

PASCAL LIENHARDT

Subdivisions de surfaces et cartes généralisées de dimension 2

Informatique théorique et applications, tome 25, n° 2 (1991),
p. 171-202

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1991__25_2_171_0

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUBDIVISIONS DE SURFACES ET CARTES GÉNÉRALISÉES DE DIMENSION 2 (*)

par Pascal LIENHARDT (1)

Communiqué par Robert CORI

Résumé. – *Cet article a pour objet l'étude de la modélisation de subdivisions de surfaces orientables ou non orientables, avec bords ou sans bords. La modélisation informatique de ce type de subdivisions est d'un intérêt majeur pour la modélisation de solides par leurs bords (Boundary Representation).*

Nous reprenons ici de Griffiths [12] une définition constructive de ce qu'est une subdivision de surface, et une classification de ces subdivisions en surfaces topologiques. Puis nous présentons la notion de 2-carte topologique, permettant de modéliser la topologie de toute subdivision de toute surface orientable fermée, la notion de 2-G-carte, introduite par W. T. Tutte, permettant de modéliser la topologie de toute subdivision de toute surface orientable ou non orientable, avec ou sans bords. Toute 2-carte peut être déduite d'une 2-G-carte définissant la topologie d'une subdivision de surface orientable fermée. Différentes caractéristiques peuvent être associées aux 2-cartes et aux 2-G-cartes, permettant d'effectuer une classification de celles-ci en fonction de la classification des subdivisions qu'elles modélisent. Enfin, nous présentons un ensemble d'opérations de base permettant de construire toute 2-G-carte, et, en conséquence, toute 2-carte.

Abstract. – *This paper deals with modeling subdivisions of orientable surfaces, with or without boundaries. Modeling this kind of subdivisions is of great interest in Boundary Representation.*

Following Griffiths' book [12] for instance, we present a constructive definition of subdivisions of surfaces, and a classification of these subdivisions into topological surfaces. We also present the notion of topological 2-map, which allows to model the topology of any subdivision of any orientable surface without boundaries, and the notion of 2-G-map, introduced by W. T. Tutte, which allows to model the topology of any subdivision of any surface (orientable or not, with or without boundaries). Any 2-map can be deduced from a 2-G-map, which defines the topology of a subdivision of an orientable surface without boundaries. Characteristics are associated to any 2-map and to any 2-G-map. These characteristics make it possible to classify 2-maps and 2-G-maps, according to the classification of the subdivisions which are defined by these 2-maps and 2-G-maps. Finally, we present basic operations, which allow to construct any 2-G-map (and consequently, of any 2-map).

(*) Reçu en décembre 1988, révisé en avril 1990.

(1) C.N.R.S., Département d'Informatique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

0. INTRODUCTION

En modélisation géométrique de solides par les bords, de nombreux travaux insistent sur la séparation entre les aspects *topologiques* (concernant en particulier les relations existant entre les différents éléments de l'objet modélisé : sommets, arêtes et faces), et les autres aspects que nous appellerons improprement aspects *purement géométriques* (voir par exemple [20]). Cette distinction permet de différencier les problèmes posés en modélisation géométrique, éventuellement de les hiérarchiser (par exemple, en animation d'objets articulés, la définition de la topologie d'un objet peut rester invariante, alors que ses caractéristiques purement géométriques évoluent dans le temps).

Classiquement, en modélisation par les bords, un solide (au sens de [22]) est défini par une *subdivision* d'une surface orientable sans bords (informellement, une subdivision d'une surface peut être définie comme une *partition* de cette surface en sommets, arêtes et faces, c'est-à-dire en cellules de dimension 0, de dimension 1 et de dimension 2). Une telle subdivision, plongée dans l'espace tridimensionnel usuel, partitionne cet espace en deux régions distinctes : l'une de ces régions définit le *volume intérieur* de l'objet modélisé, l'autre définit le *volume extérieur* à l'objet. De nombreux travaux ont porté sur la définition de modèles informatiques permettant la représentation de subdivisions de surfaces et privilégiant l'information topologique, ainsi que sur la définition d'opérations élémentaires (*opérations eulériennes*) applicables à ces modèles (voir en particulier [3], [26], [13]). Paradoxalement, la notion de subdivision de surface (orientable ou non orientable, avec ou sans bords) reste peu connue, de même que la *classification* de ces subdivisions en *surfaces topologiques*, ainsi que les critères de classification (voir cependant [13]). Il est à noter que des travaux très récents ont porté sur l'étude de modèles pour la représentation de subdivisions d'espaces de dimension 3 orientables fermés ([7], [16], [2], [24]), et, dernièrement, sur la modélisation de subdivisions d'espaces de dimension n , orientables ou non orientables, avec bords ou sans bords ([5], [19]; sur un exemple de problème en dimension n , voir [21]).

Nous étudions ici, d'une part *la notion* de subdivision de surface, ainsi que la *classification* de ces subdivisions, en nous inspirant de l'approche *constructive* présentée en [12] (où une subdivision est définie à partir d'objets élémentaires qui sont des *faces*, par des opérations d'*assemblage* de ces faces entre elles). Une subdivision est caractérisée par le *nombre de ses bords* (non nul si la subdivision est *ouverte*, nul si la subdivision est *fermée*), son *genre* (c'est-à-dire le nombre de *trous* de la surface, au sens : trou d'un tore ; par exemple, le genre d'une sphère est nul, le genre d'un tore est 1), son *coefficient d'orientabilité* (caractérisant le caractère orientable ou non de la surface ; ce

coefficient est nul pour une surface orientable, non nul sinon). L'ensemble des subdivisions ayant mêmes caractéristiques définit une *surface topologique*.

Nous étudions d'autre part les notions de *2-carte combinatoire* [6] et de *2-G-carte* (cf. [25], [17] et [18]). Toute 2-carte définit la topologie d'une subdivision de surface orientable sans bords, et réciproquement, la topologie de toute subdivision de toute surface orientable sans bords peut être définie par une 2-carte. De même, toute 2-G-carte définit la topologie d'une subdivision de surface (orientable ou non, avec ou sans bords), et réciproquement, la topologie de toute subdivision de toute surface peut être définie par une 2-G-carte. De plus, toute 2-carte peut être déduite d'une 2-G-carte définissant la topologie d'une subdivision d'une surface orientable sans bords, et réciproquement. Les 2-G-cartes (resp. les 2-cartes) constituent une classe particulière de *n-G-cartes* (resp. de *n-cartes*): cf. [19] (voir aussi [15]).

Les notions de 2-carte et de 2-G-carte définissent les différents éléments d'une subdivision (sommet, arête, face, bord et aussi subdivision) à partir d'un type *unique* d'éléments appelés *brins*, et ce de manière *rigoureuse* et *non ambiguë*. De même, elles permettent de rendre clairement compte des diverses relations d'adjacence et d'incidence de ces éléments entre eux. Enfin, à toute 2-carte ou 2-G-carte sont associées des caractéristiques (nombre de bords, genre, coefficient d'orientabilité) permettant de définir la surface topologique à laquelle appartient la subdivision dont la topologie est définie par la 2-carte ou la 2-G-carte. Ces caractéristiques sont directement *calculables* sur toute 2-carte et toute 2-G-carte (classification *statique*).

Des opérations de manipulation de 2-G-carte sont définies, permettant de construire toute 2-G-carte (et, en conséquence, toute 2-carte). Ces opérations permettent d'*assembler* des faces entre elles, par « *identifications* » d'arêtes (une face étant définie par son bord, qui est un cycle simple élémentaire d'arêtes).

Les opérations présentées ici constituent un ensemble d'opérations de base, à partir duquel d'autres opérations plus élaborées peuvent être définies (voir les opérations définies en [20], [1], et celles définies en [25]: « *éclatement* » d'un sommet en une face, identification de deux faces, etc). A ces opérations de base correspondent des *variations* des caractéristiques associées aux 2-G-cartes, permettant d'effectuer une classification *dynamique* des 2-G-cartes (c'est-à-dire que, étant donnée une 2-G-carte G , si l'on sait par quelles opérations G a été construite, il est possible de définir la surface topologique à laquelle appartient la subdivision définie par G , d'après les seules variations associées aux opérations).

On peut aisément déduire, à partir des notions de 2-carte et de 2- G -carte, des structures de données permettant de représenter la topologie de toute subdivision de surface. Les contraintes de cohérence sur ces structures de données se déduisent directement de la définition des 2-cartes et 2- G -cartes, ce qui simplifie le contrôle de cohérence de ces structures, ainsi que la mise en œuvre et le contrôle d'opérations applicables aux 2-cartes et 2- G -cartes.

L'ensemble des propriétés des 2-cartes et 2- G -cartes définies ci-dessus (rigueur, cohérence, possibilités de classification statique et dynamique) constituent l'intérêt majeur des 2-cartes et 2- G -cartes par rapport aux autres modèles utilisés pour la représentation de subdivisions de surfaces. Ces propriétés des 2-cartes et des 2- G -cartes permettent en particulier de concevoir et de réaliser des logiciels de modélisation tridimensionnelle *sains et fiables* (en Conception Assistée par Ordinateur, notamment).

En section 1 est étudiée la notion de subdivision de surface, les caractéristiques pouvant être associées à toute subdivision, et la classification des subdivisions en surfaces topologiques, d'après les caractéristiques qui leur sont associées. Nous présentons en section 2 les notions de 2- G -carte et de 2-carte, les définitions et propriétés associées à ces notions (en particulier les définitions de sommet, arête, face, bord d'une 2- G -carte ou d'une 2-carte, orientabilité, dualité, etc), et les définitions des caractéristiques associées aux 2- G -cartes et aux 2-cartes, permettant une classification de celles-ci. En section 3 sont décrites des opérations élémentaires applicables aux 2- G -cartes, permettant de construire toute 2- G -carte, ainsi que les variations correspondantes des caractéristiques associées aux 2- G -cartes. Nous concluons en section 4.

1. SURFACES TOPOLOGIQUES

Cette section a pour objet la présentation et la classification des surfaces, au sens de la topologie (le problème du plongement d'une surface dans l'espace tridimensionnel usuel ne sera que très peu abordé dans cette étude). Nous reprenons ici l'approche *constructive* que Griffiths a présentée en [12] (la présentation est ici intuitive et informelle). Plutôt que définir d'emblée *ce qu'est* une surface topologique, Griffiths montre comment *construire* une *subdivision* d'une surface par assemblage de polygones (collage de polygones le long de leurs arêtes), et définit ensuite une classification des subdivisions ainsi construites en surfaces topologiques (*voir* aussi [23]).

