CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

R. GUITART
J. RIGUET

# Enveloppe karoubienne de catégories de Kleisli

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 33, nº 3 (1992), p. 261-266
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_261_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES*

*VOLUME* XXXIII
*3ème trimestre 1992*

# Enveloppe Karoubienne de Catégories de Kleisli

R. Guitart et J. Riguet[1]

ABSTRACT : We show that the karoubian envelope of the category of correspondances is equivalent to the category of sup-compatible mappings between complete completly distributive lattices.

On sait que l'enveloppe karoubienne permet de ramener les notions semi-fonctorielles à des notions fonctorielles, et en particulier produit des catégories cartésiennes fermées à partir de catégories faiblement cartésiennes fermées, ce qui est utilisé en théorie des domaines pour obtenir des modèles de la logique linéaire. Voir [2], [3].

On sait aussi que la modélisation et la manipulation algébrique de systèmes informatiques fait appel à des correspondances de Galois analysables et généralisables en termes de transversalité de correspondances difonctionnelles. Voir [9].

Enfin on sait que Raney a établi un lien étroit entre les "tight" correspondances de Galois et les treillis complètement distributifs, qui sont des treillis continus particuliers. Voir [5, 6, 7] et [1].

Le lien entre ces divers aspects est élucidé ici par la description concrète de l'enveloppe karoubienne de la catégorie des correspondances $\mathcal{C}or \cong Kl\mathcal{P}$.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ on appelle *enveloppe karoubienne* de $\mathcal{C}$ (voir [4]) et on note $K\mathcal{C}$ ou $K(\mathcal{C})$ la catégorie ayant pour objets les couples $(C, e)$ où $e : C \longrightarrow C \in ar\mathcal{C}$ est idempotent (i.e. $e.e = e$), et pour morphismes de $(C_1, e_1)$ vers $(C_2, e_2)$ les $f : C_1 \longrightarrow C_2 \in ar\mathcal{C}$ tels que $f.e_1 = f = e_2.f$. Un objet $(C, e)$ de $K\mathcal{C}$ est dit *scindable* s'il existe, dans $\mathcal{C}$, $r : C \longrightarrow I$ et $s : I \longrightarrow C$

[1] Paris 7 et Paris 5

tels que $s.r = e$, et $r.s = Id_I$. Alors $I \cong ker(Id_C, e) \cong coker(Id_C, e)$ est noté $e[C]$. On note $K_{sc}\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ ayant pour objets les objets scindables de $K\mathcal{C}$. Le foncteur canonique $can : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{KC}$ qui à $C$ associe $(C, Id_C)$ est à valeurs dans $K_{sc}\mathcal{C}$ et détermine une équivalence entre $\mathcal{C}$ et $K_{sc}\mathcal{C}$, mais en général ces deux catégories ne sont pas isomorphes. En général $K\mathcal{C}$ n'est ni complète ni cocomplète, mais dans $K\mathcal{C}$ tout idempotent se scinde (i.e. tout objet de $K(K\mathcal{C})$ est scindable), et si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur vers une catégorie $\mathcal{C}'$ où les idempotents se scindent, alors F se factorise à travers $can$ en un unique $\overline{F} : K\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ donné par $\overline{F}(C, e) = F(e)[F(C)]$. De plus, le foncteur $can$ est pleinement fidèle et co-pleinement fidèle, et donc préserve et reflète toutes les limites et colimites (voir [11]). Enfin, le plongement de Yoneda $yon : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ se factorise en $yon = kyon \circ can$ où $kyon : K\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est donné par $kyon(C, e) = Hom_{K\mathcal{C}}(can(\text{-}), (C, e))$, et $kyon$ identifie $K\mathcal{C}$ à la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ ayant pour objets les rétractions de représentables.

Etant donnée une monade $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ sur une catégorie $\mathcal{C}$, soit un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et deux transformations naturelles $\eta : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$ et $\mu : T^2 \longrightarrow T$ avec $\mu.\eta_T = \mu.T\eta = Id_T$ et $\mu.\mu_T = \mu.T\mu$, on appelle catégorie de *Kleisli* de $\mathcal{T}$ et on note $Kl\mathcal{T}$ ou $Kl(\mathcal{T})$ la catégorie ayant pour objets ceux de $\mathcal{C}$, et pour morphismes de $C_1$ vers $C_2$ les $f : C_1 \longrightarrow TC_2 \in ar\mathcal{C}$ (appelés *$\mathcal{T}$-relations*), et où le composé de $f$ avec $g : C_2 \longrightarrow TC_3$ est $\mu_{C_3}.Tg.f : C_1 \longrightarrow TC_3$.

