

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE LÉVY-BRUHL

Conditions suffisantes de résolubilité locale d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes nilpotents

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982___A18_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONDITIONS SUFFISANTES DE RESOLUBILITE LOCALE
D'OPERATEURS INVARIANTS A GAUCHE SUR DES GROUPES NILPOTENTS

par P. Lévy-Bruhl

I INTRODUCTION

Soit $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_r$ une algèbre de Lie nilpotente graduée :

$$(1.1) \quad [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j} \quad \text{où : } i + j > r \Rightarrow \mathfrak{G}_{i+j} = \{0\} .$$

On note :

$$(1.2) \quad \mathfrak{G}^i = \bigoplus_{k \geq i} \mathfrak{G}_k$$

On désigne par G le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{G} , et on identifie l'algèbre universelle enveloppante complexifiée $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G , en prolongeant l'identification de \mathfrak{G} à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G fournie par :

$$(1.3) \quad \forall f \in C^\infty(G), \forall a \in \mathfrak{G}, a f(g) = \left. \frac{d}{dt} (f(g \exp ta)) \right|_{t=0}$$

Dans cette formule, \exp désigne l'application exponentielle, qui est un difféomorphisme de \mathfrak{G} sur G .

La famille de dilatations définie sur \mathfrak{G} par :

$$(1.4) \quad \delta_t |_{\mathfrak{G}_i} = t^i \text{ Id } (t > 0)$$

se prolonge à $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G})$. On note $\mathcal{U}_0 = \mathbb{C}$, et, pour $m \geq 1$, \mathcal{U}_m désigne la composante homogène de degré m de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G})$. On note de plus :

$$(1.5) \quad \mathcal{U}^m = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{U}_i .$$

On sait, par un résultat de Duflo, que tout opérateur bi-invariant sur un groupe de Lie est localement résoluble. Ce résultat cesse d'être vrai pour des opérateurs invariants d'un seul côté : c'est le cas pour l'opé-

rateur de H. Lewy, et les généralisations de cet exemple obtenues par Corwin et Rothschild ([C.R]). On sait d'autre part depuis les travaux de Helffer et Nourrigat ([H.N]₁ et [H.N]₂), qu'un opérateur P de \mathcal{U}_m est hypoelliptique si et seulement si son image $\pi(P)$ par toute représentation unitaire irréductible non triviale π de G est injective dans l'espace \mathcal{S}_π des vecteurs C^∞ de cette représentation. La résolubilité locale de P résultant de l'hypoellipticité de son adjoint formel P^* , on cherchera des conditions suffisantes de résolubilité en terme d'injectivité de $\pi(P^*)$, pour certaines représentations π . Une condition nécessaire de résolubilité ([C.R]), dans des cas particuliers, est l'injectivité de $\pi(P^*)$ pour presque toute représentation π . On cherche néanmoins, dans les conditions suffisantes, à faire porter l'hypothèse sur une partie de \hat{G} aussi petite que possible.

II ENONCE DES RESULTATS.

Les résultats obtenus ici sont valables pour des groupes de rang de nilpotence r égal à 2 ou 3, et nous les énoncerons successivement pour ces deux cas. Il faut tout d'abord rappeler certains points de la théorie des représentations.

Si \mathcal{V} est une sous-algèbre de \mathfrak{G} , et ℓ un homomorphisme de \mathcal{V} dans \mathbb{R} , (c'est-à-dire une forme linéaire sur \mathfrak{G} telle que $\ell([\mathcal{V}, \mathcal{V}])=0$), on définit la représentation unitaire $\pi_{(\ell, \mathcal{V})}$ de G comme étant l'induite à G de la représentation scalaire de $\exp \mathcal{V}$: $\exp v \rightarrow e^{i\ell(v)}$.