1.1. Construction de subdivisions de surfaces

1.1.1. Définition des subdivisions

Une subdivision d'une surface est définie par assemblage de faces; une face est définie ici comme un polygone simple, *i. e.* dont le bord est un cycle élémentaire simple d'arêtes. Le degré d'une face est la longueur du cycle d'arêtes définissant le bord de la face (*i. e.* le nombre d'arêtes incidentes à la face). Dans la suite de cette section, nous supposons que le degré d'une face est supérieur ou égal à 3 (cette contrainte est levée en section 2). L'assemblage de deux faces F_1 et F_2 consiste à « coller » (identifier) une arête de F_1 et une arête de F_2 (nous supposons ici que l'opération d'assemblage n'est applicable qu'à deux faces distinctes; cette contrainte est levée en section 2). L'assemblage de faces entre elles est ici soumis aux « règles »

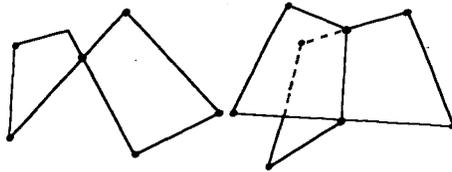


Figure 1.1. - Assemblages non autorisés.

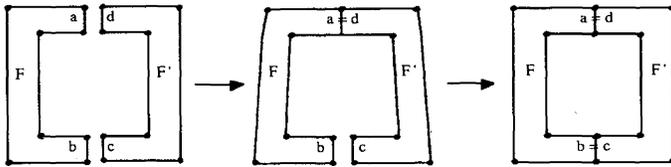


Figure 1.2. - Construction d'un anneau.

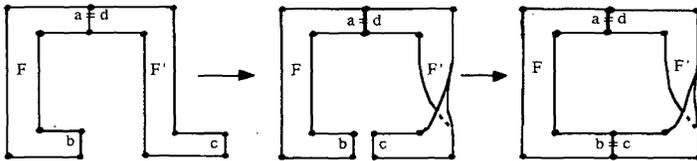


Figure 1.3. - Construction d'une bande de Moebius.

suivantes (cf. *fig.* 1.1; voir exemples en *Figures* 1.2 et 1.3) :

– par définition, deux faces distinctes ne peuvent être assemblées entre elles que par l'identification de deux arêtes; en particulier, une subdivision

composée de deux faces qui ne seraient adjacentes entre elles que par un sommet n'est pas valide (cf. [17] pour une généralisation);

- toute arête est incidente à exactement une ou deux faces.

Une subdivision est, ou bien une face unique, ou bien obtenue à partir d'une subdivision S en effectuant l'une des deux opérations suivantes :

- identification d'une arête libre (*i. e.* non déjà identifiée) d'une face de S avec une arête d'une nouvelle face F ;
- identification de deux arêtes libres de S incidentes à des faces distinctes.

Remarques :

- on considère comme équivalentes deux subdivisions qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel s'effectuent les identifications;

- on peut considérer l'assemblage de deux subdivisions par identification d'une arête libre de chacune d'elles; cela forme aussi une subdivision.

Une arête *libre* n'est incidente qu'à une seule face, une arête incidente à deux faces est dite *liée*. La *frontière* d'une subdivision S est constituée de l'ensemble des arêtes libres de S . Plus précisément, les arêtes libres de S forment des cycles élémentaires simples disjoints d'arêtes. Un tel cycle est appelé *bord* de S . La frontière de S est alors définie comme l'ensemble de ses bords. Une subdivision *ouverte*, ou à bords (resp. *fermée* ou *sans bords*) est une subdivision dont l'ensemble des bords est non vide (resp. vide).

1.1.2. Orientabilité

Nous constatons sur les exemples des figures 1.2 et 1.3 que la même séquence d'opérations (ajout d'une face et « collage » de deux arêtes incidentes à la même subdivision) peut produire des subdivisions différentes : par exemple, l'anneau possède deux bords, la bande de Moebius n'en possède qu'un. De plus, ces deux subdivisions se distinguent aussi par une importante propriété : l'anneau est *orientable*, la bande de Moebius est *non orientable*. Ceci signifie que : soit S , une subdivision, et F , une face de S (nous supposons ici qu'aucune arête incidente à S n'est une boucle). F est définie par un cycle d'arêtes $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Définir une *orientation* de F consiste à choisir un sens de parcours des arêtes de la face, ce sens pouvant être soit (e_1, e_2, \dots, e_n) , soit $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$. Ceci entraîne la définition, relativement à la face F , d'une orientation de chaque arête incidente à F (c'est-à-dire la définition d'un sommet *origine* de l'arête et d'un sommet *extrémité*). Etant donnée une arête a , notons $0_F(a)$ l'orientation de l'arête a relativement à la face F .

Nous dirons qu'une subdivision S est *orientable* si et seulement si (cf. fig. 1.4) :

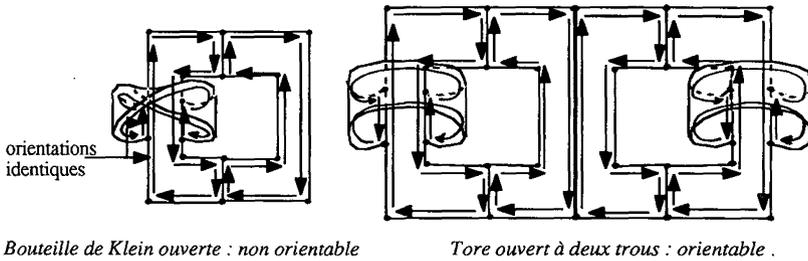


Figure 1.4. – Orientabilité.

– a étant une arête liée, et donc incidente à deux faces F_1 et F_2 , $O_{F_1}(a)$ et $O_{F_2}(a)$ sont opposées (c'est-à-dire le sommet origine de a relativement à F_1 est le sommet extrémité de a relativement à F_2 , et vice versa).

– les orientations des arêtes incidentes à un même bord ne sont jamais opposées, c'est-à-dire : soient deux arêtes libres a et a' adjacentes entre elles et incidentes au même bord, et soient les faces F_1 et F_2 auxquelles a et a' sont respectivement incidentes. Alors le sommet origine de a relativement à F_1 est sommet extrémité de a' relativement à F_2 , ou réciproquement.

Il est à noter que si S est orientable, il est possible de définir exactement deux orientations de S (une orientation par définition, et l'orientation *inverse* obtenue en inversant l'orientation de chaque face). Toute subdivision fermée orientable peut être plongée dans l'espace tridimensionnel usuel de telle manière que les sommets soient représentés par des points distincts, les arêtes par des arcs de courbes (homéomorphes à des segments), les faces par des surfaces ouvertes simples (homéomorphes à des disques), de telle manière que les faces ne s'intersectent pas en dehors de leurs arêtes et sommets communs. Une subdivision ainsi plongée dans l'espace tridimensionnel usuel partitionne cet espace en deux régions distinctes [12]. Intuitivement, cette subdivision définit un volume « intérieur », et un volume « extérieur ». Cette propriété n'est pas vraie pour les subdivisions fermées non orientables (voir l'exemple de la bouteille de Klein ci-après).

1.2. Surfaces topologiques

Pour toute subdivision S , nous noterons :

- $b(S)$, le nombre de bords de S ;
- $s(S)$, $a(S)$, $f(S)$, respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de S ; $c(S) = s(S) - a(S) + f(S)$ est appelée *caractéristique d'Euler* de S ;

– $q(S)$, appelé *coefficient d'orientabilité* de S , défini par :

si S est orientable, alors $q(S)=0$,

sinon si $(b(S)+c(S))$ est impair, alors $q(S)=1$ sinon $q(S)=2$;

– $g(S)$, appelé *genre* de S , défini par :

$g(S)=1-(b(S)+c(S)+q(S))/2$;

et $g(S)$ est égal au nombre de « trous » de S , dans le sens : trou d'un tore (cf. 1.3.5). Ces différentes caractéristiques sont toutes à valeurs entières; de plus, pour toute subdivision S , $b(S)$, $q(S)$ et $g(S)$ sont positifs.

Nous définissons alors la notion de *famille* de subdivisions, ou encore de *surface topologique*. Toute surface topologique est caractérisée par 3 entiers b , q , g , et est notée $ST_{b,q,g}$. Une surface topologique est définie comme l'ensemble de toutes les subdivisions S vérifiant : $b(S)=b$, $q(S)=q$, $g(S)=g$ (voir en 1.3 et 1.4 les principaux résultats connus permettant d'opérer cette classification). Les faces appartiennent à la même surface topologique $ST_{1,0,0}$, appelée *disque* (par extension, un élément quelconque de cette surface topologique est aussi appelé disque, et, par définition, tout disque possède exactement un bord, a pour genre 0, et est orientable).

1.3 Définition des opérations par cas

Une même séquence d'opérations de collage peut produire des subdivisions différentes. Nous distinguons alors différents « cas » d'opérations. Pour simplifier leur présentation, nous supposons dans cette section qu'aucune arête n'est une boucle (*i. e.* toute arête est incidente à deux sommets distincts). En conséquence, le nombre d'arêtes incidentes à un bord d'une subdivision est toujours supérieur ou égal à 2. Soient S , une subdivision ouverte appartenant à la surface topologique $ST_{b,q,g}$, et a , une arête libre incidente à S . La subdivision S' , résultat d'une opération de collage impliquant a , est définie comme suit :

1.3.1. Opération $+_f$ (fig. 1-5)

Soit a' , une arête incidente à une face F non incidente à S . L'opération notée $+_f$, consiste à identifier les arêtes a et a' (nous dirons qu'il y a ajout de la face F à la subdivision S). L'opération $+_f$ ne modifie ni le nombre de bords, ni le genre, ni le coefficient d'orientabilité, et donc S et S' appartiennent à la même surface topologique $ST_{b,q,g}$.