On appelle catégorie d'*Eilenberg-Moore* de $\mathcal{T}$ et on note $EM(\mathcal{T})$ la catégorie ayant pour objets les $(C, \lambda)$ avec $C$ objet de $\mathcal{C}$ et $\lambda : TC \longrightarrow C \in ar\mathcal{C}$ vérifiant $\lambda.\eta_C = Id_C$ et $\lambda.T\lambda = \lambda.\mu_C$ (un tel objet est appelé *$\mathcal{T}$-algèbre* de support $C$ et de loi $\lambda$), et pour morphismes de $(C_1, \lambda_1)$ vers $(C_2, \lambda_2)$ les $f : C_1 \longrightarrow C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $\lambda_2.Tf = f.\lambda_1$. On note $\Phi : Kl(\mathcal{T}) \longrightarrow EM(\mathcal{T})$ le foncteur qui à C associe $\Phi(C) = (TC, \mu_C)$ (qui est la $\mathcal{T}$-algèbre libre engendrée par $C$), et qui à $f : C_1 \longrightarrow TC_2 \in ar\mathcal{C}$ morphisme de Kl(T) de $C_1$ vers $C_2$ associe $\Phi(f) = \mu_{C_2}.T(f) : TC_1 \longrightarrow TC_2$ morphisme de $\Phi(C_1)$ vers $\Phi(C_2)$. On désigne par $U_{\mathcal{T}} : EM(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'oubli qui à $(C, \lambda)$ associe $C$.

Un objet $(C, \lambda)$ de $EM(\mathcal{T})$ est dit *$U_{\mathcal{T}}$-projectif* si pour tout

$$g : (C_2, \lambda_2) \longrightarrow (C_1, \lambda_1)$$

morphisme de $EM(\mathcal{T})$ tel que $U_{\mathcal{T}}(g)$ admette une section (comme morphisme de $\mathcal{C}$), et pour tout $h : (C, \lambda) \longrightarrow (C_1, \lambda_1)$ morphisme de $EM(\mathcal{T})$, il existe

$k : (C, \lambda) \longrightarrow (C_2, \lambda_2)$ morphisme de $EM(\mathcal{T})$ tel que $h = g.k$. On désigne par $EM_{proj}(\mathcal{T})$ la sous-catégorie pleine de $EM(\mathcal{T})$ ayant pour objets les $U_{\mathcal{T}}$-projectifs.

**Proposition 1** *Soit $(C, \lambda)$ un objet de $EM(\mathcal{T})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(C, \lambda)$ est $U_{\mathcal{T}}$-projectif ;*

2. *Il existe un objet $X$ de $\mathcal{C}$ tel que $(C, \lambda)$ soit une rétraction dans $EM(\mathcal{T})$ de $\Phi(X)$, c'est-à-dire des morphismes dans $EM(\mathcal{T})$,*

$$t : (C, \lambda) \longrightarrow \Phi(X) \quad et \quad r : \Phi(X) \longrightarrow (C, \lambda)$$

   *tels que $r.t = Id_{(X,\lambda)}$ (et alors $\lambda = r.\mu_X.Tt$) ;*

3. *$(C, \lambda)$ est une rétraction dans $EM(\mathcal{T})$ de $\Phi(C)$ ;*

4. *Il existe $s : C \longrightarrow TC \in ar\mathcal{C}$ tel que $\lambda.s = Id_C$ et $s.\lambda = \mu_C.Ts$ (si on dispose de $(t, r)$ de 2- ci-dessus, alors $s = T(r).T(\eta_X).t$).*

