CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

On the geometry of computations

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, nº 4 (1986), p. 107-136

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_4_107_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

Vol. XXVII-4 (1986)

ON THE GEOMETRY OF COMPUTATIONS

by René GUITART

RÉSUMÉ. L'article consiste en une suite de 5 conférences indépendantes qui donne les résultats suivants:

A. Les théories (e.g. algébriques, multialgébriques, cohérentes, du premier ordre) se décrivent en termes d'esquisses mixtes; et dans ce cadre l'extension du théorème du faisceau associé en un théorème d'existence de "diagrammes localement libres" est possible [1 et 3]; et ceci est "essentiellement" la même chose que le théorème de Lowenheim-Skolem, le spectre (e.g. de Zariski), la construction de proj-adjoints [3].

B. Tout diagramme localement libre se complète en un autre qui est relativement filtrant et a une forme invariante [3, 5].

C. Les schémas de programmes se décrivent par esquisses mixtes, et de ce point de vue il y a une sémantique universelle par extension de Kan pour décrire ce qu'un programme calcule [2 et 5].

D. Il y a une description du type d'homotopie de théories et d'algorithmes, avec comme exemples les groupes de Galois et de Poincaré, qui décrit *l'ambiguité* des programmes [3, 4 et 5].

This paper consists of five lectures given since 1981. A universal semantics for computation is produced, extending that of Herbrand. Furthermore, we describe how to construct homotopy types for theories and algorithms; whence a description of ambiguity for programs, extending that of Galois.

CONTENTS.

1. *The theory of sketches (revisited)*, 19th P.S.S.L., 23-24 May 1981, Paris (Prepub. Math. Univ. Paris- Nord 23, 1981, 21-28).
2. *Esquisses de programmes*, exposé du 18/12/1982, Paris.
3. *Esquisses et spectres*, Sém. Général de Logique Paris 7, 12/12/1983.
4. *Type d'homotopie des théories*, P.S.S.L. 3/3 1984, Paris.
5. *Elements of a geometrical study of algorithms*, Category Theory at Löwenberg Manor, Univ. Fribourg and Genève, 23-28 July 1984.
6. Comments (1986).

1. THE THEORY OF SKETCHES (Revisited)*

This talk is a survey of recent results obtained by myself and Christian Lair. The proofs are detailed in our papers [4, 5, 6].

We have been spurred on this subject by two false conceptions of some categoricians:

(C1) "The calculus with a sketch S is too much subtle, and it is better to work with the type (i.e., the completion) of S." **

(C2) "The calculus with a mixed sketch is too much general and can- not produce results as for instance those produced by the calculus with sites or the calculus with localizable categories."

The falseness of (C2) is not so immediate to detect, but follows from our results hereunder; these results work also against the assertion (C1), but concerning (C1) it is also interesting to insist on its philosophical connotation:

The power of Category Theory (C.T.) consists in two complementary things: on the first hand C.T. provides a background *(the philosophy of adjunctions)* for the quest of "good concepts"; on the other hand C.T. provides a precise tool *(the diagrammatical method)* for the effective attack of "essentially combinatorial problems" (as for instance the study of limits in a category of models).

In fact (C1) rests on the forgetting of the second hand abovementioned. It is as much erroneous as are false its classical analogues (e.g., "the calculus with generators of a group is too much subtle, and it is better to work with all the group", etc...).

With the Theory of Sketches (S.T.) we are not looking for a kind of "aesthetic or conceptual satisfaction", this is not the point. The fact is that S.T. is an *analytic model theory* (in the same way one can speak of the analytic geometry), and the question is just: is it a simple and successful tool? So, in order to be clear on this question, I shall not speak here of different possible extensions of the calculus of sketches initiated in [4, 5 or 6] (e.g., sketches over a given sketch and theories *in* a given theory, enriched sketches, calculus with internal formulas and internal trees, links with the calculus of exact squares and the deduction in a fibred category. For this last point, cf. also my talk at Amiens'80 Meeting: "Qu'est-ce que la Logique dans une catégorie?" (these *"Cahiers"* XXII-4, 1982).

---

*) Journées Faisceaux et Logique (19th P.S.S.L.), Prépub. Math. Univ. Paris-Nord, n° 23, 1981, pp. 21-28.

**) However, cf. Comments, at the end of this paper.

1. Sketches and sketchable categories.

DEFINITION 1 (Ehresmann [3]). An *abstract sketch* - or shortly a *sketch* - is a data $S = (\underline{S}, \underline{P}, \underline{Y})$, where $\underline{S}$ is a category, $\underline{P}$ is a family of distinguished projective cones on $\underline{S}$, and $\underline{Y}$ is a family of distinguished inductive cones on $\underline{S}$. A *realization* R of S is a functor $R\colon \underline{S} \to SET$ continuous and co-continuous (i.e., for all $p \in \underline{P}$, the cone Rp in SET is a projective limit cone, and for all $y \in Y$ the cone Ry in SET is an inductive limit cone).

DEFINITION 2 (Guitart & Lair [4]). A *concrete sketch* is a data $S = (\underline{S}, \underline{F})$ where $\underline{S}$ is a graph (i.e., an object of the category $SET^{(\cdot \rightrightarrows \cdot)}$) and $\underline{F}$ a family of distinguished projective cones on $SET^{\underline{S}}$. An element

$$f = (f_I\colon V \to C_I)_{I \in \underline{I}}$$

of $\underline{F}$ is a $\underline{S}$-*formula*, V is its "variable", and the C_I are the "conditions". A *realization* R of S is a functor $R\colon \underline{S} \to SET$ such that for all f in $\underline{F}$ we have

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(C_I, R) \xrightarrow{\text{iso}} \mathrm{Hom}(V, R).$$

DEFINITION 3 (Andreka & Nemeti [1]). An *axiomatization* is a data $S = (\underline{S}, \underline{A})$ where $\underline{S}$ is a category and $\underline{A}$ a family of distinguished discrete projective cones on $SET^{\underline{S}}$. A *realization* R of S is a functor R: $S \to SET$ such that for any element $a = (a_i : D \to B_i)_{i \in I}$ in $\underline{A}$ we have

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(B_i, R) \overset{\text{epi}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hom}(D, R).$$

Let S be an abstract sketch, a concrete sketch, or an axiomatization. The category of all natural transformations between realizations of S is denoted by SET^S, and the class of its objects is denoted by $(SET^S)_0$.

THEOREM 1 (from Chapters 2 and 4 of [4]). *The following conditions on a category* $\underline{X}$ *are equivalent:*

(i) $\underline{X}$ *is* ***naturally sketchable*** *in the sense of* [3], *i.e.,* $\underline{X}$ *is equivalent to a category* SET^S *with* S *an abstract sketch.*

(j) $\underline{X}$ *is equivalent to a category* SET^S *with* S *a concrete sketch.*

(k) $\underline{X}$ *is equivalent to a category* SET^S *with* S *an axiomatization.*

So, from now on, the distinction between (i) and (j) or between (i) and (k) is mainly of a psychological interest, in the same vein as the distinction between abstract manifolds and embedded manifolds.

About sketchability (in the sense (i)) we can recall a theorem of Lair (published in 1971) which asserts that $\underline{X}$ is naturally sketchable iff $\underline{X}$ is naturally sketched by $S_{\underline{X}} = (SET^{\underline{X}}, \underleftarrow{Lim}, \underrightarrow{Lim})$, where $\underleftarrow{Lim}$ (resp. $\underrightarrow{Lim}$) is the class of all projective limit cones (resp. inductive limit cones) on $SET^{\underline{X}}$.

Now, let S and S' be two abstract sketches. A morphism from S to S' is a functor $F: \underline{S} \to \underline{S}'$ such that $F(\underline{P}) \subset \underline{P}'$ and $F(\underline{Y}) \subset \underline{Y}'$. We denote by *SKE* the 2-category of all natural transformations between these morphisms.

DEFINITION 4 (Guitart & Lair [5, 6]). A category $\underline{X}$ is *sketchable* if there is a category Σ internal in SKE^{op} such that $\underline{X}$ is equivalent to $(SET^{\Sigma})_0$.

Roughly speaking $\underline{X}$ is sketchable if its objects (resp. its morphisms) can be described as functors $S_0 \to SET$ (resp. $S_1 \to SET$) satisfying some continuity and co-continuity conditions. And $\underline{X}$ is naturally sketchable in the case where $S_1 = S_0 \otimes 2$.

THEOREM 2 (from [5]). *In general a sketchable category is not naturally sketchable. If* $\underline{X}$ *is sketchable by*

$$\underline{\Sigma} = (S_0 \overset{i_0}{\underset{i_1}{\rightrightarrows}} S_1 \longrightarrow S_2),$$

if S_0 *is purely projective (i.e., without any distinguished inductive cone) and if there is a functor*

$$V: \underline{S}_1 \to \underline{S}_0 \times 2 \quad \textit{such that} \quad V.i_0 = d_0 \ \textit{and} \ V.i_1 = d_1,$$

then there is a naturally sketchable category $\underline{B}$ *– namely* $\underline{B} = \mathrm{Set}^{S_0}$ *– and a co-monad* G *on* $\underline{B}$ *such that* $\underline{X}$ = *Kleisli*(G).

In [5] other criterions are given. This type of results allows to study various categories of "lax" morphisms by the analytical method of sketches.

2. Examples.

Of course the algebraic theories of Lawvere, the algebraic theories of Bénabou, the categories of algebras of monads on *SET*, the categories of sheaves on sites, are examples of purely projective sketches.

A first interesting example of a mixed sketch has been furnished by A. Burroni in 1970, for the category *TOP* of topological spaces.