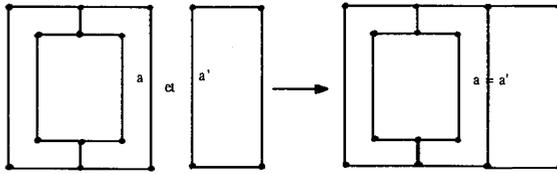


Figure 1.5. - Opération $+_f$.

1.3.2. Opération $+_r$ (fig. 1-6)

Soit a' , une arête libre de S , telle que a et a' sont incidentes au même bord b , et consécutives dans le cycle d'arêtes définissant b . Supposons que le

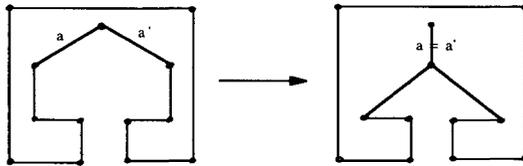


Figure 1.6. - Opération $+_r$.

nombre d'arêtes incidentes au bord b soit strictement supérieur à 2. Dans ce cas, il n'existe qu'une façon d'identifier a et a' (en supposant que l'opération ne crée pas de boucles) : cette opération est notée $+_r$. Dans ce cas aussi, S et S' appartiennent à la même surface topologique $ST_{b, q, g}$. En particulier, toute subdivision résultant de l'assemblage de faces par les seules opérations $+_f$ et $+_r$ est un disque.

1.3.3. Opération $+_o$ (fig. 1-7)

Soit a' , une arête libre de S , telles que a et a' sont incidentes au même bord b . Supposons que le nombre d'arêtes incidentes à b soit égal à 2 (seules

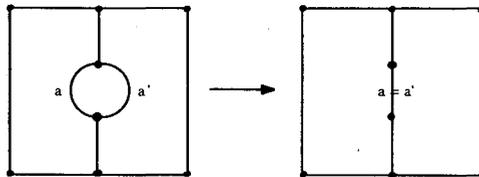


Figure 1.7. - Opération $+_o$.

a et a' sont incidentes à b). Alors l'identification de a et a' entraîne la suppression du bord b . Dans ce cas, S' appartient à la surface topologique $ST_{b-1, q, g}$.

Soit S , une subdivision ouverte, b , un bord de S , et F , une face non incidente à S , telle que le nombre d'arêtes incidentes à F soit égal au nombre d'arêtes incidentes à b . Il est clair qu'il est possible de définir une subdivision S' déduite de S , en identifiant chaque arête incidente à b à une arête incidente à F , en n'utilisant que les opérations $+_f$, $+_r$ et $+_o$ (de manière imagée, nous dirons que le bord b est fermé par un *couvercle*). Ce processus, répété pour chaque bord de S , définit une subdivision S'' fermée (appelée la *fermeture* de S), et, si S appartient à $ST_{b,q,g}$, alors S'' appartient à $ST_{0,q,g}$. Il est aisé de démontrer que, pour tous disques D et D' , la fermeture de D et la fermeture de D' appartiennent à la même surface topologique $ST_{0,0,0}$, appelée *sphère* (par extension, toute subdivision de $ST_{0,0,0}$ est aussi appelée sphère).

1.3.4. Opérations $+_e$ et $+_{te}$

Soit a' , une arête libre de S , telle que a et a' sont incidentes au même bord b de S , mais ne sont pas consécutives dans le cycle d'arêtes définissant b (i. e. a et a' n'ont pas de sommets extrémités communs). Deux cas sont alors possibles :

- l'opération d'identification de a et de a' entraîne la création d'un nouveau bord (cas de l'anneau de la figure 1.2, par exemple). Dans ce cas, l'opération est notée $+_e$, et S' appartient alors à $ST_{b+1,q,g}$. En particulier, si S est un disque, alors S' est un *anneau*.

- l'opération ne modifie pas le nombre de bords (cas de la bande de Moebius de la figure 1.3, par exemple). L'opération est alors notée $+_{te}$, et S' appartient dans ce cas à $ST_{b,q+1,g}$. Par définition, $q(S')$ est égal au nombre de fois que l'opération $+_{te}$ a été utilisée lors de la construction de S' (la valeur du coefficient d'orientabilité peut être ramenée à 0, 1 ou 2 : voir théorème d'échange en 1.4.2). Dans tous les cas, la subdivision S' obtenue par cette opération est non orientable. En particulier, si S est un disque, alors S' est une bande de Moebius. La surface topologique $ST_{0,1,0}$ (que l'on peut obtenir en fermant le bord d'une bande de Moebius, par exemple), est appelée *plan projectif réel*.

1.3.5. Opérations $+_b$ et $+_{tb}$

Soit a' , une arête libre de S , incidente à un bord b' distinct de b . L'identification des arêtes a et a' entraîne la « fusion » des bords b et b' en un bord unique. Considérons par exemple l'anneau de la figure 1.8.1, et soient deux arêtes a et a' incidentes à deux bords distincts de cet anneau. Deux cas sont

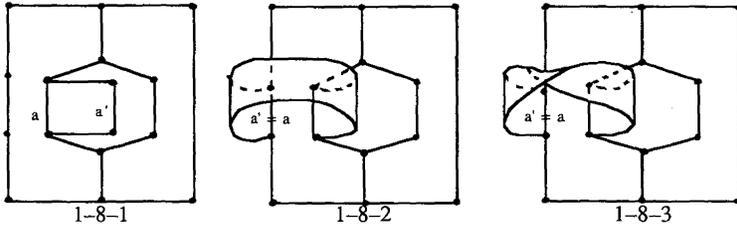


Figure 1.8. - Opérations $+_b$ et $+_{tb}$.

possibles :

- l'assemblage de a et de a' entraîne la création d'un *tore ouvert* à 1 trou (fig. 1.8.2; voir le tore fermé à un trou de la figure 1.9.1); dans cet exemple,



1-9-1 : tore à 1 trou



1-9-2 : bouteille de Klein

Figure 1.9.

la subdivision obtenue est orientable, et l'opération est notée $+_b$. S' appartient alors à $ST_{b-1, q, g+1}$.

- l'assemblage de a et de a' entraîne la création d'une *bouteille de Klein ouverte* (fig. 1.8.3; une bouteille de Klein fermée est représentée en figure 1.9.2). La subdivision obtenue est non orientable, et l'opération est notée $+_{tb}$. S' appartient alors à $ST_{b-1, q+2, g}$ (cf. 1.4). La surface topologique $ST_{0, 2, 0}$ est appelée *bouteille de Klein*. Il est à noter qu'une bouteille de Klein fermée (ou la fermeture d'une bande de Moebius) ne peut être plongée dans l'espace tridimensionnel usuel, sans que des faces ne s'intersectent entre elles en dehors de leurs arêtes et sommets communs [12].

1.4. Conclusion

Parmi les principaux résultats connus, ceux présentés ci-dessous permettent d'achever la classification des surfaces topologiques :

1.4.1. Opération $+_{tb}$

L'opération $+_{tb}$ incrémente le coefficient d'orientabilité de 2. On peut en effet montrer qu'appliquer l'opération $+_{tb}$ revient à appliquer deux fois

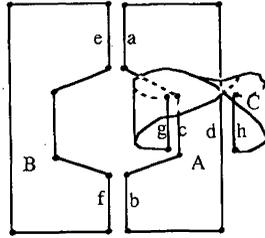


Figure 1.10.

l'opération $+_{te}$. Considérons l'exemple de la figure 1.10 : soient trois faces A , B et C , et les arêtes libres a , b , c , d (incidentes à A), e et f (incidentes à B), et g et h (incidentes à C), et soit la subdivision S définie par identification de a et $e(+_{\rho})$ et d et $h(+_{\rho})$. La subdivision S' définie par identification de f et $b(+_{\rho})$ est un anneau. La subdivision S'' définie par identification de c et g (par l'opération $+_{tb}$) est une bouteille de Klein ouverte. En modifiant l'ordre d'application des opérations, on a : la subdivision T définie par identification de c et g (par l'opération $+_{te}$) est une bande de Moebius (T appartient à $ST_{1,1,0}$); la subdivision T'' définie par l'identification de f et b (par l'opération $+_{te}$) appartient à $ST_{1,2,0}$, et est identique à S'' . En conséquence, une bouteille de Klein ouverte appartient à $ST_{1,2,0}$.

1.4.2 Théorème d'échange

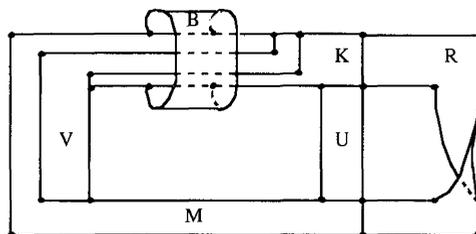
L'application, à une subdivision de la famille des disques, de trois opérations $+_{te}$, ou des opérations $+_{te}$, $+_e$ et $+_b$, définissent des subdivisions appartenant à la même surface topologique, c'est-à-dire que : $ST_{1,3,0} = ST_{1,1,1}$ (cf. fig. 1.11). On en déduit :

- $ST_{b,q,g} = ST_{b,q-2,g+1}$, pour tous b , q , g , avec $q \geq 3$;
- l'application de l'opération $+_{tb}$ à une subdivision appartenant à la surface topologique $ST_{b,q,g}$ entraîne la définition d'une subdivision appartenant à :
 - $ST_{b-1,q,g+1}$ si $q \geq 1$ (identique à la transition correspondant à l'opération $+_b$);
 - $ST_{b-1,2,g}$ si $q = 0$.

1.4.3. Théorème de classification

Toute surface topologique $ST_{b,q,g}$ est incluse dans l'une des familles :

$ST_{b,0,g}$ (si $q=0$); $ST_{b,1,u}$ (si q est impair); $ST_{b,2,v}$ (si q est pair et non nul),



$$\begin{array}{ll}
 (M, K, U, V) \in ST_{2,0,0} & (M, K, B, R) \in ST_{1,1,0} \\
 (M, K, U, V, B) \in ST_{1,0,1} & (M, K, B, R, V) \in ST_{1,2,0} \\
 (M, K, U, V, B, R) \in ST_{1,1,1} & (M, K, B, R, V, U) \in ST_{1,3,0}
 \end{array}$$

Figure 1.11.

avec : si q est impair : $u = g + (q-1)/2$; si q est pair et non nul : $v = g + q/2 - 1$;
 et toute subdivision S appartient à une *unique* surface topologique $ST_{b,q,g}$, telle que $0 \leq q \leq 2$ (cf. définition des caractéristiques en 1.2).