On sait d'après la théorie de Kirillov que si \mathcal{V} est isotrope maximale pour ℓ , $\pi_{(\ell, \mathcal{V})}$ est irréductible, et ne dépend, à équivalence unitaire près, que de ℓ . On la notera π_ℓ . Toute représentation unitaire irréductible est de ce type, et π_ℓ est équivalente à $\pi_{\ell'}$, si et seulement si ℓ et ℓ' sont sur la même orbite de la représentation coadjointe :

$$(2.1) \quad (\pi_\ell \sim \pi_{\ell'}) \iff (\exists h \in \mathfrak{G}, \ell' = (\exp \text{ad } h)^* \ell).$$

II 1) Le cas du rang 2 .

Pour $\eta \in \mathfrak{G}_2^*$, on définit la forme bilinéaire alternée B_η sur $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_1$ par :

$$(2.2) \quad B_\eta(X, Y) = \eta([X, Y]) .$$

Soit \mathcal{Z} l'ouvert de Zariski de \mathbb{C}_2^* sur laquelle B_η est de rang maximum, et soit d la dimension du radical de B_η pour η dans \mathcal{Z} .

Théorème 1. On suppose $d \geq 1$. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathbb{C})$ tel que :

$$\forall \ell = (\ell^1, \eta) \in \mathbb{C}_1^* \times {}^c \mathcal{Z} \setminus \{0\}, \pi_\ell(P^*) \text{ injectif dans } \mathcal{S}_{\pi_\ell}$$

Alors P est localement résoluble.

Remarques. Dans le cas où la forme B_η est de rang constant pour η non nul, l'hypothèse est l'hypothèse "Ro-dégénérée" de Helffer et Nourrigat, ou, selon d'autres terminologies, d'ellipticité transverse, ou ellipticité dans les directions génératrices (Rothschild et Tartakoff (R.T)).

Si $m = 2$, le théorème est d'ailleurs vrai sous cette seule hypothèse : $(LB_1) \pi_\ell(P^*)$ injectif dans \mathcal{S}_{π_ℓ} pour tout ℓ dégénérée sur \mathbb{C}_2^* .

II 2) Le cas du rang 3.

Soit $\mathbb{C} = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2 \oplus \mathbb{C}_3$. Pour ℓ^3 dans \mathbb{C}_3^* , on considère les deux espaces définis par :

$$(2.2) \quad \begin{cases} R_1^{\ell^3} = \{X \in \mathbb{C}_1 / \forall Y \in \mathbb{C}_2, \ell^3([X, Y]) = 0\} \\ R_2^{\ell^3} = \{X \in \mathbb{C}_2 / \forall Y \in \mathbb{C}_1, \ell^3([X, Y]) = 0\}. \end{cases}$$

Soit \mathfrak{F}_3 l'ensemble défini par :

$$(2.3) \quad \mathfrak{F}_3 = \{\ell^3 \in \mathbb{C}_3^* / \dim R_2^{\ell^3} > \inf_{\ell', \ell^3 \in \mathbb{C}_3^*} (\dim R_2^{\ell', \ell^3})\}$$

\mathfrak{F}_3 est un ensemble algébrique, et on désigne par F la réunion de l'ensemble des éléments de \mathbb{C}_3^* dont la composante sur \mathbb{C}_3^* est dans \mathfrak{F}_3 et de ceux dont l'orbite n'est pas de dimension maximale. F est une réunion d'orbites, et vérifie la propriété :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Soit } \ell = (\ell^1, \ell') \in \mathbb{C}_1^* \times \mathbb{C}^{2*}. \text{ Si } \ell \text{ est dans } F, \text{ alors } F \text{ contient} \\ \text{tout élément du type } (m^1, \ell'), \text{ avec } m^1 \text{ dans } \mathbb{C}_1^*. \end{cases}$$

F est de plus de mesure de Lebesgue nulle. Pour ℓ^2 dans \mathbb{C}_2^* et $\ell^3 \in \mathfrak{F}_3$, on note $p_1^{\ell^2}$ la dimension générique du radical de la forme définie sur $R_1^{\ell^2, \ell^3}$ par : $(X, Y) \longrightarrow \ell^2([X, Y])$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2 : On suppose $p_1' > 0$. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{Q})$ tel que :

$$(2.5) \quad \forall \ell \in F \setminus \{0\}, \pi_\ell(P^*) \text{ est injectif dans } \mathcal{S}_{\pi_\ell} .$$

Alors P est localement résoluble.