***THEOREM* 3** (from [6]). *If $\mathbb{X}$ is split cofibred over SET, then $\mathbb{X}$ is sketchable.*
***THEOREM* 4** (from [6]). *If $\mathbb{X}$ is a category mod* T *of morphisms between models of an arbitrary finitary first order theory, then $\mathbb{X}$ is sketchable.*
***THEOREM* 5** (from [4]). *If $\mathbb{X}$ is the category of models in SET of a site, then $\mathbb{X}$ is naturally sketchable.*

It will be interesting to characterize the "shape" of the sketches corresponding to sites. We have not got time to do it. But we have completely solved the question for localizable categories:

***THEOREM* 6** (from [4]). *A category $\mathbb{X}$ is localizable in the sense of Diers* [2] *iff $\mathbb{X}$ is naturally sketchable by a sketch* S *where the distinguished inductive cones have discrete bases (i.e., they represent some sums).*
N.B. In fact the proof of this Theorem 6 uses Theorem 12 (§ 4).

The class of categories of models of sites and the class of localizable categories are *not* "stable by negation" (so, the category of rings which are not fields is not localizable). By contrast:

***THEOREM* 7** (from [6]). *Any boolean (finite or not) combination of sketches is again a sketch* (a mixed sketch in general, even if the datas are purely projective or purely inductive).
***THEOREM* 8** (from [6]). *If* X *is sketchable by a purely inductive sketch then $\mathbb{X}$ is sketchable by a purely projective sketch* (but this projective sketch may be large).

So, up to size conditions, purely inductive and purely projective sketches are of the same nature, essentially algebraic. Consequently the full power of the Theory of Sketches concerns the mixed case.

3. Limits of models.

One of the applications of projective sketches has been the classification of associative unitary tensors in algebraical categories over *SET* (after 1972), in the works of A. & C. Ehresmann, Foltz & Lair, Foltz-Kelly-Lair). Concerning tensors I have proved their existence in a category of "commutative algebras" $\underline{K}^T$ over a monoidal category $\underline{K}$. I worked with the point of view of monads, and strictly speaking my result does not concern sketches (the base category $\underline{K}$ is not *SET*, and even is not necessarily sketchable). Nevertheless it is well known that we have to think of the Kleisli category of a monad as a sketch for its algebras; so in this kind of results the part played by the sketches is to be clarified.

The question of tensors involved a special case of the essential problem of the construction of inductive limits in algebras. And if $\underline{X}$ is a non-algebraic category of models, $\underline{X}$ is sketched, but not necessarily by a purely projective sketch, so that the existence of projective limits in $\underline{X}$ makes problem.

Concerning this question of limits in models, the fundamental basic idea is that *the main obstruction* for the computation of limits in a naturally sketchable category *is concentrated in the problem of commutation of limits in SET.*

In [4] we give some criterions for the computations of projective limits, inductive limits, partial limits, local limits, ultraproducts. In this talk I shall give only two examples.

Let $\underline{X}$ be a naturally sketchable category, $\underline{X}$ = SET^S, where S = ($\underline{S}$, $\underline{P}$, $\underline{Y}$). We denote by *Base* ($\underline{Y}$) the set of categories which are bases of cones of $\underline{Y}$, and we denote by *Com Base* ($\underline{Y}$) the set of categories $\underline{C}$ such that for all $\underline{B} \in$ *Base* ($\underline{Y}$) the projective limits in *SET* indexed by $\underline{C}$ commute with the inductive limits in *SET* indexed by $\underline{B}$. Then we have:

THEOREM 9 (from [4]. *With these hypotheses, the category* $\underline{X}$ *has all projective limits indexed by any category* $\underline{C} \in$ *Com Base* ($\underline{Y}$). *The dual result holds for inductive limits.*

This Theorem 9 is very easy, and as a corollary we have that a localizable category admits connected projective limits, because in *SET* these limits commute with sums, and because of Theorem 6. So, just looking to the shape of the sketch of a field, it is trivial that the category of fields admits pullbacks.

But why does not the category of fields admit products? In fact it is really because the product in the category of rings of two fields is not a field, and because the sketch of fields is limited in the following sense:

DEFINITION 5 (from [5]). Let $S = (\underline{S}, \underline{P}, \underline{Y})$ be a sketch, and let $S_{proj} = (\underline{S}, \underline{P}, \emptyset)$ be its "projective part". S is said to be *limited* if any object V of $\underline{S}$ is the vertex of a projective cone $p \in \underline{P}$, say

$$p = (p_I : V \to P_I)_{I \in \underline{I}}$$

such that for any object I of $\underline{I}$ the functor $\mathrm{Hom}(P_I, -): \underline{S} \to \mathit{SET}$ is a realization of S.

THEOREM 10 (from [4]). *If a sketch* S *is limited, then the inclusion* $\mathrm{SET}^S \to \mathrm{SET}^{S_{proj}}$ *commutes with all small projective limits.*

4. Toward the spectrum: the small locally free diagram.

In the case of purely projective sketches an essential tool was the Associated Sheaf Theorem, and a mixed version of it was to find. We have proved it (Theorem 11 below).

DEFINITION 6 (from [4]). Let c be a cardinal. A *c-injective sketch* is a sketch $S = (\underline{S}, \underline{P}, \underline{Y})$ such that for all element $y = (y_J : B_J \to V)_{J \in \underline{J}}$ of $\underline{Y}$, for all realization $R: S \to \mathrm{SET}$, and for all $x \in R(V)$, we have

$$\mathit{Card}\ R(y_J)^{-1}(x) \leqslant c.$$

THEOREM 11 (from [4]). *If* S *is a small c-injective sketch, then each realization* $R: S_{proj} \to \mathrm{SET}$ *(resp. each functor* $R: \underline{S} \to \mathit{SET}$*) has a* ***small locally free diagram*** (D, d) *in* SET^S.

This means that $D: \underline{A} \to \mathrm{SET}^S$ is a functor with domain a small category, $d = (d_A : R \to D_A)_{A \in \underline{A}}$ is a projective cone in SET^S with base D and with vertex R, and these data induce, for all G in SET^S (G is a realization of the mixed sketch S), an isomorphism

$$\lim_{\overrightarrow{A \in \underline{A}^{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SET}^S}(D_A, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{SET}^{S_{proj}}}(R, G).$$

THEOREM 12 (from [4]). *If* S *is a small sketch where the distinguished inductive cones have discrete bases, then each realization* $R: S_{proj} \to \mathrm{SET}$ ***has a small locally free family*** $((D_m)_{m \in M}, (d_m)_{m \in M})$ *in* SET^S.

This means that M is a set, $(D_m)_{m \in M}$ is a M-family of realizations of S, $(d_m)_{m \in M}$ a M-family of morphisms $d_m: R \to D_m$ in $\mathrm{SET}^{S_{proj}}$, and these data induce, for all G in SET^S, an isomorphism

$$\coprod_{m \in M} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SET}^{S}}(D_m, G) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{SET}^{S\,proj}}(R, G).$$

In the "Diers version" of the spectrum there is, as an hypothesis, the existence of locally free families: our Theorem 12 asserts that this hypothesis is always satisfied in the case of localizable categories and localizable functors.

In order to understand in the same way the beginning of the "topos version" of the spectrum with respect to a geometrical theory (Coste, Makkaï & Reyes), we have to note that the proof of Theorem 5 consists in applying Theorem 1 to the axiomatization $(\underline{C}, \mathrm{YON}(G_o(\underline{C}))$ · where YON: $\underline{C} \to (\mathit{SET}^{\underline{C}})^{op}$ and $(\underline{C}, G_o(\underline{C}))$ is a site given by a basic system $G_o(\underline{C})$ of covering families. And then we have:

THEOREM 13 (from [4]). *Let* $(\underline{S}, \underline{A})$ *be an axiomatization (for example,* $(\underline{C}, G_o(\underline{C}))$*). If for all* $a = (a_i\colon D \to B_i)_{i \in I}$ *in* $\underline{A}$ *we have that each* a_i *is an epimorphism, then the sketch associated (by (i) & (k) in Theorem 1) is* 1*-injective, and the conclusion of Theorem 11 is true.*

Now to go to a spectral analysis of an arbitrary first order theory, the key is Theorem 11: the deeper step in the description of the spectrum is the construction of small locally free diagrams as in Theorem 11, and then the "total spectrum" of R will be the description of all connections between the various small locally free diagrams on R. This will be exposed with details elsewhere.

References.

1. H. ANDREKA & I. NEMETI, Formulas and ultraproducts in categories, *Beit. zur Alg. und Geom.* 8 (1979).
2. Y. DIERS, Catégories localisables, Thèse, Univ. Paris, 1977.
3. C. EHRESMANN, Esquisses et types de structures algébriques, *Bull. Inst. Polit. Iasi* XIV (1968); reprinted in *"Charles Ehresmann: Oeuvres complètes et commentées"*, Part IV, Amiens 1982.
4. R. GUITART & C. LAIR, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4 (1980).
5. R. GUITART & C. LAIR, Esquisses de morphismes: critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, *Diagrammes* 5 (1981).
6. R. GUITART & C. LAIR, La continuité pour représenter les formules, manuscrit, 1981. (This manuscript has been published under the title "Limites et colimites pour représenter les formules" in *Diagrammes* 7, 1982)

2. ESQUISSES DE PROGRAMMES*

Résumé. Le point de vue des esquisses permet un exposé "géométrique" de la Théorie des Modèles. On rappelle ici ce qu'est une esquisse et on donne quelques exercices. On montre ensuite comment un programme est une réalisation d'une esquisse. On en déduit une description de la composition des programmes.

1. Définition et exercices d'esquisses.

Une *esquisse* est une donnée S = ($\underline{S}$, $\underline{P}$, $\underline{Y}$) où $\underline{S}$ est une catégorie**, $\underline{P}$ une famille de cônes projectifs dans $\underline{S}$ et $\underline{Y}$ une famille de cônes inductifs dans $\underline{S}$.

