment on pouvait obtenir une algèbre d'opérateurs en supposant simultanément l'appartenance à $S^o_{1,1}$ des symboles standard d'un opérateur et de son adjoint ; on pourra consulter également Hörmander [6] .

Plus généralement, appelons poids toute fonction $m = m(x,\xi)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, radiale par rapport à la deuxième variable, et telle que la fonction $\tilde{m}$ définie sur Π_o par la relation $m(x,\xi) = \tilde{m}(\langle\xi\rangle^{-1},x)$ vérifie pour un couple (C_1,N_1) de constantes positives l'inégalité

$$\tilde{m}(Y) \leqslant C_1 \, \tilde{m}(Y')e^{N_1 d(Y,Y')} \tag{3.8}$$

pour tout couple (Y,Y') de points de Π_o. On dira qu'un symbole $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ appartient à $S_{1,1}(m)$ s'il vérifie les estimations

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta f(x,\xi)\right| \leqslant C\langle\xi\rangle^{|\alpha|-|\beta|} \, m(x,\xi)$$

avec des constantes C ne dépendant que de (α,β).

Théorème 3.1. Soit A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et soit m un poids. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) les symboles standard de A et de A* appartiennent tous deux à $S_{1,1}(m)$

(ii) pour tout entier N il existe $\lambda_1 > 0$ et, pour tout entier $\lambda \geqslant \lambda_1$, une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$|(A\psi_Y^\lambda, \psi_{Y'}^\lambda)| \leqslant C \, \tilde{m}(Y)e^{-N \, d(Y,Y')}$$

pour tout couple (Y,Y') de points de Π_o .

Il n'est pas facile de construire suffisamment d'opérateurs vérifiant les conditions du théorème 3.1 à cause des exigences portant sur deux symboles liés (à la conjugaison près) par le fait que l'un est l'image de l'autre par l'opérateur

$$\exp[(2i\pi)^{-1} \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j}] .$$

Dans le cas où n = 1, le calcul de Klein-Gordon (voir [14]) conduit à un opérateur $Op_{KG}(f)$ vérifiant ces conditions pourvu que le seul symbole (de Klein-Gordon) f appartienne à $S_{1,1}(m)$.

REFERENCES.

[1] BEALS,R. Characterization of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1977), 45-57

[2] BOURDAUD, G. Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, Comm. Part. Diff. Equ. 13,9(1988), 1059-1084

[3] CALDERON, A.P. Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equations, Amer. J. Math. 80 (1958), 16-36

[4] HELGASON, S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press (1978), New York-London

[5] HORMANDER, L. Linear partial differential operators, Springer-Verlag (1963), Berlin

[6] HORMANDER, L. Pseudodifferential operators of type 1,1, Comm. Part. Diff. Equ. 13,9 (1988), 1085-1112

[7] IGUSA, J. Theta Functions, Springer-Verlag (1972), Berlin

[8] LAX, P.D., PHILLIPS, R.S. Translation representations for the solutions of the non-euclidean wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 617-667

[9] MELROSE, R.B. Transformation of boundary problems, Acta Math. 147 (1981), 149-236

[10] TREVES, F. Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math. 101 (1959), 1-139

[11] UNTERBERGER, A. The calculus of pseudodifferential operators of Fuchs type, Comm. Part. Diff. Equ. 9,12(1984), 1179-1236

[12] UNTERBERGER,A. Analyse harmonique et analyse pseudo-différentielle du cône de lumière, Astérisque 156, S.M.F. (1987), Paris

[13] UNTERBERGER,A. Pseudodifferential analysis, quantum mechanics and relativity, Comm. Part. Diff. Equ. 13,7 (1988), 847-894

[14] UNTERBERGER, A. L'analyse de Klein-Gordon, Comptes Rendus Acad. Sci., t. 308, série I (1989), 397-399.

Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse
BP 347
F 51062 Reims Cedex