2. 2-G-CARTES, 2-CARTES

Nous donnons dans cette section une définition combinatoire des notions de 2- G -carte et de 2-carte. Les 2- G -cartes permettent de modéliser la topologie des subdivisions des surfaces orientables ou non orientables, ouvertes ou fermées. Les 2-cartes permettent de modéliser la topologie des subdivisions des surfaces orientables fermées. La notion de carte combinatoire, apparue vers 1960 [11], a été étudiée et développée dans de nombreux travaux (cf. [14], [6]). La notion de 2- G -carte présentée ici est très proche de la notion de carte définie en [25].

2.1. 2- G -cartes

2.1.1. Présentation et définition

Les 2- G -cartes sont définies à partir d'un type unique d'élément, qui est l'arête orientée (au sens de la théorie des graphes), appelée ici un *brin*. La notion de brin se retrouve dans la plupart des modèles utilisés pour la représentation de subdivisions de surfaces, et, plus généralement, pour la représentation de subdivisions d'espaces de dimension quelconque (voir [3], [26], [20], [13], [7], [5], [2], [24], [16] et [19]). Mais cette notion de brin n'est en général que sous-entendue. Un brin est représenté graphiquement par une

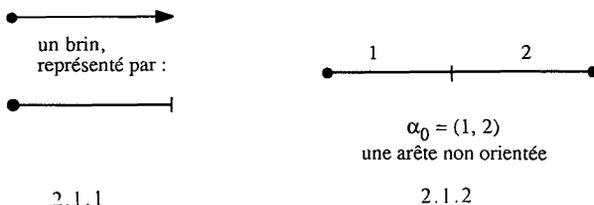


Figure 2.1.

demi-arête (cf. fig. 2.1.1). Il est à noter qu'un brin définit intuitivement un *sommet*, qui est une *cellule de dimension 0*.

NOTATIONS : Pour tout ensemble Φ de permutations de B , soit $\langle \Phi \rangle$ le groupe de permutations de B engendré par Φ ; pour tout brin de B , $\langle \Phi \rangle(b) = \{ \varphi(b), \varphi \in \langle \Phi \rangle \}$ est l'orbite de b relativement au groupe $\langle \Phi \rangle$, et $z(\Phi)$ est le nombre d'orbites de $\langle \Phi \rangle$ dans B .

DÉFINITION : Une 0- G -carte G est définie par un couple (B, α_0) , tel que :

- B est un ensemble fini, non vide, dont les éléments sont appelés *brins* ;
- α_0 est une *involution* sur B , c'est-à-dire que :

$$\forall b \in B, \alpha_0^2(b) = b \quad [\text{ou encore } \alpha_0(b) = \alpha_0^{-1}(b)].$$

Pour tout brin b , $\langle \alpha_0 \rangle(b)$ est la composante connexe de G incidente à b . Si $z(\alpha_0) = 1$, alors la 0- G -carte est dite *connexe*. Supposons G connexe : de manière intuitive, α_0 est un « lien », qui unit au plus deux brins distincts l'un avec l'autre. Si α_0 est *sans points fixes* (c'est-à-dire $\forall b \in B, \alpha_0(b) \neq b$), la 0- G -carte est dite *fermée*, ou *sans bords* (sinon elle est dite *ouverte*, ou *à bords*), et cette 0- G -carte modélise alors une *arête non orientée* (composée de deux arêtes orientées), c'est-à-dire une *cellule de dimension 1* (fig. 2.1.2).

DÉFINITION : Une 1- G -carte G est définie par un triplet $G = (B, \alpha_0, \alpha_1)$, tel que :

- B est un ensemble fini, non vide, dont les éléments sont appelés *brins* :
- α_0 et α_1 sont des *involutions* sur B , et α_0 est *sans points fixes* ($\forall b \in B, \alpha_0(b) \neq b$).

Si α_1 est sans points fixes, alors la 1- G -carte est dite *fermée*, ou *sans bords* (sinon elle est dite *ouverte* ou *à bords*). α_0 est sans points fixes : la 0- G -carte (B, α_0) est donc sans bords, et modélise un ensemble d'arêtes non orientées.

Intuitivement, α_1 est un « lien » qui assemble ces arêtes non orientées autour de leurs sommets extrémités (cf. fig. 2.2.1). Ceci permet de modéliser

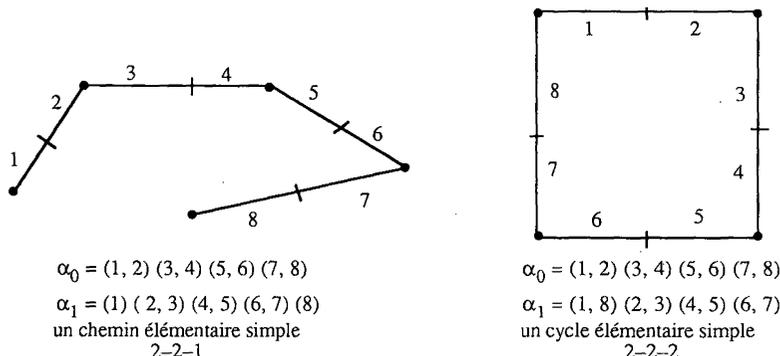


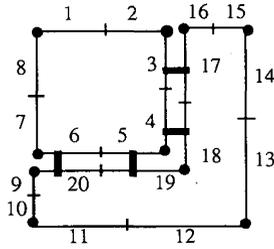
Figure 2.2.

des chemins simples élémentaires d'arêtes (au sens de la théorie des graphes). Si α_1 est sans points fixes (fig. 2.2.2), alors une 1-G-carte modélise des cycles simples élémentaires d'arêtes, et définit donc le bord de polygones simples, ou de faces, qui sont des cellules de dimension 2. Soit une 1-G-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1)$, et soit b , un brin de B . L'orbite $\langle \alpha_0 \rangle (b)$ est appelée arête de G ; le brin $\alpha_0(b)$ est appelé brin opposé de b ; l'orbite $\langle \alpha_1 \rangle (b)$ est appelée sommet de G . La composante connexe de la 1-G-carte (B, α_0, α_1) , incidente au brin b de B , est définie par : $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle (b)$.

L'ensemble des faces d'une subdivision S d'une surface peut alors être défini formellement par une 1-G-carte fermée $EF = (B, \alpha_0, \alpha_1)$. Chaque composante connexe de EF définit une face de la subdivision S . Pour l'assemblage des faces, on peut alors utiliser une troisième involution α_2 . Celle-ci est un « lien », qui unit entre eux au plus deux brins distincts (cf. fig. 2.3). Intuitivement, il s'agit ici d'une « couture » des faces entre elles par α_2 , et non pas d'un « collage », c'est-à-dire qu'il n'y a pas ici réellement identification entre elles des arêtes bordant les faces, contrairement à ce qui est présenté en section 1. Comme la « couture » concerne une arête, et non un brin, on a la propriété : $\alpha_2 \circ \alpha_0$ est une involution.

DÉFINITION : Une 2-G-carte G est définie par un quadruplet $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, tel que :

- B est un ensemble fini, non vide, dont les éléments sont appelés brins ;
- α_0, α_1 , et α_2 sont des involutions sur B , telles que :
 - α_0 et α_1 sont des involutions sans points fixes ;
 - $\alpha_2 \circ \alpha_0$ est une involution.



$\alpha_2 = (1) (2) (3, 17) (4, 18) (5, 19) (6, 20)$
 $(7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16)$
 le lien α_2 est symbolisé par un trait épais

Figure 2.3.

La composante connexe incidente à un brin b de B est définie par :

$$\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle (b).$$

Une 2-G-carte *connexe* ne comporte qu'une seule composante connexe.

THÉORÈME : *A toute 2-G-carte connexe correspond la topologie d'une subdivision d'une surface topologique (orientable ou non, ouverte ou fermée); réciproquement, à la topologie de toute subdivision de toute surface topologique correspond une 2-G-carte connexe.*

Preuve (cf. [25]) : Le principe de la preuve est que la construction de subdivisions de surfaces par « collage » d'arêtes (cf. section 1) peut être refait avec des opérations de « couture » d'arêtes (par l'involution α_2) au lieu d'opérations d'identification d'arêtes.

Les restrictions énoncées en section 1, concernant la notion de subdivision, sont ici levées : le degré d'une face peut être quelconque (≥ 1), de même que le nombre d'arêtes libres incidentes à un bord. De plus, l'opération d'identification de deux arêtes d'une subdivision peut être appliquée à deux arêtes incidentes à une même face de la subdivision (cf. section 3 : opérations sur les 2-G-cartes). Afin de simplifier l'exposé, nous supposons par la suite que les 2-G-cartes sont connexes.