Une *réalisation* de S dans une catégorie $\underline{C}$ est un foncteur R: $\underline{S} \to \underline{C}$ tel que, pour tout $p \in \underline{P}$ (resp. $y \in \underline{Y}$), Rp soit un cône limite projective (resp. Ry soit un cône limite inductive). On désigne par Real(S, $\underline{C}$) la catégorie dont les objets sont les réalisations de S dans $\underline{C}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces réalisations.

On dit qu'une catégorie $\underline{X}$ est *naturellement esquissable* par S si elle est équivalente à Real(S, Ens). Ainsi sont les catégories de modèles de *structures algébriques* unisortes ou multisortes, totales ou partielles (si les domaines sont définis par des équations). Dans ces cas on peut se passer de cônes inductifs dans S.

L'utilisation simultanée de cônes projectifs (pour décrire des α-uplets et équations de domaines) et de cônes inductifs (pour décrire des décompositions de sortes et des amalgamations) permet de décrire plus que les structures algébriques: on atteint ainsi toutes les *structures du premier ordre* et les structures mathématiques usuelles (e.g., corps, espaces topologiques).

Pour s'initier au maniement des esquisses il faut *dessiner* des fragments d'esquisses (de théories familières), les coller entre eux, etc. Voici quelques exercices de modélisation dans le langage des esquisses.

1. Décrire une esquisse dont les réalisations sont les ensembles à 1 élément, une esquisse dont les réalisations sont les ensembles à 2 éléments, une esquisse dont les réalisations sont les ensembles dénombrables.

----

*) Exposé à Paris, le 18/12/1982.

**) ou plus généralement un graphe multiplicatif.

2. Décrire une esquisse dont les réalisations sont les groupes.

3. Décrire une esquisse dont les réalisations sont les corps.

4. Décrire une esquisse dont les réalisations sont les graphes orientés, un esquisse dont les réalisations sont les arbres.

5. Décrire une esquisse S où deux points (objets) A et B sont distingués et qui soit telle que, pour toutes les réalisations R de S, si R(B) = $\mathbf{N}$, alors

$$R(B) = \{\ (m, n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid m \leqslant n\ \}.$$

6. Reprendre l'exercice 5 avec successivement:

a) Si R(A) = $\mathbf{N}$ alors R(B) = $\mathbf{Q}$.

b) Si R(A) = $\mathbf{N}$ alors R(B) = $\mathbf{R}$.

c) Si R(A) est un graphe, alors R(B) est l'ensemble des arbres (ou l'ensemble des chemins, etc.) de R(A).

d) Si R(A) est un polyèdre, alors R(B) est l'ensemble de ses faces (ou de ses sommets, etc.).

7. Décrire l'esquisse d'espace séquentiel (i.e., d'un ensemble E muni d'une famille de suites réputées convergentes, telle que toutes suites extraites de suites convergentes soient convergentes, etc.).

8. Décrire l'esquisse d'ensemble simplicial, de catégorie, de n-catégorie.

9. Esquisser le jeu de cubes.

2. L'esquisse d'un programme.

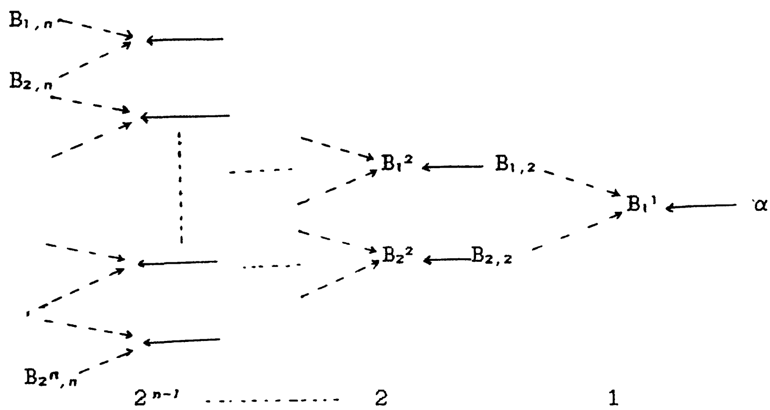
Les types d'objets abstraits que l'ordinateur peut traiter *tels quels*, et les opérations qu'il peut faire dessus, sont les objets d'un fragment de catégorie noté $\underline{Q}$; et la description des vrais objets que l'ordinateur peut manipuler et des vraies opérations qu'il peut faire consiste en un foncteur $O: \underline{Q} \to Ens$.

En fait l'utilisation d'un ordinateur $O: \underline{Q} \to Ens$ se fait en construisant un programme (comme précisé ci-dessous) pour lui faire calculer une fonction $f : E \to F$ donnée. On commence en élargissant $\underline{Q}$ en une catégorie $\underline{T}$ des "types abstraits" accessibles en partant de $\underline{Q}$. Certains types sont construits à partir d'autres (et en particulier d'objets de $\underline{Q}$), et ceci est décrit par des limites projectives (e.g., produits et noyaux) ou par des limites inductives (e.g., sommes disjointes et quotients), ou par limites projectives de limites inductives, etc., dans $\underline{T}$.

Le type abstrait est donc une esquisse $T = (\underline{T}, \underline{P}, \underline{Y})$ avec un foncteur U: $\underline{Q} \to \underline{T}$, et la description des vrais objets complexes que l'ordinateur peut manipuler sera une réalisation R: $T \to$ Ens telle que

$$\begin{tikzcd} \underline{Q} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr, "O"'] & \arrow[d, phantom, "="] & T \arrow[dl, "R"] \\ & Ens & \end{tikzcd}$$

On désigne par $\mathbb{L}_n$ la catégorie suivante:



où les flèches pleines sont des actions (ou opérations) et où les paires de flèches pointillées de même but sont destinées à décrire des tests.

Soit Ω une partie non vide de l'ensemble des "bouts"

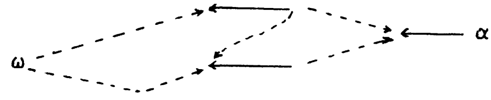
$$B^n = \{ B_{1,n}, \dots, B_{2^n,n} \},$$

et

$$A: B^n \setminus \Omega \to \bigcup_{m<n-1} B^m.$$

On désigne par $\mathbb{L}_n[\Omega, A]$ le quotient de $\mathbb{L}_n$ par l'identification des éléments de Ω entre eux, et de chaque $B \in B^n\setminus\Omega$ avec $A(B)$. La classe des éléments de Ω est notée ω.

EXEMPLE. Un $L_2[\Omega, A]$:



Un *guidage* dans $\underline{T}$ est un foncteur G: $L_n[\Omega, A] \to \underline{T}$. Soit $L_n^{*}[\Omega, A]$ la catégorie obtenue à partir de $L_n[\Omega, A]$ en renversant le sens des flèches en pointillés. Pour un objet B de $L_n[\Omega, A]$ on désigne par $Ch^{*}(B)$ l'ensemble des chemins (i.e., suites de flèches à la queue leu leu) dans $L_n^{*}[\Omega, A]$ de source X et de but Ω.

Si $a : B \longrightarrow B'$, on pose $Ch^{*}(a)(\lambda) = \lambda \backslash a$;

si $t : B \dashrightarrow B'$, on pose $Ch^{*}(t)(\lambda) = \lambda_U t$.

Alors on a un foncteur:

$$Ch^{*}: L_n[\Omega, A] \longrightarrow \mathit{Ens} .$$

Etant donné un type abstrait donné sous la forme *d'une esquisse* $T = (\underline{T}, \underline{P}, \underline{Y})$ et un guidage G: $L_n[\Omega, A] \to \underline{T}$, on construit une nouvelle esquisse $T_G = (\underline{T}_G, \underline{P}_G, \underline{Y}_G)$ comme suit:

1° Pour chaque $\lambda \in Ch^{*}(\alpha)$, soit G_λ la restriction de G à la partie λ de $L_n[\Omega, A]$. On ajoute à $\underline{T}$ un objet π_λ et un cône projectif K_λ: $[\pi_\lambda] \to G_\lambda$ de sommet π_λ et de base G_λ. On note

$$K_{\lambda\alpha}: \pi_\lambda \to G_\lambda(\alpha) \qquad \text{et} \qquad K_{\lambda\omega}: \pi_\lambda \to G_\lambda(\omega)$$

les jambes de K_λ de pieds α et ω. On ajoute enfin ϕ: $G(\alpha) \to G(\omega)$ et les équations $\phi . K_{\lambda\alpha} = K_{\lambda\omega}$. Ceci décrit $\underline{T}_G$. On note U_G: $\underline{T} \to \underline{T}_G$ le plongement canonique.

2° Les cônes projectifs distingués, éléments de $\underline{P}_G$, sont:

- les images par U_G des éléments de $\underline{P}$,
- les cônes K_λ pour $\lambda \in Ch^{*}(\alpha)$.