Remarques. L'hypothèse (2.5) est toujours plus forte que "Ro-dégénérée". Il résulte d'autre part d'un exemple simple [C.R], que l'injectivité de $\pi_\ell(P^*)$ pour tout ℓ non dégénérée sur \mathcal{Q}_3 n'implique pas la résolubilité locale de P , ce qui justifie une hypothèse du type (2.5).

III INDICATIONS SUR LA PREUVE DES RESULTATS.

Ce qui suit a pour but de dégager les idées générales de la démonstration, dont le fil directeur est le suivant : Après avoir obtenu, en un certain sens, des inverses de $\pi_\ell(P^*)$, on utilise la formule de Plancherel de G pour obtenir une solution élémentaire de P , ou résoudre directement l'équation $Pu = f$ ($[LB_1], [LB_2]$ ou $[M]$). Plus précisément on montre que l'hypothèse implique l'inversibilité de $\pi_\ell(P^*)$ pour presque tout ℓ , et on utilise une complexification de certaines composantes de ℓ , qui nécessite l'introduction de certaines représentations non unitaires de G , pour éviter les points où $\pi_\ell(P)$ est non injectif, grâce à une formule intégrale de Cauchy. Le cas $r = 2$ étant voisin de la preuve de $[LB_2]$, nous nous limitons ici au cas $r = 3$. La première étape, nécessaire aussi si $r = 2$ et $\mathcal{L} \neq \mathcal{Q}_2^* \setminus \{0\}$, est de prouver la proposition suivante :

Proposition 3.1 : Soit F un fermé de \mathcal{Q}^* , stable sous l'action de G , contenant \mathcal{Q}_r^1 ($r =$ rang de nilpotence de \mathcal{Q}), et vérifiant la propriété (2.4). Soit \tilde{F} l'ensemble des restrictions de F à \mathcal{Q}^2 , et \tilde{F}_1 défini par :

$$\tilde{F}_1 = \{ \ell = (\ell^1, \ell') \in \mathcal{Q}_1^* \times \mathcal{Q}^{2*} / \forall h \in \mathcal{Q}, \exists \ell'' \in \tilde{F}, \|\ell'' - (\exp \text{adh})^* \ell'\| \leq 1 \}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme quasi-homogène associée à la graduation de \mathcal{Q}^* .

Soit P dans \mathcal{U}_m (m assez grand) tel que $\pi_\ell(P)$ soit injectif dans \mathcal{S}_{π_ℓ}

pour ℓ dans $F \setminus \{0\}$. Alors :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \forall \ell \in \mathcal{Q}^*, \ell \in \tilde{F}_1 \implies \\ \forall u \in H_\ell^m, \|u\|_{H_\ell^m} \leq C [\|\pi_\ell(P)u\|_0^2 + \|u\|_0^2] \end{array} \right.$$

Dans (3.2) on définit H_ℓ^m comme suit : Soit $L^2(X)$ l'espace de la représentation π_ℓ , alors :

$$H_\ell^m = \{u \in L^2(X) \mid \forall A \in \mathcal{U}^m, \pi_\ell(A) u \in L^2(X)\} .$$

et, ayant fixé une base A_j de \mathcal{U}^m , on pose :

$$\|u\|_{H_\ell^m}^2 = \sum_j \|\pi_\ell(A_j)u\|_0^2 .$$

La preuve de la proposition (3.1) utilise les techniques développées par Helffer et Nourrigat dans leurs articles sur l'hypoellipticité et dans [HN₃]. Quitte à remplacer P par $(PP^*)^\ell$, on peut supposer P formellement auto-adjoint, et de degré assez grand pour utiliser la proposition 3.1, avec $F = \mathcal{Q}_1^* \times \mathcal{L}$ si $r = 2$, et F défini en II 2) si $r = 3$.