2.1.2. 1-G-cartes des éléments : sommet, arête, face, bord

Étant donné une 2-G-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, nous définissons alors quatre 1-G-cartes déduites de G (fig. 2.4) :

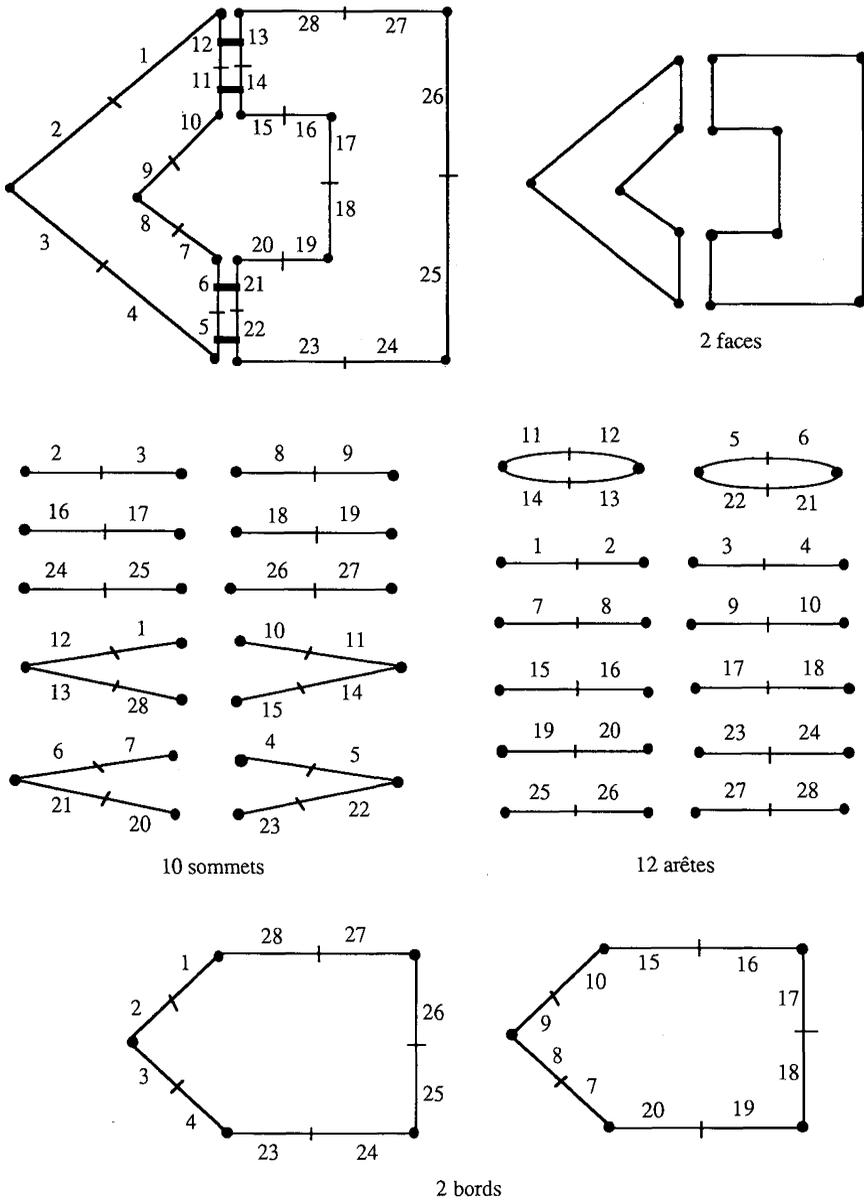


Figure 2.4.

– la 1- G -carte $CF = (B, \alpha_0, \alpha_1)$ est appelée 1- G -carte des faces; soit $b \in B$:

● la composante connexe $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(b)$ est appelée face de G ; à chaque face de la subdivision modélisée par G correspond une composante connexe de CF , et réciproquement.

– la 1- G -carte $CA = (B, \alpha_0, \alpha_2)$ est appelée 1- G -carte des arêtes; soit $b \in B$:

● la composante connexe $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(b)$ est appelée arête de G ; à chaque arête de la subdivision modélisée par G correspond une composante connexe de CA , et réciproquement (à noter que CA est composée d'orbites de longueur 2 ou 4, $\alpha_2 \circ \alpha_0$ étant une involution).

– la 1- G -carte $CS = (B, \alpha_1, \alpha_2)$ est appelée 1- G -carte des sommets; soit $b \in B$:

● la composante connexe $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(b)$ est appelée sommet de G ; à chaque sommet de la subdivision modélisée par G correspond une composante connexe de CS , et réciproquement.

Soit $b \in B$; si $\alpha_2(b) = b$, alors b est dit libre, sinon b est dit lié. Soit $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(b)$, une arête de G ; comme $\alpha_2 \circ \alpha_0$ est une involution, alors b et $\alpha_0(b)$ sont, soit tous deux liés, soit tous deux libres [en effet, si $\alpha_2(b) = b$, alors $\alpha_2(\alpha_0(b)) = \alpha_2 \circ \alpha_0(b) = \alpha_0 \circ \alpha_2(b) = \alpha_0(\alpha_2(b)) = \alpha_0(b)$]. Alors toute arête $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(b)$ est dite libre (resp. liée) si et seulement si b est libre (resp. b est lié). En d'autres termes, l'ensemble des brins libres est fermé par α_0 .

La frontière de G est alors définie comme l'ensemble des arêtes libres de G , ou, plus précisément, par la 1- G -carte $BG = (B', \alpha'_0, \alpha'_1)$, appelée 1- G -carte des bords de G , telle que :

– $B' = \{b \in B / \alpha_2(b) = b\}$ = ensemble des brins libres ;

– α'_0 est la restriction de α_0 à B' ($\forall b \in B', \alpha'_0(b) = \alpha_0(b)$) ;

– α'_1 est défini par : soit $b \in B'$; alors il existe exactement un brin $b' \in B'$, tel que b et b' sont distincts, et incidents au même sommet de G (α_1 étant une involution sans points fixes, et α_2 une involution : cf fig. 2.4); alors $\alpha'_1(b) = b'$, et $\alpha'_1(b') = b$; α'_1 est donc définie formellement par :

$$\alpha'_1 = \{ \{b, b'\} \in B'^2 / b \neq b', \text{ et } b' \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(b) \}.$$

Toute composante connexe de la 1- G -carte BG est appelée bord de G ; si $B' = \emptyset$ alors G est dite fermée, ou sans bords (toutes les arêtes de G sont liées), sinon G est dite ouverte, ou à bords. α'_0 et α'_1 étant des involutions sans points fixes, tout bord de G est un cycle élémentaire simple d'arêtes libres de G .

2.1.3. Caractéristiques associées aux 2-G-cartes

Nous définissons maintenant pour les 2-G-cartes les analogues des caractéristiques associées aux subdivisions de surfaces topologiques. Ces caractéristiques permettent d'opérer une classification des 2-G-cartes en fonction de la classification des subdivisions de surfaces. Soit une 2-G-carte connexe $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$; on associe à G les entiers :

- $b(G) =$ nombre de bords de G ;
- $c(G) =$ caractéristique d'Euler de G , définie par :

$$c(G) = (z(\alpha_1 \circ \alpha_0) + z(\alpha_2 \circ \alpha_1) + z(\alpha_0 \circ \alpha_2) - |B|)/2 \quad \text{avec } |B| = \text{cardinal de } B;$$

- définition : G est *orientable* si et seulement si la subdivision dont la topologie est définie par G est orientable (cf. paragraphe 2.3 pour le calcul de l'orientabilité d'une 2-G-carte). Alors :

$q(G)$ est le *coefficient d'orientabilité* de G , défini par :

- si G est orientable, alors $q(G) = 0$;
- sinon, si $b(G) + c(G)$ est impair, alors $q(G) = 1$;
- sinon, $q(G) = 2$.

- $g(G)$ est le *genre* de G , défini par :

$$g(G) = 1 - (c(G) + b(G) + q(G))/2.$$

2.2. 2-cartes

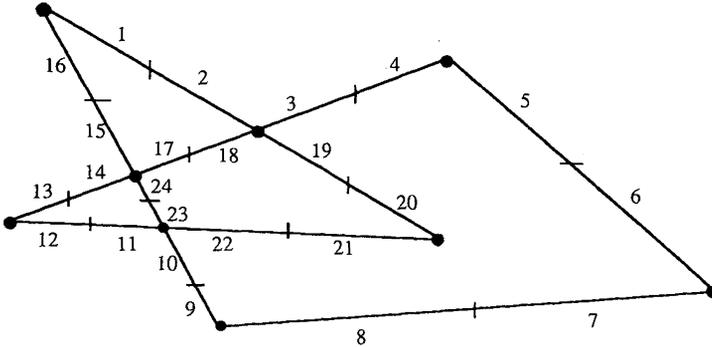
Nous rappelons ici la définition combinatoire des cartes topologiques de dimension 2, ou 2-carte (cf. [11], [14], [6]).

DÉFINITION : Une 2-carte C est définie par un triplet (B, α_0, α_1) , tel que :

- B est un ensemble fini, non vide, dont les éléments sont appelés brins;
- α_0 et α_1 sont des bijections sur B :
- α_0 est une involution;
- α_1 est une permutation sur B .

La notion de carte définie ici est plus large que la notion classique, où α_0 est une involution sans points fixes (cf. 2.3.1 et le rapport entre 2-carte et 2-G-carte).

Soit b , un brin de B : l'orbite $\langle \alpha_0 \rangle(b)$ est appelée *arête*; l'orbite $\langle \alpha_1 \rangle(b)$ est appelée *sommet*; $\alpha_0(b)$ est appelé *brin opposé* de b . L'orbite $\langle \alpha_1 \circ \alpha_0 \rangle(b)$ est appelée *face rétrograde* de la 2-carte; l'orbite $\langle \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \rangle(b)$ est appelée



$$\alpha_0 = (1, 2) (3, 4) (5, 6) (7, 8) (9, 10) (11, 12) \\ (13, 14) (15, 16) (17, 18) (19, 20) (21, 22) (23, 24)$$

$$\alpha_1 = (1, 16) (2, 3, 19, 18) (4, 5) (6, 7) (8, 9) \\ (20, 21) (10, 11, 23, 22) (12, 13) (14, 15, 17, 24)$$

$$\alpha_0\alpha_1 = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15) (2, 16, 17) \\ (4, 19, 21, 10, 8, 6) (12, 23, 14) (18, 24, 22, 20)$$

$$\alpha_0\alpha_1^{-1} = (1, 18, 15) (2, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4) \\ (3, 5, 7, 9, 22, 20) (11, 13, 24) (17, 19, 21, 23)$$

Figure 2.5.

face directe de la 2-carte (fig. 2.5). La face F incidente à b est alors définie comme un couple composé de la face rétrograde incidente à b et de la face directe incidente au brin opposé : $F = (\langle \alpha_1 \circ \alpha_0 \rangle (b), \langle \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \rangle (\alpha_0(b)))$.

L'ensemble S des sommets et U des arêtes définit un graphe $G(C) = (S, U)$, dit *graphe sous-jacent* à la 2-carte C . Inversement, il est possible de déduire une 2-carte d'un graphe, dès lors que l'on se donne une permutation circulaire sur les demi-arêtes incidentes à chaque sommet. De ce fait, la plupart des définitions et propriétés des graphes sont étendues aux 2-cartes (cf. [4]) : connexité, chemins, point d'articulation...