3° Les cônes inductifs distingués, éléments de $\underline{Y}_G$, sont:

- les images par U_G des éléments de $\underline{Y}$,
- le cône discret $K_{\lambda\alpha}$: $\pi_1 \to G(\alpha)$,
- pour chaque test, i.e. pour chaque paire

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "u"] & \\ & D \\ C \arrow[ur, dashed, "v"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{dans } L_n[\Omega, A],$$

le cône discret

$$\begin{tikzcd} GB \arrow[dr, dashed, "Gu"] & \\ & GD \\ GC \arrow[ur, dashed, "Gv"'] & \end{tikzcd}$$

Un programme guidé par G *dans le type abstrait* $\underline{T}$ *est alors exactement une réalisation* V: $T_G \to$ *Ens. La fonction calculée est* $f = V(\phi)$: $V(\alpha) \to V(\omega)$; *l'ordinateur utilisé est*

$$O = (\ \underline{\Omega} \xrightarrow{U} \underline{T} \xrightarrow{U_G} \underline{T}_G \xrightarrow{V} \mathit{Ens}).$$

On a donc la situation:

$$\begin{tikzcd}
& L_n[\Omega, A] \arrow[d, "G"] & & \\
\underline{Q} \arrow[r, "U"] \arrow[drr, "O"'] \arrow[drr, phantom, "=", shift left=3ex] & \underline{I} \arrow[r, "U_G"] & I_G \arrow[r, "{[\phi]}"] \arrow[d, "V"] \arrow[dr, phantom, "="] & (\cdot \to \cdot) \arrow[dl, "\ulcorner f \urcorner"] \\
& & Ens &
\end{tikzcd}$$

3. La composition des programmes.

On désigne par *ESQ* la catégorie ayant pour objets les esquisses (mixtes) $(\underline{S}, \underline{P}, \underline{Y})$, et pour morphismes les réalisations [i.e. les foncteurs $F: \underline{S} \to \underline{S}'$ tels que $F(\underline{P}) \subset \underline{P}'$ et $F(\underline{Y}) \subset \underline{Y}'$]. On peut construire une esquisse projective (i.e. sans cônes inductifs) S_{ESQ} telle que *ESQ* soit équivalente à Real(S_{ESQ}, *Ens*). Donc *ESQ* est complète et cocomplète, et en particulier elle est *à sommes fibrées.*

On dispose alors d'une bicatégorie des programmes, notée *PROG*, et définie comme suit:

Un objet de *PROG* est un morphisme dans *ESQ*, $\mathbf{A}$: A → Ens (et est considéré comme un ordinateur, e.g. O ou $\ulcorner f \urcorner$ de §2).

Un morphisme de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ est un *programme* ("calculant B à partir de A "), i.e. une donnée, dans *ESQ*, $(V; I_A, I_B) = \mathbf{P}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "\mathbf{A}"'] \arrow[dr, phantom, "=", shift left=4ex] & P \arrow[d, "V"] & B \arrow[l, "I_B"'] \arrow[dl, "\mathbf{B}"] \arrow[dl, phantom, "=", shift right=4ex] \\
& \cdot &
\end{tikzcd}$$

Si

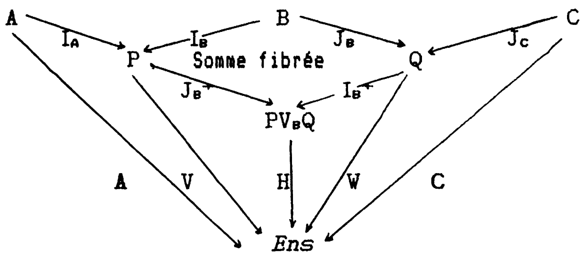
$$\mathbf{P} = (V, I_A, I_B) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}' = (V', I_A', I_B')$$

sont deux programmes de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$, un 2-morphisme de $\mathbf{P}$ à $\mathbf{P}'$ est un K: $P \to P'$ dans *ESQ* tel que $V'.K = V$, $K.I_A = I_A'$, $K.I_B = I_B'$.

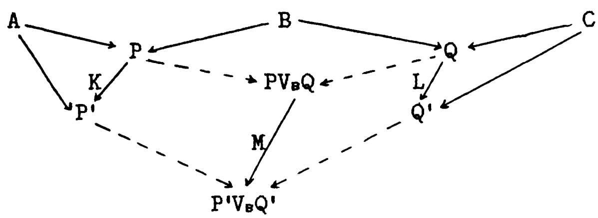
Si $\mathbf{P}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $\mathbf{Q}$: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$, on les compose par sommes fibrées de I_B et J_B:

$$(W; J_B, J_C).(V; I_A, I_B) = (H; J_B^+.I_A, I_B^+.J_C),$$

où H est l'unique réalisation telle que $H.J_B^+ = V$ et $H.I_B^+ = W$ (qui existe car $V.I_B = \mathbf{B} = W.J_B$).



Evidemment, cette composition s'étend aux 2-morphismes:



Pour K: P $\to$ P' et L: Q $\to$ Q', on construit M: $PV_BQ \to P'V_BQ'$ qui est défini par $M.J_B^+ = J'_B{}^+.K$ et $M.I_B^+ = I_B'^+.L$.

Ainsi on fait de PROG une bicatégorie.

4. Références.

La mise en place générale ci-dessus sera, j'espère, raffinée plus tard*. Elle a son origine dans deux exposés stimulants de *B. Sucher* où il exposait des situations concrètes où l'usage des types abstraits lui sembait indiqué. Ensuite j'ai lu un cours de *B. Courcelle* sur les schémas de programmes, et je me suis proposé d'utiliser les esquisses de *C. Ehresmann* pour exprimer ce qu'est un programme.

----

* En particulier en développant dans ce cadre la théorie de *l'effectivité* des programmes), en précisant le rôle des tests, de la mémoire, du temps, etc,

3. ESQUISSES ET SPECTRES*

1. Soit $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur, et B un objet de $\mathbf{B}$. On appelle U-*structure libre* engendrée par B un couple (LB, ϵ_B), où LB est un objet de $\mathbf{A}$ et $\epsilon_B: B \to ULB$ un morphisme de $\mathbf{B}$, tel que pour tout objet A de $\mathbf{A}$ et tout morphisme $f: B \to UA$ il existe un unique morphisme de $\mathbf{A}$, noté $f^{-}: LB \to A$ *tel que* $Uf^{-}.\epsilon_B = f$. Autrement dit $f^{-} \mapsto Uf^{-}.\epsilon_B$ détermine une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(LB, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, UA).$$

Alors L est un foncteur appelé *adjoint* (à gauche) de U, ce que l'on écrit: $L \dashv U\ (\epsilon, \gamma)$, où $\gamma_A: LUA \to A$ est l'unique morphisme de $\mathbf{A}$ tel que $U\gamma_A.\epsilon_{UA} = \mathrm{Id}_{UA}$. On dit que L est fidèle (resp. plein) ssi, pour tous objets B, B' de $\mathbf{B}$, l'application

$$L_{B,B'}: \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, B') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(LB, LB')$$

est injective (resp. surjective); ceci équivaut à ce que, pour tout B, ϵ_B soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme scindé).

Pour tout catégorie $\mathbf{A}$, soit $\mathbf{A}^{\wedge} = (Ens^{\mathbf{A}})^{op}$, et pour $U: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ soit $U^{\wedge}: \mathbf{A}^{\wedge} \to \mathbf{B}^{\wedge}$ le prolongement de U donné par

$$U^{\wedge}(F)(B) = \lim_{(A,b;UA\to B)} F(A),$$

qui est tel que

$$U^{\wedge} \circ Y_{\mathbf{A}} = Y_{\mathbf{B}} \circ U, \quad \text{avec} \quad Y_{\mathbf{A}}(A)(A') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, A').$$

Alors $U^{\wedge}$ admet un adjoint L donné par $L(G)(A) = G(U(A))$, et U lui-même a un adjoint L ssi $L \circ Y_B = Y_A \circ L$.

2. Soit T une théorie raisonnable, c'est-à-dire telle que, pour tout topos élémentaire $\mathbf{E}$, la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathbf{E}}\, T$ des modèles de T dans $\mathbf{E}$ est bien définie, et ce de sorte que pour tout morphisme géométrique $f: \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ on ait $f^*M \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{E}'}T$ si $M \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{E}}T$. On définit alors Mod T comme la catégorie ayant pour objets les $(\mathbf{E}, M)$, où $\mathbf{E}$ est un topos et $M \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{E}}\, T$, et où un morphisme $(f, \phi): (\mathbf{E}, M) \to (\mathbf{E}', M')$ est la donnée d'un morphisme géométrique $f: \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ et d'un $\phi: f^*M \to M' \in \mathrm{Mod}_{\mathbf{E}'}T$.

Soit T_1 et T_2 deux théories raisonnables, T_1 plus forte que T_2, et $U: \mathrm{Mod}_{Ens}\, T_1 \to \mathrm{Mod}_{Ens}\, T_2$ le foncteur d'oubli usuel entre catégories de modèles usuels, et $U^{\sim}: \mathrm{Mod}\, T_1 \to \mathrm{Mod}\, T_2$ son prolongement naturel.

---

* Exposé fait au Séminaire Général de Logique, Paris 7, le 12/12/1983.

On considère la situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, T_1 \arrow[r, "U"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, T_2 \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Mod}\; T_1 \arrow[r, "U^{\sim}"] \arrow[d] & \mathrm{Mod}\; T_2 \arrow[d] \\
\mathbb{A}^{\wedge} = (\mathcal{E}ns^{\mathbb{A}})^{op} \arrow[r, "U^{\wedge}"] \arrow[r, bend right, dash, "L"'] & (\mathcal{E}ns^{\mathbb{B}})^{op} = \mathbb{B}^{\wedge}
\end{tikzcd}$$

Si $U^{\sim}$ a un adjoint, cet adjoint est noté Spec_U et est une restriction de L. Si $\mathrm{Spec}_U(\mathcal{E}ns, M) = (\mathrm{Faisc}(X_M), M^-)$, avec $\mathrm{Faisc}(X_M)$ le topos des faisceaux sur l'espace topologique X_M, les points de X_M sont appelés les points du spectre et $M^{\wedge}_x = \lim_{x\in U} M^-(U)$ est la fibre en $x \in X_M$; elle se trouve munie d'une structure de modèle usuel de T_1; le ϵ de l'adjonction $\mathrm{Spec}_U \dashv U^{\sim}$ (ϵ, γ) est donné par les $\epsilon_{M,x}: M \to M^-_x$, $x \in X_M$ qui se recollent en un morphisme

$$(\epsilon)_M: M \to \Gamma(M^-) \subset \Pi_{x\in X_M} M^-_x,$$

où $\Gamma(M^-)$ est l'ensemble des sections (globales continues) de $X_{M^-} \to X_M$ où X_{M^-} est l'espace étalé sur X_M associé à M^-.