**Proposition 2** *Soit $\mathcal{C}$ à idempotents scindables et $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ une monade sur $\mathcal{C}$ avec $T$ injectif. Alors $EM(\mathcal{T})$ est à idempotents scindables et $\overline{\Phi} : K(Kl(\mathcal{T})) \longrightarrow EM(\mathcal{T})$ défini par $\overline{\Phi}(C, e) = \Phi(e)[\Phi(C)]$ établit une équivalence*

$$K(Kl(\mathcal{T})) \cong EM_{proj}(\mathcal{T}).$$

**Correspondances idempotentes scindées.** Soit désormais $\mathcal{C} = \mathcal{C}or \cong Kl\mathcal{P}$ avec $\mathcal{P} = (P, \{\}, \cup)$ la monade des parties sur $\mathcal{E}ns$, un objet de $\mathcal{C}or$ étant un ensemble $E$ et un morphisme de $E$ vers $F$ étant un triplet $(E, R, F) = r$ où $R \subset E \times F$. On sait qu'une $\mathcal{P}$-algèbre $(E, \sigma)$ s'identifie à un ensemble ordonné complet $(E, \leq)$ avec $\sigma = sup_{(E,\leq)}$. Si $(E, r)$ est un objet de $K\mathcal{C}or$ avec $r = (E, R, E)$, alors $\overline{\Phi}(E, r)$ est le sous-ensemble ordonné complet

$$(\Lambda(E, r), \subset)$$

de $(P(E), \subset)$ où $\Lambda(E, r) = \{A \subset E; \cup_{a \in A}\{x \in E; (a, x) \in R\} = A\}$. Alors le foncteur de $\mathcal{E}ns^{op}$ vers $\mathcal{E}ns$ qui à $F$ associe $kyon(E, r)(F, Id_F)$ est représentable par $\Lambda(E, r)$.

**Proposition 3** *Soit $(E,r)$ un objet de $Cor$. Alors $(E,r)$ est scindable si et seulement si $\overline{\Phi}(E,r)$ est atomistique, et alors $\overline{\Phi}(E,r) = (P(r[E]), \subset)$, où $r[E]$ est le scindage de $(E,r)$.*

**Proposition 4** *Une correspondance $r = (E,R,E)$ est un idempotent scindable dans $Cor$ si et seulement si, en écrivant $x \xrightarrow{R} y$ pour $(x,y) \in R$,on a:*

1. $\forall x,u,y[(x \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} y) \Longrightarrow x \xrightarrow{R} y]$ ;
2. $\forall x,y[x \xrightarrow{R} y \Longrightarrow \exists u(x \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} y)]$ ;
3. $\forall u,v[(u \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} v \ \& \ v \xrightarrow{R} v) \Longrightarrow v \xrightarrow{R} u]$.

*Le scindage $r[E]$ s'obtient alors comme $r[E] = \{x \in E; x \xrightarrow{R} x\}/\sim$, avec $x \sim y$ si et seulement si $x \xrightarrow{R} y \ \& \ y \xrightarrow{R} x$.*

**Proposition 5** *Si $r = (E, \leq, E)$ est un préordre, alors*

$$\overline{\Phi}(E,r) = Hom_{Preord}((E,\leq)^{op}, (\{0,1\}, \leq))$$

*et $(E,r)$ est scindable si et seulement si $\leq$ est une équivalence sur $E$.*

Si $r = (E,R,F)$ est une correspondance on pose $r^\circ = (F,R^\circ,E)$ où $R^\circ$ est la correspondance converse de $R$ définie par $(y,x) \in R^\circ$ si et seulement si $(x,y) \in R$. Cette correspondance $r$ est dite *difonctionnelle* (voir [8], p.131, [10], p.78) si elle vérifie $r.r^\circ.r = r$, ou bien, ce qui est équivalent, s'il existe une famille $(E_i)_{i\in I}$ de parties deux à deux disjointes de $E$ et une famille $(F_i)_{i\in I}$ de parties deux à deux disjointes de $F$ telles que $R = \bigcup_{i\in I} E_i \times F_i$.

**Proposition 6** *Soit $r = (E,R,F)$ une correspondance. Si $r.r^\circ$ et $r^\circ.r$ sont des idempotents, alors ils sont scindables, et alors $r : (E, r^\circ.r) \longrightarrow (F, r.r^\circ)$ est un morphisme inversible de $KCor$ si et seulement si $r$ est difonctionnelle, et dans ce cas l'inverse de $r$ est $r^\circ : (F, r.r^\circ) \longrightarrow (E, r^\circ.r)$.*

Pour $(E,\leq)$ un ensemble ordonné complet (sup-treillis complet), on note $\mathcal{J}(E,\leq)$ le sous-ensemble ordonné complet $(J(E,\leq),\subset)$ de l'ensemble ordonné $(P(E),\subset)$ où

$$J(E,\leq) = \{X \subset E; \forall x,y[(y \leq x \wedge x \in X) \Longrightarrow y \in X]\}.$$

On dit que $(E, \leq)$ est un treillis complet *complètement distributif* si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

- L'application croissante $sup_{(E,\leq)} : \mathcal{J}(E, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ admet une adjointe à gauche $g_{(E,\leq)}$ (qui alors commute aux *sups*).