En utilisant l'homogénéité, il suffit d'étudier les opérateurs $\pi_\ell(P)$ pour $\|\ell^3\| = 1$.

En appliquant la proposition (3.1) à $\mathcal{Q}_1^* \times \mathcal{Q}_2^* \times \mathfrak{F}_3 \subset F$, on obtient :

$$(3.3) \quad \exists M_1 > 0, \exists A > 0, (d(\ell^3, \mathfrak{F}_3) \leq M_1) \implies (\|\pi_\ell(P)^{-1}\| \leq A) .$$

Pour $\ell^3 \notin \mathfrak{F}_3$, on construit des bases \mathcal{B}_i de \mathcal{Q}_i :

$$\mathcal{B}_i = \{W_1^i, \dots, W_{d_i}^i, \mathcal{U}_1^i, \dots, \mathcal{U}_s^i\}$$

avec :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (W_1^i, \dots, W_{d_i}^i) \text{ base orthonormée de } R_i^{\ell^3} \\ (U_1^i, \dots, U_s^i) \text{ base du supplémentaire orthogonal de } R_i^{\ell^3} \text{ dans } \mathcal{Q}_i \\ \forall i, j \in [1, s], \ell^3([U_i^1, U_j^2]) = \delta_{ij} . \end{array} \right.$$

Au voisinage de tout point ℓ^3 , on peut faire un tel choix dépendant analytiquement de ℓ^3 . On se place sur un tel ouvert. (Ils sont par (3.3) en nombre fini).

Soit $\ell^2 = (\ell'^2, \ell''^2)$ relativement aux (W_i^1, U_j^1) . On vérifie que toute représentation est unitairement équivalente à une représentation de la forme : $\pi_{\ell^2}(\ell^1, (\ell'^2, 0), \ell^3)$. Soit alors B_{ℓ^2} la forme bilinéaire définie sur $R_1^{\ell^3}$ par :

$$(3.5) \quad B_{\ell^2}(X, Y) = \ell^2([X, Y]).$$

Cette forme est de rang maximum sur un ouvert de Zariski, et on prouve grâce à la proposition 3.1 que $\pi_{\ell^1, \ell^2, \ell^3}^{(P)}$ est inversible sur un voisinage du complémentaire de cet ouvert de Zariski, les normes des inverses y étant uniformément majorées. Il en est de même pour $\|\ell^2\| \geq M_2$.

Pour (ℓ^2, ℓ^3) fixé, $\ell^3 \in \mathfrak{F}_3$, rang B_{ℓ^2} maximum, on construit une base

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 \text{ de } \mathcal{G}_1 : \tilde{\mathcal{B}}_1 = \{ \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_{p_1}, X_1, \dots, X_\mu, Y_1, \dots, Y_\mu, U_1^1, \dots, U_s^1 \}$$

avec :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_{p_1} \} \text{ base orthonormée du radical de } B_{\ell^2} \\ \{ X_1, \dots, Y_\mu, U_i^1 \} \text{ base du supplémentaire orthogonal.} \\ \forall i, j \in [1, \dots, \mu], B_{\ell^2}(X_i, Y_j) = \delta_{ij} . \end{array} \right.$$

Au voisinage de tout point (ℓ^2, ℓ^3) fixé comme ci-dessus, on peut faire un tel choix analytique en (ℓ^2, ℓ^3) , et on vérifie que toute représentation est à équivalence unitaire près du type $\pi_{(\ell^1, 0, \ell^2, 0, \ell^3)} = \pi_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}$ où ℓ^1 est la composante de ℓ^1 sur $\{W_1, \dots, W_{p_1}\}$.