Lorsque $(\epsilon)_M: M \to \Gamma(M^-)$ est un isomorphisme, le modèle M de T_2 se trouve représenté comme ensemble des sections d'un faisceau de modèles de la théorie plus forte T_1.

3. Soit $U: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, et B un objet de $\mathbb{B}$. On appelle U-*petit diagramme localement libre engendré par* B un couple $((L_iB)_{i\in \mathbb{I}}, (\epsilon_{B,i})_{i\in \mathbb{I}})$, où $\mathbb{I}$ est une petite catégorie, $L\text{-}B: \mathbb{I} \to \mathbb{A}$ un foncteur, $\epsilon_{B,-}: \ulcorner B \urcorner \to UL\text{-}B$ une transformation naturelle, tels que, pour tout objet A de $\mathbb{A}$ et tout $f: B \to UA$ on ait:

1° Il existe un $i \in \mathbb{I}_o$ et un $f^-: L_iB \to A$ tel que $Uf^-.\epsilon_{B,i} = f$.

2° Si i' et $f': L_{i'}B \to A$ satisfaisant $Uf'.\epsilon_{B,i'} = f$, alors il existe dans $\mathbb{I}$ un "zig-zag":

$$i \xrightarrow{u_2} i_2 \xleftarrow{u_3} i_3 \longrightarrow \dots \longleftarrow i_{n-1} \xrightarrow{u_n} i'$$

et dans $\mathbb{A}$ un "éventail"

$$\begin{tikzcd}
L_iB \arrow[r, "L_{u_2}B"] \arrow[drrr, bend right, "f^-"'] & L_{i_2}B \arrow[drr] & L_{i_3}B \arrow[l, "L_{u_3}B"'] \arrow[r] \arrow[dr] & \dots \arrow[d] & L_{i_{n-1}}B \arrow[l] \arrow[r, "L_{u_n}B"] \arrow[dl] & L_{i'}B \arrow[dll, "f'"] \\
 & & & A & &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, $f^{-} \mapsto Uf^{-}.\epsilon_{B,i}$ détermine une bijection naturelle

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{A}(L_i B, A) \simeq \mathrm{Hom}_{B}(B, UA).$$

4. Un petit diagramme localement libre où $\underline{I} = \{*\}$ est simplement une structure libre au sens du §1. Les spectres $(\mathrm{Faisc}(X_M), M^{-})$ correspondent à des petits diagrammes localement libres discrets, c'est-à-dire où $\underline{I}$ est un ensemble vu comme catégorie discrète (i.e., sans flèche autre que les identités sur les objets), à savoir $\underline{I} = X_M$. Mais il y a des situations où il n'existe pas de p.d.l.l. discret et où il existe un p.d.l.l. Voici trois cas typiques:

a) Soit $\underline{B}$ la catégorie des anneaux commutatifs unitaires et $\underline{A}$ sa sous-catégorie constitutée des anneaux de Boole.

b) Soit $\underline{B}$ comme en a, et $\underline{A}$ la sous-catégorie de $\underline{B}$ constituée des anneaux locaux.

c) Soit $\underline{B}$ comme en a et $\underline{A}$ la sous-catégorie de $\underline{B}$ constituée des anneaux de caractéristique non nulle.

Soit U l'inclusion de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$; alors tout objet B de $\underline{B}$ admet un U-p.d.l.l.: dans le cas a, $\underline{I} = \{*\}$ car la situation est algébrique; dans le cas b, $\underline{I}$ est discret, c'est le spectre de Zariski de B; dans le cas c, $\underline{I}$ n'est pas discret (par exemple pour $B = Z$, on obtient pour $\underline{I}$ la catégorie dont les objets sont les $n \geqslant 1$ et où il y a un morphisme de m vers n ssi n divise m; et $L_n Z = Z/nZ$).

5. Une *esquisse* est une donnée $\sigma = (\underline{S}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ où:

- $\underline{S}$ est une petite catégorie,
- $\mathcal{P}$ est une famille de petits cônes projectifs distingués sur $\underline{S}$,
- $\mathcal{I}$ est une famille de petits cônes inductifs distingués sur $\underline{S}$.

Un morphisme d'esquisses de σ vers σ' est un foncteur $R: \underline{S} \to \underline{S}'$ tel que $R(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}'$ et $R(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}'$.

Un modèle de σ est un morphisme de σ vers $(\mathcal{E}ns, \varprojlim, \varinjlim)$. On désigne par $\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \sigma$ les modèles de σ, et si $\phi: \sigma \to \sigma'$ est un morphisme par $\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \phi : \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \sigma' \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \sigma$ le foncteur induit par la composition avec ϕ.

Une catégorie $\underline{A}$ est dite esquissable si $\underline{A}$ est équivalente à $\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \sigma$ pour une esquisse σ; un foncteur $U: \underline{A} \to \underline{B}$ est dit esquissable si $U = \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}ns}\, \phi$ pour un morphisme d'esquisses ϕ. Sont esquissables: les catégories de faisceaux, de modèles d'un site, d'algèbres partielles, d'algèbres avec spécifications initiales, les catégories de modèles de théories du premier ordre.

6. La notion d'esquisse, les premiers exemples et l'application à des questions de complétion sont dûs à Ehresmann [3]. Les 4 exemples de la fin du §5 sont expliqués dans [4]. En fait les théorèmes classiques d'existence d'adjoint (en particulier le Théorème du faisceau associé), les théorèmes d'existence de spectre de Coste [1] et de Diers [2] se retrouvent comme cas particuliers du résultat suivant:

THÉORÈME (Guitart & Lair [4]). *Si* U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est un foncteur esquissable, alors pour tout objet* B *de* $\mathbf{B}$ *il existe un* U-*petit diagramme localement libre engendré par* B.

En réalité (voir [4]) la construction de $\mathbf{I}$ et des $L_i B$ est faite par récurrence transfinie qui s'arrête, à l'aide de limites inductives explicites, de sorte que l'on peut majorer le cardinal de $\mathbf{I}$ et de chaque $L_i B$ à partir de ceux de σ, P, I, σ', P', I', de ceux des bases des cônes éléments de P, I, P', I', et à partir du cardinal de B. Par exemple, si $\sigma = (\mathbf{S}, \emptyset, \emptyset)$ et $\sigma' = (\mathbf{S}, P', I')$ et si $B = \emptyset$, objet initial de $Ens^{\mathbf{S}}$, la construction du théorème montre que si σ a un modèle, σ a un modèle de cardinal $\leqslant \mu(\sigma')$. On doit donc voir le théorème comme une version catégorique précisée de Lowenheim-Skolem.

7. On peut voir un U-petit diagramme localement libre comme une PROJ-U-structure libre, en désignant par PROJ-U: PROJ-$\mathbf{A} \to$ PROJ-$\mathbf{B}$ le foncteur induit par U, avec PROJ-$\mathbf{A}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs F: $\mathbf{I} \to \mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ petite, et où un morphisme de F: $\mathbf{I} \to \mathbf{A}$ vers G: $\mathbf{J} \to \mathbf{A}$ est un *atlas* (voir Commentaire 199 de [3]), c'est-à-dire une classe A de triplets notés «$\alpha: i \to j$» telle que:

a) $i \in \mathbf{I}_0$, $j \in \mathbf{J}_0$, $\alpha: F(i) \to G(j) \in \mathbf{A}$.

b) Pour tout $v: j \to j' \in \mathbf{J}$, «$G(v).\alpha: i \to j'$» $\in A$.

c) Pour tout $j \in \mathbf{J}_0$, il existe un «$\alpha: i \to j$» $\in A$.

d) Pour tout $i' \in \mathbf{I}_0$ et «$\alpha: i \to j$» $\in A$ et $\alpha': F(i') \to G(j)$, on a «$\alpha': i' \to j'$» $\in A$ ssi il existe dans $\mathbf{I}$ un zig-zag

$$i \xrightarrow{u_2} i_2 \xleftarrow{u_3} i_3 \longrightarrow \dots \longleftarrow i_{n-1} \xrightarrow{u_n} i'$$

et dans A un "éventail"

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[r, "Fu_2"] \arrow[drrr, bend right, "\alpha"'] & Fi_2 \arrow[drr] & Fi_3 \arrow[l, "Fu_3"'] \arrow[dr] \arrow[r] & \dots \arrow[d] & Fi_{n-1} \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[r, "Fu_n"] & Fi' \arrow[dll, bend left, "\alpha'"] \\
 & & & Gj & &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PROJ}\text{-}\mathbf{A}}(F, G) = \lim_{J} \lim_{I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(F-, G-.).$$

On définit les foncteurs

$$c_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \to \mathrm{PROJ}\text{-}\mathbf{A} \quad \text{et} \quad h_{\mathbf{A}}: \mathrm{PROJ}\text{-}\mathbf{A} \to (\mathit{Ens}^{\mathbf{A}})^{op}$$

par $$c_{\mathbf{A}}(A) = [A]: 1 \to \mathbf{A}$$
et $$h_{\mathbf{A}}(F)(A) = \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(F(i), A).$$

Alors pour tout U: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on considère la situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "c_{\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{B} \arrow[d, "c_{\mathbf{B}}"] \\
\mathrm{PROJ}\text{-}\mathbf{A} \arrow[r, "\mathrm{PROJ}\text{-}U"] \arrow[d, "h_{\mathbf{A}}"'] & \mathrm{PROJ}\text{-}\mathbf{B} \arrow[d, "h_{\mathbf{B}}"] \\
\mathbf{A}^{\wedge} \arrow[r, "U^{\wedge}"] & \mathbf{B}^{\wedge} \arrow[l, bend left, "L"]
\end{tikzcd}$$

et on vérifie que l'existence d'un adjoint Spec_U à PROJ-U équivaut à l'existence pour chaque objet B de $\mathbf{B}$ d'un U-petit diagramme localement libre.

