CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

Sur les quasi-topos

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 18, n° 2 (1977), p. 181-218

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1977__18_2_181_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XVIII-2 (1977)*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR LES QUASI-TOPOS

par Jacques PENON

INTRODUCTION.

En rédigeant cet article nous avons voulu convaincre le lecteur sur deux points :

1° Les quasi-topos [9] sont «presque» des topos. Nous entendons par là qu'ils en possèdent «presque» toutes les propriétés essentielles.

2° Il existe des exemples variés de quasi-topos utiles dans de nombreuses branches des Mathématiques (Topologie, Géométrie Différentielle ou Analytique ou même Algébrique).

Outre quelques exemples empruntés, pour la plupart, à la Topologie les quatre premiers paragraphes traitent des quasi-topos de façon abstraite, étudiant d'une part leurs propriétés et, d'autre part, les procédés pour lesquels ils sont stables.

Le cinquième paragraphe s'est attaché à caractériser un certain type de quasi-topos (les $\mathfrak{U}$-bornés), car ce sont eux qui apparaissent dans la plupart des exemples connus jusqu'ici.

Enfin dans le sixième paragraphe on a voulu montrer que les différents types de variétés connus (différentiables, analytiques, algébriques, etc...) peuvent être définis de façon simple à l'aide de certains quasi-topos (quasi-topos de p-cribles [1, 2]).

Nous voudrions mentionner, pour finir, que ce travail s'est fortement inspiré d'un article de O. Wyler [11] qu'il reprend par endroits, complète et prolonge sur certains points.

On utilise la terminologie et les notations usuelles en Théorie des topos (voir par exemple [6] et [7]).

1. CATEGORIE LOCALEMENT CARTESIENNE FERMEE.

1.1. Soit $\underline{E}$ une catégorie. Considérons alors les deux systèmes d'axiomes suivants :

Premier système d'axiomes: Pour tout objet I de $\underline{E}$, $\underline{E}/_I$ est cartésienne fermée.

Deuxième système d'axiomes :

(LCF1) $\underline{E}$ est à produits fibrés finis.

(LCF2) Pour toute flèche $f: J \to I$ de $\underline{E}$, le foncteur $f^*: \underline{E}/_I \to \underline{E}/_J$ changement de base a un adjoint à droite (noté Π_f).

1.2. THEOREME *(Day [5]). Les deux systèmes d'axiomes ci-dessus sont équivalents.*

1.3. DEFINITION. On dira que la catégorie $\underline{E}$ *est localement cartésienne fermée* (brièvement l.c.f.) si elle vérifie l'un des deux systèmes d'axiomes ci-dessus (ces catégories sont appelées «span-closed» dans la terminologie de Day [5]).

1.4. Si $\underline{E}$ est localement cartésienne fermée, elle vérifie la condition de Chevalley-Beck, i.e. pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

la transformation naturelle canonique

$$b^*\Pi_f \to \Pi_{f'}a^*: \underline{E}/_A \to \underline{E}/_B$$

est un isomorphisme.

1.5. Remarquons aussi que la propriété d'être «localement cartésienne fermée» est locale (i.e. si $\underline{E}$ est l.c.f., alors, pour tout objet I de $\underline{E}$, $\underline{E}/_I$ est encore l.c.f.).

1.6. PROPOSITION. *Soit* $\mathbf{C} = (C, \epsilon, \psi)$ *un cotriple exact à gauche sur une catégorie l.c.f. Alors la catégorie* $\underline{E}_{\mathbf{C}}$ *des* $\mathbf{C}$*-coalgèbres est l.c.f. et le fonc-*

teur $\underline{E} \to \underline{E}_{\mathbf{C}}$ *admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche.*

PREUVE. Soit (A, a) une $\mathbf{C}$-coalgèbre. Nous allons, tout d'abord, montrer qu'il existe un cotriple exact à gauche $\mathbf{C}^a$ sur $\underline{E}/_A$ pour lequel on a un isomorphisme

$$(\underline{E}/_A)_{\mathbf{C}^a} \approx \underline{E}_{\mathbf{C}}/_{(A, a)}.$$

Soit $f: B \to A$ un objet de $\underline{E}/_A$. Considérons alors le produit fibré suivant

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} C^a B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "C^a f"'] & C B \arrow[d, "C f"] \\ A \arrow[r, "a"] & C A \end{tikzcd}$$

On définit ainsi un endofoncteur $C^a: \underline{E}/_A \to \underline{E}/_A$.