THÉORÈME : *A toute 2-carte connexe correspond la topologie d'une subdivision d'une surface orientable sans bords, et réciproquement, à la topologie de toute subdivision de toute surface orientable sans bords correspond une 2-carte connexe.*

DÉFINITIONS :

– *genre* : soit $C=(B, \alpha_0, \alpha_1)$, une 2-carte connexe; à cette 2-carte est associé un entier $g(C)$, appelé *genre* de la 2-carte, défini par :

$$g(C) = 1 - (z(\alpha_0) + z(\alpha_1) + z(\alpha_1 \circ \alpha_0) - |B|)/2, \text{ avec : } |B| = \text{cardinal de } B.$$

– *2-carte inverse* : soit $C=(B, \alpha_0, \alpha_1)$, une 2-carte; la 2-carte $C^{-1}=(B, \alpha_0, \alpha_1^{-1})$ est appelée *2-carte inverse* de C . Intuitivement, C^{-1} définit l'orientation inverse de celle définie par C (voir 2.3.1).

2.3. Compléments

2.3.1. Orientabilité

DÉFINITION : Soit $G=(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, une 2-G-carte : la 2-carte

$$CV=(B, \alpha_0 \circ \alpha_2, \alpha_1 \circ \alpha_2)$$

est appelée *2-carte des volumes* de G .

Un théorème fondamental est le suivant, qui explicite le rapport entre les notions de 2-carte et de 2-G-carte (cf. fig. 2.6) :

THÉORÈME : Soit $G=(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, une 2-G-carte connexe, et soit CV , la 2-carte des volumes déduite de G . CV comporte au plus deux composantes

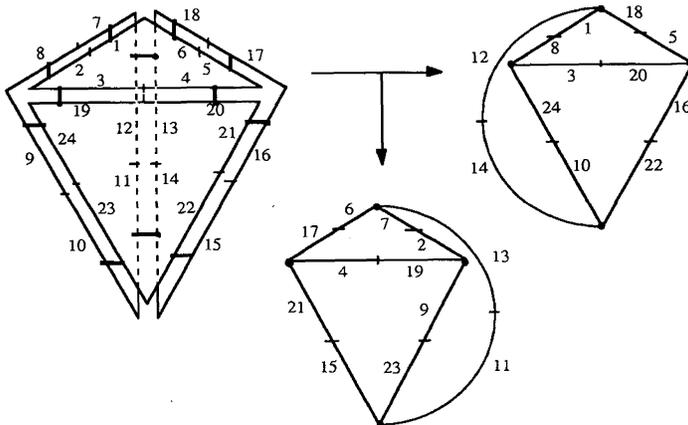


Figure 2.6. – Une 2-G-carte orientable et les composantes connexes de la 2-carte des volumes.

connexes. Si G est une 2-G-carte ouverte, alors CV comporte exactement une composante connexe.

Si G est une 2- G -carte fermée, alors G est orientable si et seulement si la 2-carte des volumes déduite de G comporte deux composantes connexes v_1 et v_2 . Dans ce cas, v_1 est isomorphe à la 2-carte inverse de v_2 .

Réciproquement, étant données deux 2-cartes connexes C_1 et C_2 , telles que C_1 est isomorphe à la 2-carte inverse de C_2 , on peut construire une 2- G -carte orientable sans bords G , telle que les deux composantes connexes de la 2-carte des volumes déduite de G sont définies par C_1 et C_2 .

Preuve : Cf. [25].

Remarque : La 2-carte des volumes de toute 2- G -carte fermée non orientable comporte exactement une composante connexe.

Soit une 2- G -carte G orientable sans bords, et soient v_1 et v_2 , les deux composantes connexes de la 2-carte des volumes déduite de G . Il est à noter que l'on a la relation suivante entre les genres de G , v_1 et v_2 :

$$g(G) = g(v_1) = g(v_2).$$

Soient $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, une 2- G -carte ouverte, et $BG = (B^g, \alpha_0^g, \alpha_1^g)$, la 2- G -carte des bords de G ; soit $BG' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1)$, une 2- G -carte telle que BG est isomorphe à BG' (avec B et B' disjoints), et soit φ , un isomorphisme faisant correspondre BG' à BG . Nous appellerons *fermeture* de G , la 2- G -carte $G'' = (B'', \alpha''_0, \alpha''_1, \alpha''_2)$, déduite de G par :

- $B'' = B \cup B'$;
- $\alpha''_0 = \alpha_0 \alpha'_0$ ($\forall b \in B, \alpha''_0(b) = \alpha_0(b)$; $\forall b \in B', \alpha''_0(b) = \alpha'_0(b)$);
- $\alpha''_1 = \alpha_1 \alpha'_1$;
- α''_2 : $\forall b \in B - B^g, \alpha''_2(b) = \alpha_2(b)$; $\forall b \in B^g, \alpha''_2(b) = \varphi(b)$; $\forall b \in B', \alpha''_2(b) = \varphi^{-1}(b)$.

On vérifie aisément que G'' est une 2- G -carte fermée. Soient S et S'' , les subdivisions définies respectivement par G et par G'' ; alors S'' est la fermeture de S (au sens défini en 1.1). En conséquence, G est orientable si et seulement si sa fermeture G'' est orientable.

Par extension, si G est une 2- G -carte fermée, la fermeture de G est définie comme étant égale à G (cf. aussi 3.2 pour une autre définition de la fermeture d'une 2- G -carte).

Conséquence : Soit G , une 2- G -carte, et S , la subdivision définie par G ; il est possible de définir la surface topologique $ST_{b, a, g}$ ($0 \leq g \leq 2$) à laquelle appartient S (classification *statique*).

2.3.2. Dualité

Soit $C = (B, \alpha_0, \alpha_1)$, une 1- G -carte fermée. La 1- G -carte $C^* = (B, \alpha_1, \alpha_0)$, déduite de C , est appelée 1- G -Carte *duale* de C . On remarque que :

- les sommets et les arêtes de C^* sont respectivement les arêtes et les sommets de C ;

- la 1- G -carte duale de C^* est C ;

De même, soit $C = (B, \alpha_0, \alpha_1)$, une 2-carte. La 2-carte $C^* = (B, \alpha_0, \alpha_1 \circ \alpha_0)$, déduite de C , est appelée 2-carte *duale* de C . Alors

- les sommets, les arêtes et les faces rétrogrades de C^* sont respectivement les faces rétrogrades, les arêtes et les sommets de C ;

- la 2-carte duale de C^* est C ;

- le genre de C^* est égal au genre de C .

Enfin, étant donnée une 2- G -carte fermée $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, on définit la 2- G -carte G^* , *duale* de G , par : $G^* = (B, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$; alors :

- les 1- G -carte des sommets, des arêtes et des faces de G^* sont les duales des 1- G -cartes des faces, des arêtes et des sommets de G (respectivement);

- la 2-carte des volumes de G^* est la duale de la 2-carte des volumes de G ;

- $b(G^*) = b(G) = 0$, $q(G^*) = q(G)$, $g(G^*) = g(G)$ (en particulier, G^* est orientable si et seulement si G est orientable).

2.4. Structures de données

Des structures de données peuvent se déduire aisément des définitions des 2-cartes et des 2- G -cartes : structures de données avec pointeurs, relationnelles... (cf. [17] et [9]). En principe, seuls des objets de type 2- G -carte (ou 2-carte), composante connexe et brin sont nécessaires pour la représentation des 2- G -cartes (ou des 2-cartes); les involutions $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont symbolisées par exemple par des pointeurs de brin à brin.

Mais, en particulier pour la modélisation de surfaces et de solides par leurs bords, d'autres objets (sommet, arête, face, bord) sont nécessaires, principalement pour les informations qui leur sont associées, par exemple :

- des informations de nature géométrique peuvent être associées aux sommets (position des sommets dans l'espace tridimensionnel usuel);

- des informations de nature photométrique peuvent être associées aux faces (aspect des faces).

L'un des intérêts majeurs présentés par le formalisme des 2- G -cartes et des 2-cartes est que les *contraintes d'intégrité*, pour qu'une telle structure de données définisse effectivement la topologie d'une subdivision de surface, se *déduisent directement* de la définition des 2- G -cartes et des 2-cartes (cf. [17] et [18]).

3. OPÉRATIONS SUR LES 2- G -CARTES

Nous définissons dans cette section des opérations permettant de *construire* toute 2- G -carte. Ces opérations, ainsi que les opérations inverses, forment un ensemble d'*opérations de base* permettant de définir toute 2- G -carte, donc de définir la topologie de toute subdivision de toute surface orientable ou non orientable, ouverte ou fermée. De ce fait, cet ensemble d'opérations permet aussi de définir toute 2-carte connexe (par définition de 2- G -cartes orientables fermées, et en considérant les 2-cartes des volumes de ces 2- G -cartes. Voir aussi [8], [9] et [10] où d'autres opérations de base ont été définies).

Ces opérations sont, dans leur principe, similaires aux opérations permettant de construire une subdivision (cf. section 1). Les variations des caractéristiques associées à une 2- G -carte, lors d'opérations qui lui sont appliquées, seront précisées, mais non démontrées (les démonstrations ne posent en effet aucune difficulté). Ces variations permettent d'effectuer une classification *dynamique* des 2- G -cartes ainsi définies.

3.1. « Couture » de deux 2- G -cartes

Soient $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $G' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$, deux 2- G -cartes ouvertes, et soient b_1, b_2, b_3 et b_4 , tels que :

- B et B' sont disjoints;
- $\{b_1, b_2\}$ est une arête libre de G , c'est-à-dire :

$$b_1 \in B, \alpha_2(b_1) = b_2 \text{ et } b_2 = \alpha_0(b_1) \quad (\text{et donc } \alpha_2(b_2) = b_2);$$

- $\{b_3, b_4\}$ est une arête libre de G' .

Soit alors $G'' = (B'', \alpha''_0, \alpha''_1, \alpha''_2)$, définie par « couture » de $\{b_1, b_2\}$ et $\{b_3, b_4\}$ en une arête :

- $B'' = B \cup B'$;
- $\alpha''_0 = \alpha_0 \alpha'_0$; $\alpha''_1 = \alpha_1 \alpha'_1$;

– $\alpha_2'' = \alpha_2 \alpha_2'(b_1, b_3)(b_2, b_4)$ c'est-à-dire $\forall b \in B - \{b_1, b_2\}, \alpha_2''(b) = \alpha_2(b); \forall b \in B' - \{b_3, b_4\}, \alpha_2''(b) = \alpha_2'(b); \alpha_2''(b_1) = b_3, \alpha_2''(b_3) = b_1; \alpha_2''(b_2) = b_4, \alpha_2''(b_4) = b_2.$

On vérifie aisément que G'' est une 2- G -carte. Les caractéristiques associées à G'' varient suivant que les arêtes $\{b_1, b_2\}$ et $\{b_3, b_4\}$ sont ou non des boucles (étant donnés deux brins b et b' d'une 2- G -carte G , nous noterons : $b =_s b'$ si b et b' sont incidents au même sommet de G , et $b \neq_s b'$ sinon). Soient S, S' et S'' , les subdivisions associées respectivement à G, G' et G'' . Soient $ST_{b,q,g}$ et $ST_{b',q',g'}$ ($0 \leq q, q' \leq 2$), les surfaces topologiques auxquelles appartiennent respectivement S et S' .