Ce formalisme permet de préciser que c'est donc comme objet de PROJ-$\mathbf{A}$ qu'un p.d.l.l. sur B est déterminé à un isomorphisme près. En particulier la catégorie $\mathbf{I}$ n'y est pas déterminée à isomorphisme (de catégories) près, sauf dans des cas particuliers. Par exemple si on sait que $\mathbf{I}$ est discret (resp. un groupe), alors ce $\mathbf{I}$ est déterminé à une bijection (resp. à un isomorphisme de groupes) près.

8. Avec les notations du §3 on dira que le p.d.l.l. est *relativement filtrant* ssi pour tout $f: B \to UA$ et toute catégorie finie $\mathbf{E}$, tout foncteur $V: \mathbf{E} \to \mathbf{I}$ et tout cône λ dans $\mathbf{A}$ de base $L\mathbf{B}\circ V$ et sommet A tel que $U\lambda.\epsilon = f$, il existe un $i_0 \in \mathbf{I}_0$, un cône λ' dans $\mathbf{I}$ de base V et sommet i_0 et un $\alpha: L_{i_0}B \to A$ avec $\alpha.\, L_{\lambda'}{\cdot}B = \lambda$, $UL_{\lambda'}{\cdot}B.\epsilon = \epsilon_{B,i_0}$.

En itérant une suite dénombrable de fois le théorème du §6, on montre (voir [5]) que tout p.d.l.l. peut être agrandi en un p.d.d.l. relativement filtrant noté $rf((L_iB)_{i\in I}, \epsilon_{B,i})$.

Pour tout foncteur $W: \mathbf{X} \to \mathbf{B}$, soit $B{\downarrow}W$ la catégorie dont les objets sont les $(f: B \to WX;\ X)$, et dont les morphismes sont les $x: X \to X'$ tels que $Wx.f = f'$.

Dans la situation que nous envisageons, le foncteur

$$B{\downarrow}(U{\circ}L_{\langle-\rangle}B) \to B{\downarrow}U$$

est à fibres filtrantes, et donc, d'après le Théorème A de Quillen, les catégories $B{\downarrow}(U{\circ}L_{\langle-\rangle}B)$ et $B{\downarrow}U$ ont le même type d'homotopie. Et comme $B{\downarrow}(U{\circ}L_{\langle-\rangle}B)$ est petite, on obtient:

THÉORÈME (Guitart [5]). *Si* $U\colon \underline{A} \to \underline{B}$ *est un foncteur esquissable, alors pour tout objet* B *de* $\underline{B}$, *la catégorie* $B{\downarrow}U$ *a un petit type d'homotopie; en particulier si* $\underline{A} = \mathrm{Mod}_{Ens}\,\sigma$, $\underline{A}$ *a le type d'homotopie d'un petit CW-complexe noté* $g\sigma$ *et appelé géométrie de* σ.

Par exemple si σ est la théorie dont les modèles sont les résolutions complètes de $P \in Q[X]$, $g\sigma$ est le classifiant du groupe de Galois de P, de sorte que ce groupe apparaît comme $\pi_1 g\sigma$ (groupe de Poincaré de $g\sigma$).

9. Avec les notations du §7, soit $\mathrm{PROJ}_{dis}\,\underline{A}$ (resp. $\mathrm{PROJ}_{con}\,\underline{A}$) la sous-catégorie pleine de PROJ-$\underline{A}$ dont les objets sont les $F\colon \underline{I} \to \underline{A}$ avec $\underline{I}$ catégorie discrète (resp. connexe). On a

$$\text{PROJ-}\underline{A} \simeq \mathrm{PROJ}_{dis}\,\mathrm{PROJ}_{con}\,\underline{A}$$

de sorte que Spec_U (du §7) est isomorphe à $\mathrm{Spec}_{\mathrm{PROJ}_{con}\text{-}U}$ (du §2). L'approche de Diers [2] est alors reproductible de sorte à décrire une topologie spectrale sur l'ensemble des composantes connexes de $g\sigma$, d'où un espace spectre $S\sigma$ et un morphisme continu $g\sigma \to S\sigma$.

10. La catégorie *Top* des espaces topologiques n'est pas esquissable au sens strict. Par contre elle est P-esquissable au sens:

Une *P-esquisse* est un couple (σ, E), où σ est une esquisse et où $E \subset \underline{S}\times\underline{S}$; un modèle de (σ, E) est un modèle R de σ tel que, pour tout $(f, g) \in E$, on ait $P(R(f)) = R(g)$, où $P\colon Ens \to Ens$ est le foncteur "parties".
Les catégories Ens^{op}, *Top* sont P-esquissables.

On a un *principe de dualité*: si $\underline{X}$ est P-esquissable, alors $\underline{X}^{op}$ l'est aussi.

On peut montrer (les détails paraîtront ultérieurement) que si $U\colon \underline{A} \to \underline{B}$ est un foncteur P-esquissable, les théorèmes des §§6 à 9 sont encore valables, et donc PROJ-U: PROJ-$\underline{A} \to$ PROJ-$\underline{B}$ a un adjoint à gauche et, vu le principe de dualité, INDU-U: INDU-$\underline{A}$ → INDU-$\underline{B}$ a un adjoint à droite (avec INDU-$\underline{A}$ = (PROJ-$\underline{A}^{op}$)^{op}).

On montre aussi que si $\underline{A}$ est P-esquissable, alors dans $\underline{A}$ les idempotents se scindent.

Ceci permet d'obtenir des résultats du type Birkhoff:

THÉORÈME. Soit U: $\mathrm{Mod}_{Ens}(\sigma, E) \hookrightarrow Ens^{S}_{-}$. *Alors* U *a un adjoint à gauche (resp. à droite) ssi pour tout diagramme* F: $\underline{I}$ → $\mathrm{Mod}_{Ens}(\sigma, E)$ *avec* $\underline{I}$ *petite, on a*

$$\varprojlim(U \circ F) \in \mathrm{Mod}_{Ens}(\sigma, E) \quad (resp.\ \varinjlim(U \circ F) \in \mathrm{Mod}_{Ens}(\sigma, E)).$$

Remarquons pour terminer que l'on peut reprendre toute la théorie, exposée ici pour des modèles dans *Ens*, dans le cas des *modèles topologiques* (i.e. dans *Top*). Par exemple dans des situations:

$\underline{A}$ = Corps topologiques, $\underline{B}$ = Anneaux topologiques,

ou $\underline{A}$ = Anneaux locaux topologiques, $\underline{B}$ = Anneaux topologiques,

on obtient des spectres "non-discrets", c'est-à-dire des petits diagrammes localement libres où $\underline{I}$ n'est pas discrète.

RÉFÉRENCES.

1. M. COSTE, Localisation, spectra and sheaf representation, *Lecture Notes in Math.* 753, Springer (1979).
2. Y. DIERS, Une construction universelle des spectres, topologies spectrales et faisceaux structuraux, *Comm. in Algebra* 12 (17), (1984), 2141-2183.
3. C. EHRESMANN, *Oeuvres complètes et commentées;* Partie IV-1, Esquisses et complétions, Edité et commenté par A.C.EHRESMANN, Amiens 1981.
4. R. GUITART & C. LAIR, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4, Paris (1980), 1-106.
5. R. GUITART, Elements of a geometrical study of algorithms (à paraître).

4. TYPE D'HOMOTOPIE DES THEORIES*

1. Une *P-esquisse* est une donnée S = ($\underline{S}$, $\underline{P}$, $\underline{Y}$, E) avec $\underline{S}$ une petite catégorie, P un ensemble de petits cônes projectifs sur $\underline{S}$, $\underline{Y}$ un ensemble de petits cônes inductifs sur S, et E une partie de $\underline{S}\times\underline{S}$. Un *modèle* de S est un foncteur M: $\underline{S} \to$ *Ens* qui transforme en limites projectives (resp. inductives) les éléments de $\underline{P}$ (resp. de $\underline{Y}$) et qui satisfait à

$$P(M(f)) = M(g) \text{ pour tous les } (f, g) \in E,$$

avec *P*: *Ens* $\to$ *Ens* le foncteur "parties". On désigne par *P-esq* la catégorie des *P*-esquisses et foncteurs compatibles. On désigne par mod S la catégorie des modèles de S, avec pour morphismes les transformations naturelles. On désigne par *CATMOD* la sous-catégorie de *CAT* ayant pour objets les mod S et pour morphismes les

$$\text{mod } F: \text{mod } S \to \text{mod } T, \quad \text{avec} \quad F: T \to S.$$

On démontre que *CATMOD* a pour objets: les catégories d'algèbres de triples avec rang, les catégories de faisceaux, la catégorie des compacts, la catégorie des topologies, les catégories de modèles de théories du premier ordre, les catégories de modèles de sites, les catégories d'algèbres topologiques, etc. On démontre aussi que *CATMOD* est stable dans *CAT* par limites projectives et que, pour toute S, il existe S*' telle que (mod S)^{op} soit équivalente à mod S*.

2. Si $\underline{C}$ est une catégorie non nécessairement petite, son espace classifiant est $B\underline{C} = (\bigcup_{n\geq 0} (N\underline{C})_n \times \Delta_n)/\sim$, où

$$(N\underline{C})_n = \{(f_1,\ldots,f_n) \in \underline{C}^n \mid \text{cod } f_i = \text{dom } f_{i+1},\ 1 \leq i \leq n\}$$

est muni de la topologie discrète, où

$$\Delta_n = \{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1,\ \Sigma t_i = 1,\ 0 \leq i \neq n \}$$

est muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^{n+1}$, et où ~ est décrit par:

$$\begin{gathered} \langle (f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}.f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n), (t_0, \ldots, t_{n-1})\rangle \sim \\ \langle (f_1, \ldots, f_n), (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})\rangle, \\ \langle\langle (f_1, \ldots, f_i, Id_{\text{cod} f_i}, f_{i+1}, \ldots, f_n), (t_0, \ldots, t_{n+1})\rangle \sim \\ \langle\langle (f_1, \ldots, f_n), (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1})\rangle, \end{gathered}$$

ceci pour tous les $i \leq n$ et tous les $n \geq 0$.