On prouve enfin, en utilisant encore la proposition (3.1) que $\pi_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}^{(P)}$ est inversible pour $\|\ell^1\| \geq M_3$.

Modulo l'homogénéité, on est ramené à étudier l'inversibilité de $\pi_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}^{(P)}$ sur un compact de la section des orbites que l'on vient de construire. Les opérateurs $\pi_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}^{(P)}$ sont, (localement), des opérateurs à coefficients polynomiaux, dont les coefficients sont analytiques en (ℓ^1, ℓ^2, ℓ^3) , et ils sont, d'après (H.N), d'indice nul de $H^m_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}$ dans L^2 . On vérifie que les représentations $\pi_{(\ell^1, \ell^2, \ell^3)}$ sont encore définies pour ℓ_1^1 complexe, en tant que représentations non unitaires de G. (ℓ_1^1 existe car par hypothèse $p_1^1 \geq 1$). Les représentations pour lesquelles $\pi(P)$ peut n'être pas inversible sont assez régulières pour

que l'on prouve :

Lemme 3.1 : Soit (l'^1, l'^2, l'^3) tel que $\pi_{(l'^1, l'^2, l'^3)}(P)$ soit non inversible. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un cercle Γ de centre l'^1 dans \mathbb{C} , de rayon compris entre ε et $\varepsilon/2$ sur lequel $\pi_{(z, l'_2, \dots, l'_{p_1}, l'^2, l'^3)}$ est inversible.

On obtient de plus un contrôle de la norme de cet inverse en fonction de ε .

Dans le cas où les espaces $H^m_{(l'^1, l'^2, l'^3)}$ sont fixes, ce qui est toujours

vrai si $r = 2$, et qui résulte aussi de l'hypothèse de [C.R.], les

$\pi_{(l'^1, l'^2, l'^3)}(P)$ forment une famille holomorphe de type A, et la preuve

est identique à celle de [LB2].

On prouve que, si φ est dans $C_0^\infty(G)$, et si L est une puissance assez grande de la somme des carrés des générateurs de \mathfrak{G}_3 , on définit une distribution E_φ par une formule du type :

$$E_\varphi(\Psi) = \int \text{Tr} [\pi_\ell(\Psi) \pi_\ell(P)^{-1} \pi_\ell(L\varphi)] d\mu(\ell), \text{ où } d\mu \text{ est la mesure de Plancherel, en remplaçant dans la région où } \pi_\ell(P) \text{ n'est pas inversible } \pi_\ell(\Psi) \pi_\ell(P)^{-1} \text{ par } \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \text{Tr} [\pi_{(z'_1, l'^2, l'^3)}(\Psi) [\pi_{(z', l'^2, l'^3)}(P)]^{-1}] \frac{dz'_1}{z'_1 - l'^1_1}$$

où $z'_1 = (z'_1, l'^1_2, \dots, l'^1_{p_1})$. La distribution E_φ vérifie alors $PE_\varphi = L\varphi$, ce

qui prouve que P est localement résoluble puisque L l'est, (étant bi-invariant).

Bibliographie :

[C.R] L. Corwin-L.P. Rothschild : Necessary conditions for local solvability of homogeneous left invariant differential operators on nilpotent Lie groups. Acta. Mat. 147 3-4 (1981) .

[HN₁] B. Helffer-J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des groupes de rang de nilpotence 3, Comm. in PDE 3 (1978) .

[HN₂] B. Helffer-J. Nourrigat : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent. Comm. in PDE 4 (1979).

- [HN₃] B. Helffer, J. Nourrigat : Manuscrit
- [LB₁] P. Levy-Bruhl : Application de la formule de Plancherel à la résolubilité d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes Nilpotents. Bull Sc. Math. 2 (1981).
- [LB₂] P. Levy-Bruhl : Note aux C.R.A.S. 19.1. 1981 .
- [M] G. Métivier : Séminaire Bourbaki 583 (1981).

*
*
*