3.1.1. $b_1 \neq_s b_2, b_3 \neq_s b_4$ (fig. 3.1.1)

Si $q + q' \leq 2$, S'' appartient à $ST_{b+b'-1, q+q', g+g'}$, sinon S'' appartient à $ST_{b+b'-1, q+q'-2, g+g'+1}$. Si G' définit une face ($\alpha_2' =$ identité sur B'), alors l'opération est similaire à $+_f$.

3.1.2. $b_1 =_s b_2, b_3 \neq_s b_4$ (ou si $b_1 \neq_s b_2, b_3 =_s b_4$: fig. 3.1.2)

Même résultat qu'en 3.1.1.

3.1.3. $b_1 =_s b_2, b_3 =_s b_4$

On a (fig. 3.1.3) : si $q + q' \leq 2$, S'' appartient à $ST_{b+b'-2, q+q', g+g'}$, sinon S'' appartient à $ST_{b+b'-2, q+q'-2, g+g'+1}$.

3.2. Repliement d'une arête sur elle-même

Soit une 2- G -carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, et deux brins b_1, b_2 de B , tels que $\{b_1, b_2\}$ est une arête libre de G . Soit alors $G' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$, déduite de G , telle que :

- $B' = B, \alpha'_0 = \alpha_0, \alpha'_1 = \alpha_1;$
- $\alpha'_2 = \alpha_2(b_1, b_2);$

On vérifie sans difficultés que G' est une 2- G -carte (à noter que b_1 et b_2 sont des points fixes pour $\alpha_2 \circ \alpha_0$). Soient alors S et S' , les subdivisions associées respectivement à G et G' .

3.2.1. $b_1 \neq_s b_2$ (fig. 3.2.1)

Les subdivisions S et S' appartiennent à la même surface topologique (l'opération est très proche de l'opération $+_r$).

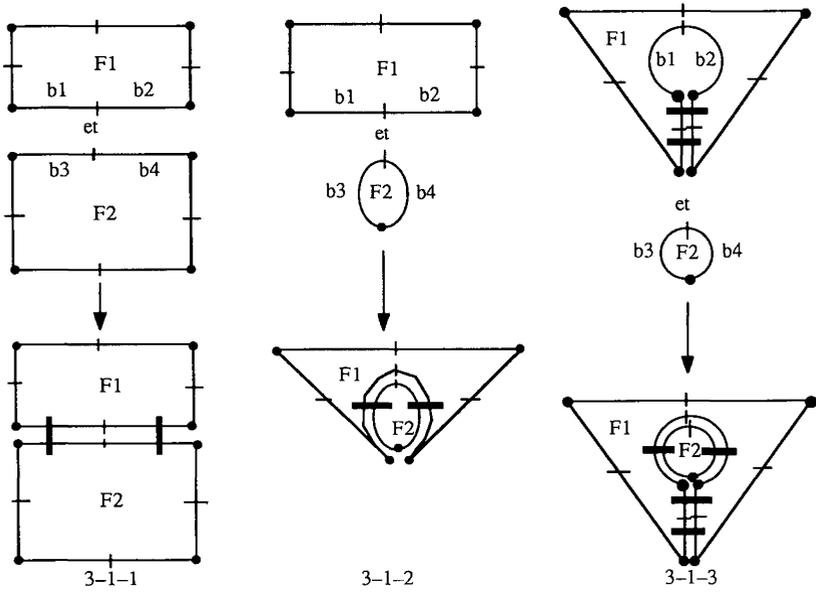


Figure 3.1.

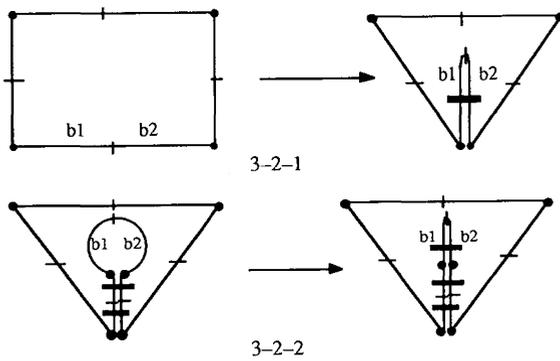


Figure 3.2.

3.2.2. $b_1 = {}_s b_2$ (fig. 3.2.2)

Si S appartient à la surface topologique $ST_{b,q,g}$, alors S' appartient à $ST_{b-1,q,g}$ (l'opération est très proche de l'opération $+_0$).

DÉFINITION : Soit $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, une 2- G -carte, et soit

$$BG = (B', \alpha'_0, \alpha'_1),$$

la 1- G -carte des bords déduites de G . Nous appellerons A -fermeture de G la 2- G -carte $G'' = (B'', \alpha''_0, \alpha''_1, \alpha''_2)$, définie par : si G est fermée, alors $G'' = G$, sinon :

- $B'' = B, \alpha''_0 = \alpha_0, \alpha''_1 = \alpha_1$;
- $\forall b \in B - B', \alpha''_2(b) = \alpha_2(b); \forall b \in B', \alpha''_2(b) = \alpha_0(b)$ (G'' est déduite de G par pliage de chaque arête de G sur elle-même).

On peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME : Une 2- G -carte est orientable si et seulement si sa A -fermeture est orientable.

Remarque : La 2-carte des volumes de la A -fermeture de G se déduit aisément de la 2-carte des volumes de G (on a en effet : $\forall b \in B', \alpha_2 \circ \alpha_0(b) = \alpha_0(b)$, et $\alpha'_2 \circ \alpha'_0(b) = b$). Le calcul de l'orientabilité d'une 2- G -carte G est donc aisément réalisable en utilisant pour cela la A -fermeture de G .

3.3. Identification de deux arêtes libres en une arête

Soit la 2- G -carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, et soient b_1, b_2, b_3 et b_4 , quatre brins de B , tels que $\{b_1, b_2\}$ et $\{b_3, b_4\}$ sont deux arêtes libres de G . On définit alors la 2- G -carte $G' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ par :

- $B' = B, \alpha'_0 = \alpha_0, \alpha'_1 = \alpha_1$;
- $\alpha'_2 = \alpha_2(b_1, b_3)(b_2, b_4)$.

Les caractéristiques associées à G' varient suivant que b_1, b_2, b_3 et b_4 sont ou non incidents aux mêmes sommets, et qu'ils sont ou non incidents aux mêmes bords (nous noterons, pour deux brins b et b' d'une 2- G -carte G , incidents à un même bord de G : $b = {}_b b'$; à noter que pour tout brin b , on a : $b = {}_b \alpha_0(b)$). Soient S et S' , les subdivisions associées respectivement à G et G' , et soit $ST_{b,q,g}(0 \leq q \leq 2)$, la surface topologique à laquelle appartient S .

3.3.1. $b_1 =_s b_2, b_3 =_s b_4$, donc $b_1 \neq_b b_3$ (fig. 3.3.1)

Si G est orientable et si G' est non orientable, alors S' appartient à $ST_{b-2, 2, g}$ sinon S' appartient à $ST_{b-2, q, g+1}$ (cette opération est très proche de l'application simultanée des opérations $+_b$ et $+_0$, ou $+_{ib}$ et $+_0$).

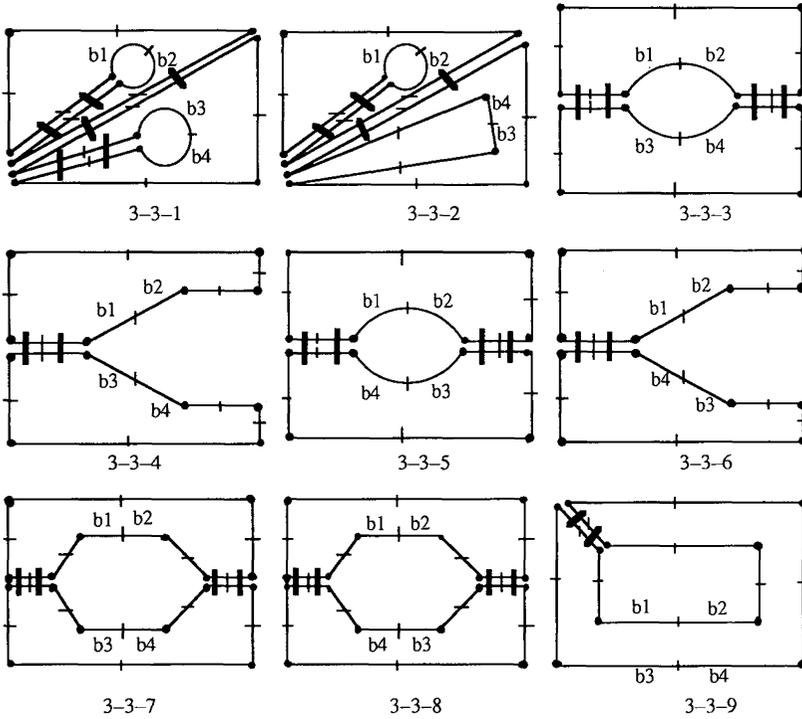


Figure 3.3.

3.3.2. $b_1 =_s b_2, b_3 \neq_s b_4$, donc $b_1 \neq_b b_3$ (ou si $b_1 \neq_s b_2, b_3 =_s b_4$: fig. 3.3.2)

Si G est orientable et si G' est non orientable, alors S' appartient à $ST_{b-1, 2, g}$ sinon S' appartient à $ST_{b-1, q, g+1}$ (opération très proche de l'opération $+_b$ ou $+_{ib}$).