---

* Exposé au Peripatetician S.S.L., 3/3/1984, Paris.

On définit ainsi un foncteur B: *CAT* $\to$ *TOP*. On notera ici

$$i: Hotop \to HoTOP \quad \text{et} \quad q: TOP \to HoTOP$$

les foncteurs canoniques.

3. ***THÉORÈME* 1.** *Pour toute P-esquisse* S *on peut construire par récurrence transfinie un ensemble* γS *dans la classe* B(mod S) *tel que* $\gamma S \to$ B(mod S) *soit une équivalence d'homotopie, et on détermine ainsi un foncteur* γ *à petites valeurs tel que* $i\circ\gamma$ *soit naturellement isomorphe à* $q\circ B\circ \mathrm{mod}$, *soit* γ: $(P\text{-}esq)^{op} \to Hotop$.

***THÉORÈME* 2.** *On a un "principe de dualité":* $\gamma S \simeq \gamma S^*$.

Si S est algébrique, $\gamma S \simeq \bullet$, et si S est multialgébrique γS est discret; voici deux cas plus riches, assez typiques:

- On désigne par *POLY* la catégorie des (K, P), avec K un corps commutatif et P un polynôme sur K, un morphisme de (K, P) vers (K', P') étant un morphisme de corps u : K $\to$ K' tel que u P = P'. On désigne par *SOL* la sous-catégorie pleine de *POLY* ayant pour objets les (K, P) avec K contenant toutes les racines de P. Pour (K, P) dans *POLY*, soit sol(K, P) la *P*-esquisse dont les modèles sont les

$$s : (K, P) \to (K', P') \quad \text{avec} \quad (K', P') \in SOL.$$

***THÉORÈME* 3.** *On a* γ sol(K, P) $\simeq$ B Galois(K, P).

En particulier on peut définir le groupe de Galois par:

$$\mathrm{Galois}(K, P) = \pi_1\gamma\ \mathrm{sol}(K, P).$$

- On désigne par *Top* la catégorie des espaces topologiques et par 1-*Plein* sa sous-catégorie pleine ayant pour objets les espaces X satisfaisant à: 1° X est connexe et est localement "connexe et simplement connexe"; 2° X est simplement connexe.

Pour X $\in$ *Top*, soit 1-remplissage(X) la *P*-esquisse dont les modèles sont les u : X' $\to$ X avec X' $\in$ 1-*Plein*.

***THÉORÈME* 4.** *Soit* X *un espace connexe et localement "connexe et simplement connexe"; alors on a:*

$$\gamma\ 1\text{-remplissage}\ (X) \simeq B\ \mathrm{Poincaré}(X).$$

En particulier on peut définir le groupe de Poincaré par:

$$\mathrm{Poincaré}(X) = \pi_1\ \gamma\ 1\text{-remplissage}(X).$$

5. ELEMENTS OF A GEOMETRICAL STUDY OF ALGORITHMS*

0. Motivations.

As a byproduct of the theory of satellites exposed in "Calcul de satellites" (*Cahiers Top. et Géom. Diff.*, 1983), I have a "complete" non-abelian cohomology for groupoids. Now I plan to use this cohomology to study *algorithms* (ends of computations, loops, *ambiguity*). So I have firstly to associate to each algorithm a fundamental groupoid, or even a *homotopy type.* The purpose of this talk is to show how this is possible. For that, I shall explain three claims:

Claim 1. An algorithm A can be seen as a (mixed) sketch S and this point of view allows a natural description of recursive partial functions.

Claim 2. To an arbitrary (mixed) sketch S it is possible to associate a small homotopy type $\mathcal{g}S$, which is often a BGS, where GS is "the" fundamental groupoid of S.

Claim 3. In this way it is possible to get Galois's and Poincaré's groupoids, two main dual attempts in order to develop a mathematical description of ambiguity in reality.

1. Algorithms as sketches.

In the paper "Sketch of programs" (to appear) a full description of the link between sketches and programs is exhibited. Here I'll just give one elementary example.

Let c: $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ be the map given by:

$$c(a,b) = \begin{cases} (ab+1)^2/2 & \text{iff } a \text{ and } b \text{ are odd} \\ ab/2 & \text{iff } a \text{ or } b \text{ is even} \end{cases}$$

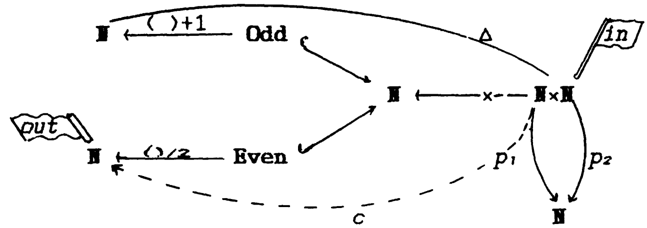
I recall that a sketch S = ($\underline{S}$, $\underline{P}$, $\underline{I}$) consists of a category $\underline{S}$ equipped with a family $\underline{P}$ of projective cones and a family $\underline{I}$ of inductive cones, with $\underline{S}$, $\underline{P}$ and $\underline{I}$ small, and each element of $\underline{P}$ or $\underline{I}$ small. A realization R of S in *Set* is a functor R: $\underline{S} \to$ *Set* which transforms each element of $\underline{P}$ (resp. of $\underline{I}$) into a projective limit cone (resp. an inductive limit cone) in *Set*.

----

* Lecture given at the "Category Theory at Löwenburg Manor", Univ. of Fribourg and Univ. of Genève, 23-28/7/1984.

If we consider the figure

(R$_o$)



the dotted arrow c is "computed" by a sequence of actions and tests: for $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, take $\times(a, b)$; test if the result is in **Odd** or in **Even**: Iff in **Odd**, take ( )+1 and Δ and $\times$, and test if the result is in **Odd** of **Even**, and so on. Iff in **Even**, take ( )/2.

In (R$_o$) there is a projective cone describing the *in*-objet as a product $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ of two copies of the *out*-object $\mathbb{N}$, and there is an inductive cone describing the target $\mathbb{N}$ of $\times$ as a sum **Odd** ⨿ **Even**.

(R$_o$) can be enlarged to R by adding other cones:

- an inductive cone describing

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq (\mathrm{Odd}\times\mathrm{Odd}) \amalg ((\mathrm{Odd}\times\mathrm{Even}) \amalg (\mathrm{Even}\times\mathrm{Odd}) \amalg (\mathrm{Even}\times\mathrm{Even}),$$

with two inclusions

u: $\mathrm{Odd}\times\mathrm{Odd} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\quad v$: $(\mathrm{Odd}\times\mathrm{Even}) \amalg (\mathrm{Even}\times\mathrm{Odd}) \amalg (\mathrm{Even}\times\mathrm{Even}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

- a projective cone with vertex **Odd×Odd** and base

$$\mathbb{N} \xleftarrow{(\ )/2} \mathrm{Even} \xrightarrow{i} \mathbb{N} \xleftarrow{\times} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xleftarrow{\Delta} \mathbb{N} \xleftarrow{(\ )+1} \mathrm{Odd} \xrightarrow{i} \mathbb{N} \xleftarrow{\times} \mathbb{N}\times\mathbb{N},$$

the first projection being u and the last k,

- a projective cone with vertex (**Odd×Even**) ⨿ (**Even×Odd**) and base

$$\mathbb{N} \xleftarrow{(\ )/2} \mathrm{Even} \xrightarrow{i} \mathbb{N} \xleftarrow{\times} \mathbb{N}\times\mathbb{N},$$

the first projection being v and the last l.

- Finally we assume that $c.u = k$, $c.v = l$.

Clearly R$_o\setminus\{c\}$, R and $\{c\}$ are realizations in *Set* of sketches $\rho_o\setminus\{\gamma\}$, ρ, $\{\gamma\}$, and in this situation

$$\begin{tikzcd} \rho_o\setminus\{\gamma\} \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "R_o\setminus\{c\}"'] & \rho \arrow[d, "R"] \arrow[dr, phantom, "="] & \{\gamma\} \arrow[l, "J"'] \arrow[dl, "\ulcorner c \urcorner"] \\ & Set & \end{tikzcd}$$

we can check that: $[c]$ *is computed by the computer* $R_{\circ}\setminus\{c\}$ *with the program* $\langle I, J\rangle$, according to the following definition:

DEFINITION. Let α, β and ρ be sketches, $I: \alpha \to \rho$ and $J: \beta \to \rho$ morphisms of sketches, and $A: \alpha \to Set$ be a realization of α. We say that $B: \beta \longrightarrow Set$ *is computed by* α with (I, J) iff $B = R.J$ where R is the free realization of ρ generated by A.

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "A"'] & \rho \arrow[d, "R"] & \beta \arrow[l, "J"'] \arrow[dl, "B"] \\
& Set &
\end{tikzcd}$$

REMARKS. In general R does not exist (ρ is a mixed sketch, i.e., it has projective *and* inductive cones); and if it exists, it is not unique (but only unique up to an isomorphisme). Nevertheless we explain in "Sketch of programs" why this description of program schemes as mixed sketches (ρ), with such a universal semantics, is useful. For example B is *effectively computable* by A iff it is computed by A with (I, J) finite (for a good definition of finite, which is not reproduced here!).