- L'application croissante $sup_{(E,\leq)} : \mathcal{J}(E, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ (qui commute toujours aux *sups*) commute aux *infs*.

- si $(x_{j,k})_{j\in J, k\in K}$ est une famille double d'éléments de $E$, on a :

$$\bigwedge_{j\in J} \bigvee_{k\in K} x_{j,k} = \bigvee_{f\in K^J} \bigwedge_{j\in J} x_{j,f(j)}.$$

On sait aussi que $(E, \leq)$ complet est complètement distributif si et seulement si $(E, \leq)$ est continu et tout élément de $E$ est un *sup* d'éléments copremiers (voir [1]).

L'inclusion $i_{(E,\leq)}$ de $\mathcal{J}(E, \leq)$ dans $(P(E), \subset)$ commute aux *sups*; et comme elle commute aussi aux *infs* elle admet une adjointe à gauche $r_{(E,\leq)}$, qui commute aux *sups*. Si $(E, \leq)$ est complet complètement distributif on a $sup_{(E,\leq)}.r_{(E,\leq)} = sup_{(E,\leq)}$ et on pose $s_{(E,\leq)} = i_{(E,\leq)}.g_{(E,\leq)}$. Pour ce $s_{(E,\leq)}$ la dernière condition de la proposition 1 est satisfaite.

**Proposition 7** *Les ordonnés complets complètements distributifs sont identiques aux rétractions dans $EM(\mathcal{P})$ des objets $(P(E), \subset)$, c'est-à-dire sont identiques aux objets $U_{\mathcal{P}}$-projectifs de $EM(\mathcal{P})$.*

**Proposition 8** *Soit $\mathcal{CD}$ la catégorie ayant pour objets les ordonnés complets complètements distributifs, et pour morphismes les applications qui commutent aux sups. Le foncteur $\overline{\Phi}$ de la proposition 2, dans le cas $\mathcal{T} = \mathcal{P}$, détermine une équivalence de catégorie*

$$KCor \cong \mathcal{CD}.$$

*Ainsi $\mathcal{C}or$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{CD}$ ayant pour objets les ordonnés complets complètement distributifs booléens, et le calcul des correspondances difonctionnelles est inclus dans celui des isomorphismes entre ces objets.*

# Références

[1] G. Gierz, H.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer, 1980.

[2] S. Hayashi, *Adjunctions of semi-functors : categorical structures in non-extensional lambda calculus*, Theoritical Computer Science 45, pp. 95-104, 1985.

[3] R. Hoofman, *Linear Logic, Domain Theory and Semi-functors*, RUV-CS-90-34, nov. 1990, Utrecht University, department of Computer Science.

[4] M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sc. E.N.S. 4, pp. 161-270, 1968.

[5] G.N. Raney, *Completely distributive complete lattices*, Proceedings of the A.M.S. 3 (1952), pp. 677-680.

[6] G.N. Raney, *A subdirect representation for completely distributive complete lattices*, Proceedings of the A.M.S. 4 (1953), pp. 518.

[7] G.N. Raney, *Tight Galois connexions and complete distributivity*, Transactions of the A.M.S. 97 (1960), pp. 418-426.

[8] J. Riguet, *Relations binaires, fermetures et correspondances de Galois*, Bull. S.M.F. 76, (1948), pp. 114-155.

[9] J. Riguet, *Galois correspondences in category theory*, Sem. lotharingien de Combinatoire, Hesselberg 28-30 sept. 1989, I.r.m.a., Université de Strasbourg, 1990, 414/s-22.

[10] G. Schmidt and T. Ströhlein, *Relationen und Graphen*, Springer, 1989.

[11] L. Van den Bril, *Objets Kar-initiaux*, Diagrammes 9 (juil. 1983), 38 p.

**Université de Paris 7**
**Département de mathématiques**
**2 Place Jussieu**
**75251 Paris Cedex 05**

**(Université de Paris 5)**
**10 rue Jeannes d'Arc**
**Paris**