3.3.3. $b_1 =_s b_3, b_2 =_s b_4$, donc $b_1 =_b b_3$ (fig. 3.3.3)

S' appartient à $ST_{b-1, q, g}$ (l'opération est similaire à $+_0$).

3.3.4. $b_1 =_s b_3, b_2 \neq_s b_4$, donc $b_1 =_b b_3$ (ou si $b_1 \neq_s b_3, b_2 =_s b_4$: fig. 3.3.4)

S' et S appartiennent à la même surface topologique (l'opération est similaire à $+_r$).

3.3.5. $b_1 =_s b_4, b_2 =_s b_3$, donc $b_1 =_b b_3$ (fig. 3.3.5)

Si $q < 2$, alors S' appartient à $ST_{b-1, q+1, g}$, sinon S' appartient à $ST_{b-1, q-1, g+1}$ (cette opération est très proche de l'application simultanée des opérations $+_{ie}$ et $+_o$).

3.3.6. $b_1 =_s b_4, b_2 \neq_s b_3$, donc $b_1 =_b b_3$ (ou si $b_1 \neq_s b_4, b_2 =_s b_3$: fig. 3.3.6)

Si $q < 2$, alors S' appartient à $ST_{b, q+1, g}$, sinon S' appartient à $ST_{b, q-1, g+1}$ (opération très proche de $+_{ie}$).

3.3.7. b_1, b_2, b_3 et b_4 sont incidents à 4 sommets distincts deux à deux, et $b_1 =_b b_3$

Soit alors $BG = (B^g, \alpha_0^g, \alpha_1^g)$, la 1- G -carte des bords déduite de G ;

si $b_3 \notin \langle \alpha_1^g \circ \alpha_0^g \rangle (b_1)$: alors S' appartient à $ST_{b+1, q, g}$ (l'opération est similaire à $+_e$: fig. 3.3.7);

si $b_3 \in \langle \alpha_1^g \circ \alpha_0^g \rangle (b_1)$: si $q < 2$, alors S' appartient à $ST_{b, q+1, g}$, sinon S' appartient à $ST_{b, q-1, g+1}$ l'opération est similaire à $+_{ie}$: fig. 3.3.8).

3.3.8. $b_1 \neq_s b_2, b_3 \neq_s b_4$, et $b_1 \neq_b b_3$ (fig. 3.3.9)

Si G est orientable et si G' est non orientable, alors S' appartient à $ST_{b-1, 2, g}$ (l'opération est similaire à $+_{ib}$), sinon S' appartient à $ST_{b-1, q, g+1}$ (similaire à $+_b$).

4. CONCLUSION

Nous avons présenté ici les notions de :

- 2- G -carte, permettant de modéliser la topologie de toute subdivision de surface ouverte ou fermée, orientable ou non orientable;
- 2-carte, permettant de modéliser la topologie de toute subdivision de surface orientable fermée.

Le principal intérêt des 2- G -cartes et des 2-cartes est, à notre avis, de donner une définition précise, rigoureuse et compacte de la topologie de toutes subdivisions de toutes surfaces. D'autre part, les notions de 2- G -carte et de 2-carte définissent, à partir d'un type *unique* d'éléments (brins) les notions de sommet, arête, face et subdivision de surface, de telle manière que :

- la définition de structures de données pour la représentation de 2-cartes ou de 2- G -cartes (et donc pour la modélisation de subdivisions de surfaces et

la modélisation de solides par leurs bords) se déduit directement de la définition des 2-cartes et 2- G -cartes;

– les contraintes de cohérence que doivent vérifier ces modèles se déduisent directement aussi de la définition des 2-cartes et 2- G -cartes, ce qui permet de définir, de réaliser et de contrôler aisément des opérations applicables aux 2-cartes et aux 2- G -cartes.

Des caractéristiques sont associées aux 2- G -cartes et aux 2-cartes (nombre de bords, caractéristique d'Euler, coefficient d'orientabilité, genre). Ces caractéristiques permettent de définir la *surface topologique* à laquelle appartient la subdivision dont la topologie est modélisée par une 2- G -carte ou une 2-carte. De plus, ces caractéristiques sont directement calculables sur les 2- G -cartes et 2-cartes.

Nous avons défini un ensemble d'opérations de base applicables aux 2- G -cartes (opérations définies en section 3, et leurs inverses), permettant de construire toute 2- G -carte (et, en conséquence, toute 2-carte). A chaque opération correspond une variation des caractéristiques associées aux 2- G -cartes, permettant d'effectuer la classification de la 2- G -carte résultat de l'opération, en fonction de la classification de la 2- G -carte initiale.

Un des principaux développements de cette étude consiste à *étendre* cet ensemble d'opérations de base par des opérations de plus haut niveau (par exemple : « éclatement » d'un sommet en une face, d'une face en plusieurs faces, etc., cf. opérations eulériennes définies en [20], [1], [25] entre autres), afin de permettre une manipulation plus aisée des 2- G -cartes (et des 2-cartes).

Enfin, il semble souhaitable d'effectuer une étude comparative *approfondie* des différentes structures de données utilisées en modélisation de subdivisions de surfaces et modélisation de solides par leurs bords, en particulier :

- 2-cartes, structure « windged-edge » et structures dérivées, graphe d'adjacence de faces, ... (modélisation de subdivisions de surfaces orientables);
- 2- G -cartes, structure « quad-edge » (modélisation de subdivisions de surfaces orientables ou non orientables).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ici Jean Françon, dont les encouragements et les conseils se sont révélés très utiles pour la rédaction de cet article. Mes remerciements à Jean-Pierre Reveillés, pour la lecture de « Surfaces ». Remerciements particuliers à Robert Cori, pour sa lecture approfondie des premières versions de ce papier, et pour ses très profitables remarques et suggestions. Merci enfin à Michaël pour son inébranlable sérénité.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. ANSALDI, L. DE FLORIANI et B. FALCIDIENO, Geometric Modeling of Solid Objects by Using a Face Adjacency Graph Representation, *Computer Graphics*, 1985, 19, n° 3, p. 131-139 (Siggraph'85).
2. D. ARQUÈS et P. KOCH, Modélisation de solides par les pavages, *Proceedings of Pixim'89*, Paris, France, 25-29 septembre 1989, p. 47-61 (éditions Hermès).
3. B. BAUMGART, A Polyhedron Representation for Computer Vision, *AFIPS Nat. Conf. Proc.*, 1975, 44, p. 589-596.
4. C. BERGE, Graphes et hypergraphes, *Dunod*, Paris, 1970.
5. E. BRISSON, Representing Geometric Structures in d Dimensions: Topology and order, *Proceedings of the 5th A.C.M. Symposium on Computational Geometry*, Saarbrücken, R.F.A., 5-7 juin 1989, p. 218-227.
6. R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque*, n° 27, 1975.
7. D. DOBKIN et M. LASZLO, Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions, *Proceedings of the 3th A.C.M. Symposium on Computational Geometry*, Waterloo, Canada, 8-10 juin 1987, p. 86-99.
8. J.-F. DUFOURD, Spécification Progressive d'une Algèbre pour Manipuler les Cartes Topologiques Orientées, *Proceedings of Pixim'88*, Paris, France, 24-28 octobre 1988, p. 61-80 (éditions Hermès).
9. J.-F. DUFOURD, C. GROSS et J.-C. SPEHNER, A Digitisation Algorithm for the Entry of Planar Maps, *Proceedings of Computer Graphics International'89*, Leeds, U.K., 1989, Springer-Verlag.
10. J.-F. DUFOURD, A Topological Map-Based Kernel for Polyhedron Modellers: Algebraic Specification and Logic Prototyping, *Proceedings of Eurographics'89*, Hambourg, R.F.A., 4-8 septembre 1989, p. 301-312, North-Holland.
11. J. EDMONDS, A Combinatorial Representation for Polyhedral Surfaces, *Notices Amer. Math. Soc.*, n° 7, 1970.
12. H.-B. GRIFFITHS, *Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2^e édition, 1981, édition française : Cedec, 1977.
13. L. GUIBAS et J. STOLFI, Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoï Diagrams, *A.C.M. Transactions on Graphics*, 1985, 4, n° 2, p. 74-123.
14. A. JACQUE, Constellations et graphes topologiques, *Colloque Math. Soc. Janos Bolyai*, North-Holland, 1970, p. 657-672.
15. L. JAMES, Maps and Hypermaps: Operations and Symmetry, *PhD thesis*, Department of Mathematics, University of Southampton, U.K., August 1985.
16. P. LIENHARDT, Extension of the Notion of Map and Subdivisions of a Three-Dimensional Space, *Lecture Notes in Computer Science*, n° 294, p. 301-311, *Proceedings of the 5th Symposium on the Theoretical Aspects of Computer Science*, february 1988, Bordeaux, France.
17. P. LIENHARDT, Subdivisions de surfaces, cartes et S-V-cartes, Research Report R88-4, Department of Computer Science, University Louis Pasteur, Strasbourg, France.
18. P. LIENHARDT, Subdivisions of Surfaces and Generalized Maps, *Proceedings of Eurographics' 89*, Hamburg, R.F.A., 4-8 septembre 1989, p. 439-452, North-Holland.

19. P. LIENHARDT, Subdivisions of N-Dimensional Spaces and N-Dimensional Generalized Maps, *Proceedings of the 5th A.C.M. Symposium on Computational Geometry*, Saarbrücken, R.F.A., 5-7 juin 1989, p. 228-236.
20. M. MÄNTYLÄ, Computational Topology: a Study of Topological Manipulations and Interrogations in Computer Graphics and Geometric Modeling, *Acta Polytechnica Scandinavia*, n° 37, 1983, Helsinki.
21. L. PUTNAM et P. SUBRAHMANYAM, Boolean Operations on N-Dimensional Objects, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Juin 1986, p. 43-51.
22. A. REQUICHA, Representations for Rigid Solids: Theory, Methods and Systems, *Computing Surveys*, 1980, 12, n° 4, p. 437-464.
23. H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea, New York, 1947.
24. J.-C. SPEHNER, *Merging in Maps and Paving*, Research Report n° 48, Laboratoire de Mathématiques et Informatique, Université de Haute-Alsace, Mulhouse, France.
25. W. TUTTE, *Graph Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1984.
26. K. WEILER, Edge-based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments, *Computer Graphics and Applications*, 1985, 5, n° 1, p. 21-40.