2. Fundamental groupoid of a sketch.

Let $S \to S'$ be a morphism of (mixed) sketches, and

$$U: \mathrm{Real}(S', Set) \to \mathrm{Real}(S, Set)$$

the induced functor between the categories of realizations. In general U has no adjoint. But the *Guitart-Lair's Theorem* asserts that for each $R: S \to Set$ we can construct by transfinite induction a *small* category $\underline{I}(R)$ and a functor $F(R): \underline{I}(R) \to \mathrm{Real}(S', Set)$ such that for each realization $R': S' \to Set$ we have

$$\mathrm{Hom}(R, UR') \simeq \varinjlim_{i \in \underline{I}(R)} \mathrm{Hom}(F(R)(i), R').$$

This theorem can be understood as a Lowenheim-Skolem's type of result, because the transfinite induction gives in fact a control of the cardinals of $\underline{I}(R)$ and of the $F(R)(i)$. Usually, in order to construct the free algebra generated by R, we construct an algebra of terms. But in the non-algebraic case, there are ambiguities at each step in the description of new terms. For example in the "free field construction" with each new term x we have to add a new y such that ($yx = 1$ or $x = 0$) and at the same time we have to *choose* the part played by y : ($yx = 1$) or ($x = 0$). In the general situation there is a transfinite sequence of such choices, blowing the algebra of terms into a family, indexed by $\mathrm{I}(\mathrm{R})$, of realizations. For example starting with the ring $\mathbf{Z}$ and trying to construct a free field we get in fact the family

$$\{\mathbf{Q}\} \cup \{\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \mid p \text{ prime } \}.$$

As a special case of the theorem, there is no initial object in Real(S, *Set*), but there exists a *small* diagram

$$\mathrm{F}^s(\emptyset)\colon \mathrm{I}^s(\emptyset) \to \mathrm{Real}(\mathrm{S},\ \mathit{Set})$$

such that for each realization $\mathrm{R}\colon \mathrm{S} \to \mathit{Set}$ we have

$$\{\bullet\} = \lim_{i\in \mathrm{I}^s(\emptyset)} \hom(\mathrm{F}^s(\emptyset)(i),\ \mathrm{R}).$$

Now by a countable induction we may construct $\mathrm{I}^s(\emptyset)^-$ with the same cardinal as $\mathrm{I}^s(\emptyset)$, such that

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}^s(\emptyset) \arrow[rr, "\mathrm{F}^s(\emptyset)"] \arrow[dr] & {} \arrow[d, phantom, "="] & \mathrm{Real}(\mathrm{S},\ \mathit{Set}) \\ & \mathrm{I}^s(\emptyset)^- \arrow[ur, "\mathrm{F}^s(\emptyset)^-"'] & \end{tikzcd}$$

and such that $\mathrm{F}^s(\emptyset)^-$ admits filtered fibres. Then by Theorem A of Quillen, $\mathrm{F}^s(\emptyset)^-$ is a weak homotopy equivalence, i.e.,

$$\mathrm{B}\ \mathrm{F}^s(\emptyset)^-\colon \mathrm{B}\ \mathrm{I}^s(\emptyset)^- \longrightarrow \mathrm{B}\ \mathrm{Real}(\mathrm{S},\ \mathit{Set})$$

is a homotopy equivalence between a large CW-complexe B Real(S, *Set*) (which is a class and not a set) and the small CW-complexe $\mathrm{B}\ \mathrm{I}^s(\emptyset)^-$ (which is a set). So the small homotopy type of $\mathrm{B}\ \mathrm{I}^s(\emptyset)^-$ depends in fact only on S, and will be denoted by g S. It is the homotopy type of S. If S is the sketch ρ in §1 associated to an algorithm A, this gives a precise construction of the *homotopy type of an algorithm*.

The fundamental groupoid GS of g S (defined up to an equivalence) will be called the *fundamental groupoid of* S. Again by Theorem A of Quillen, applied to the functor

$$\mathrm{R}(\mathrm{S},\ \mathit{Set}) \to \mathrm{R}(\mathrm{S},\ \mathit{Set})[\ \mathrm{R}(\mathrm{S},\ \mathit{Set})^{-1}] \simeq \mathrm{GS},$$

we see that $g\ \mathrm{S} \simeq \mathrm{BGS}$ if in Real(S, *Set*):

1. For each $\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, "v"] \\ \cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot \end{tikzcd}$ there is a square $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[d, "v"] \\ \cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot \end{tikzcd}$

2. For each $\underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \xrightarrow{w}$ with $w.u = w.v$, there is a

$$\xrightarrow{k} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \qquad \text{with} \qquad u.k = v.k.$$

3. Galois and Poincaré groupoids.

Let K be a commutative field of characteristic 0, and $P \in K[X]$. Let SOL(K, P) be the category with objects the resolutions of (K, P), i.e., the $(u\ ;\ K')$ with K' a field where P is completely split and u: $K \to K'$ a morphism of fields such that $u(P) = P$. Then there exists a mixed sketch $S_{K,P}$ with

$$\mathrm{SOL}(K, P) \simeq \mathrm{Real}(S_{K,P}, \mathit{Set}) \quad \text{and} \quad g\, S_{K,P} = B\ \mathrm{Galois}\ (K, P).$$

Let T be a topological space which is connected and locally "connected and simply connected". Let PIE(T) be the category with objects the pieces of T, i.e., the $(u\ ;\ T')$ with T' connected, simply connected, locally "connected and simply connected", and with u: $T' \to T$ a continuous map. Then there exists a mixed sketch ρ_T with

$$\mathrm{PIE}(T) \simeq \mathrm{Real}(\rho_T, \mathit{Set}) \quad \text{and} \quad g\, \rho_T = B\ \mathrm{Poincaré}(T).$$

REMARKS. So this approach provides candidates for Galois or Poincaré groups in various examples: Galois groups for $P \in A[[X]]$, with A a ring, Poincaré groups for a topos, and so on. The machinery works each time, after specifying the class of trivial objects we want to consider (e.g., decomposition field, simply connected spaces,...).

If TS is the classifying topos of the theory described by S, Real(S, *Set*) is the category of points of TS. So in order to interprete the homotopy type of a topos $\mathcal{T}$ our approach hereover suggests to look for an algorithm A described by a sketch α such that $\mathcal{T} \simeq T\alpha$; then the homotopy of $\mathcal{T}$ speaks of the ambiguity of this algorithm.

6. COMMENTS (1986)

1. The five preceding Notes are reproduced in the form they were circulated in at the moment of the corresponding lectures. They were not published before, because I intended to write a more complete paper on *ambiguity*, but I have been engaged in other Mathematics since automn 1984. However it seems interesting to publish them now, due to the recent surge of interest on sketch theory, of which I am going to indicate some directions.

2. The general results on sketches (quoted here in the first part, and taken from [10], 1980) are: the computation of limits and ultralimits of models, the existence of small locally free diagrams, the characterization of a category of models of a site, and the characterization of multialgebraic (i.e., localizable) categories of Diers; in [13], 1981, Lair has completely characterized the categories of models of *any mixed sketch* (cf. also [14]). Interesting variations and complements on these results are given in [2] and [3].

3. The existence of small locally free diagrams, as it is completed in [11], admits a good formulation in terms of categories equipped with an "epi-strong mono" decomposition structure (see [8]).

4. If Ens$^\sim$ is the category of partial maps between sets, a category enriched in Ens$^\sim$ reduces to a multiplicative graph (associative); so, for the definition of a sketch, it is not so important to choose between categories or multiplicative graphs: both definitions are contained in the notion of enriched sketches, as it is developed in [6] and [7].

5. At the Löwenburg Manor Meeting where the fifth above talk was presented, Gray exposed [4] and [5], in which he constructs a modification of the tensor product of sketches and proves its usefulness for the description of a program.

6. Other aspects of my work around sketches are given in [9], where links between bimodules, figurative algebras, mixed sketches, initial algebras (in the sense of the A.D.J. team [1]) are explained.

7. Finally let us point out three original results contained in the preceding talks and which have not had an echo in other recent works:

the idea of a P-sketch (which makes a jonction between "sketch" and "algebraic universe"),

the idea of the small homotopy type of a sketch, and so of a theory, of an algorithm (which amalgamates our Theorem on the existence of locally free diagrams [11] and the Quillen Theorem A on functors inducing homotopy equivalences);

the description of programs by means of mixed sketches (but a posteriori this appears as a categorical version of Herbrand's schemes).

1. A.D.J., Abstract data types as initial algebras and the correction of data representations, *Proc. Conf. on Computer Graphics, Pattern recognition and Data structures*, Beverley Hills, 1975, pp. 89-93.
2. M. BARR, Models of sketches, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXVII-2 (1986), 93-107.
3. M. BARR & C. WELLS, *Toposes, Triples and Theories*, Springer, 1984.
4. J.W. GRAY, Categorical aspects of parametric data types, *Bull. Australian Math. Soc.* 26 (1982), 45-56.
5. J.W. GRAY, Diagramatic representation of Computer programs, Preprint, ETH, 1984.
6. G.M. KELLY, Structures defined by finite limits in the enriched context I, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII-1 (1982), 3-42.
7. G.M. KELLY, *The basic concepts of Enriched Category Theory*, Cambridge Univ. Press, 1982.
8. G.M. KELLY, A note on the generalized reflexion of Guitart and Lair, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIV-2 (1983), 155.
9. R. GUITART, Introduction à l'Analyse algébrique I et II, *Math. et Sc. Humaines* 96 (1986) et 98 (1987) (à paraître).
10. R. GUITART & C. LAIR, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4 (1980).
11. R. GUITART & C. LAIR, Existence de diagrammes localement libres I et II, *Diagrammes* 6 (1981) et 7 (1982).
12. R. GUITART & C. LAIR, Limites et colimites pour représenter les formules, *Diagrammes* 7 (1982).
13. C. LAIR, Catégories modelables et catégories esquissables, *Diagrammes* 6 (1981)
14. F. MOUEN, Caractérisation sémantique des catégories de structures (Thèse de 3ème cycle), *Diagrammes* 11 (1984).

U.E.R. de Mathématiques & Info.,
Tours 45-55, 5e étage
Université Paris VII,
2 Place Jussieu
75005 PARIS