Posons maintenant $\epsilon^a_B = \epsilon_B . u_B$. Comme (A, a) est une coalgèbre, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C^a B \arrow[rr, "\epsilon^a_B"] \arrow[dr, "C^a f"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

et les ϵ^a_B définissent une transformation naturelle $\epsilon^a : C^a \to Id_{\underline{E}/_A}$. Puisque l'on a les égalités

$$C^2 f . \psi_B . u_B = \psi_A . C f . u_B = \psi_A . a . C^a f = C a . a . C^a f$$

et que l'image du carré (1) par C est cartésienne (puisque C est exact à gauche), il existe un unique $\phi_B : C^a B \to C C^a B$ tel que

$$C C^a f . \phi_B = a . C^a f \quad \text{et} \quad C u_B . \phi_B = \psi_B . u_B .$$

Mais la première égalité entraîne alors, puisque le carré ci-dessous est cartésien,

$$\begin{tikzcd} (C^a)^2 B \arrow[r, "u_{C^a B}"] \arrow[d, "(C^a)^2 f"'] & C C^a B \arrow[d, "C C^a f"] \\ A \arrow[r, "a"] & C A \end{tikzcd}$$

qu'il existe un unique $\psi^a_B : C^a B \to (C^a)^2 B$ tel que

$$(C^a)^2 f . \psi^a_B = C^a f \quad \text{et} \quad u_{C^a B} . \psi^a_B = \phi_B .$$

Là encore, on voit que les ψ^a_B définissent une transformation naturelle : $\psi^a : C^a \to (C^a)^2$. On montre que $\mathbf{C}^a = (C^a, \epsilon^a, \psi^a)$ est un cotriple sur $\underline{E}/_A$. Il est exact à gauche car le foncteur $C^a : \underline{E}/_A \to \underline{E}/_A$ peut s'écrire comme le composé des deux foncteurs exacts à gauche suivants :

$$\underline{E}/_A \xrightarrow{C_A} \underline{E}/_{CA} \xrightarrow{a^*} \underline{E}/_A ,$$

où $C_A(B \xrightarrow{f} A) = CB \xrightarrow{Cf} CA$. Enfin soient les foncteurs :

1° $\gamma : (\underline{E}/_A)_{\mathbf{C}^a} \to \underline{E}_{\mathbf{C}}/_{(A,a)}$ défini par $\gamma(B, \bar{b}) = (B, u_B . \bar{b})$,

2° $\delta : \underline{E}_{\mathbf{C}}/_{(A,a)} \to (\underline{E}/_A)_{\mathbf{C}^a}$ défini par $\delta(B, b) = (B, b^a)$, où b^a est l'unique flèche $b^a : B \to C^a B$ telle que

$$C^a f . b^a = f \quad \text{et} \quad u_B . b^a = b .$$

Les deux foncteurs γ et δ étant inverses l'un de l'autre, on a un isomorphisme :

$$(\underline{E}/_A)_{\mathbf{C}^a} \approx \underline{E}_{\mathbf{C}}/_{(A,a)} .$$

Si maintenant la catégorie $\underline{E}$ est l.c.f., alors, pour tout objet A de $\underline{E}$, $\underline{E}/_A$ est cartésienne fermée. Par suite, pour toute $\mathbf{C}$-coalgèbre (A, a) la catégorie $(\underline{E}/_A)_{\mathbf{C}^a}$ est cartésienne fermée (voir la démonstration dans [7]). Il en va donc de même de la catégorie $\underline{E}_{\mathbf{C}}/_{(A,a)}$. Mais ceci signifie exactement que $\underline{E}_{\mathbf{C}}$ est l.c.f.

1.7. Si $\underline{E}$ est l.c.f., on voit (comme dans les topos) que la bicatégorie $SPAN(\underline{E})$ est bifermée.

1.8. Enfin si $\underline{C}$ est une catégorie interne dans $\underline{E}$ (i.e. une monade (T, η, μ) dans $SPAN(\underline{E})$) et $\underline{E}^{\underline{C}^o}$ est la catégorie des fibrations discrètes internes sur $\underline{C}$, alors $\underline{E}^{\underline{C}^o}$ est encore une catégorie l.c.f. (En effet, $\underline{E}^{\underline{C}^o}$ apparaît comme une catégorie d'algèbres sur $\underline{E}/_{C_0} \approx Span(C_0, 1)$ pour le triple

$$T \#\text{-}: Span(C_0\,, 1) \to Span(C_0, 1),$$

où $\#$ est le symbole de composition non strictement associative dans la bi-catégorie $SPAN(\underline{E})$. Comme $T\,\#\text{-}$ admet un adjoint à droite, il suffit alors d'appliquer le théorème d'Eilenberg-Moore ainsi que la proposition 1.6.)

2. QUASI-TOPOS.

On suppose donnée une catégorie $\underline{E}$ à limites projectives finies.

2.1. DEFINITION. $m: A \to B$ étant un monomorphisme de $\underline{E}$, on dit que m est *fort* si et seulement si, pour tout épimorphisme $f: C \to D$, le carré ci-dessous est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \underline{E}(D,A) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{E}(D,B) \arrow[d] \\ \underline{E}(C,A) \arrow[r] & \underline{E}(C,B). \end{tikzcd}$$

2.2. Les monomorphismes forts possèdent les propriétés suivantes :

1° Tout égalisateur est un monomorphisme fort.

2° Les monomorphismes forts sont stables par changement de base et par composition.

3° Si le composé $A \to B \to C$ est un monomorphisme fort, alors $A \to B$ en est encore un.

2.3. Si $p: \underline{E} \to \underline{F}$ est un foncteur admettant un adjoint à gauche, alors p préserve les monomorphismes forts.

2.4. Soit $m: A \to B$ une flèche de $\underline{E}$. Alors si le foncteur $\underline{E}/_B \to \underline{E}$ préserve les épimorphismes, m est un monomorphisme fort dans $\underline{E}$ si et seulement si la flèche ci-dessous est un monomorphisme fort dans $\underline{E}/_B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "m"'] & & B \arrow[dl, "Id_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

2.5. DEFINITION. On dit que $\underline{E}$ *est un quasi-topos* si elle vérifie les quatre axiomes suivants :

(QT1) $\underline{E}$ est à limites projectives finies (hypothèse de départ) ;

(QT2) $\underline{E}$ est à limites inductives finies ;

(QT3) $\underline{E}$ est localement cartésienne fermée (voir 1.3) ;

(QT4) $\underline{E}$ a un sous-objet $1 \xrightarrow{vrai} \Omega$ classifiant les monomorphismes forts (i.e. pour tout monomorphisme fort $A \to B$ il existe une unique flèche $B \to \Omega$ rendant le diagramme suivant commutatif et cartésien).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

2.6. REMARQUE. Cette définition diffère sensiblement de celles données dans [9] et [11]. Nous verrons pourtant plus loin (4.8) qu'elles sont équivalentes. Un des principaux intérêts de cette définition est de faire apparaître presque immédiatement le caractère local de la notion de quasi-topos.

2.7. EXEMPLES DE QUASI-TOPOS AUTRES QUE LES TOPOS.

I. Les algèbres de Heyting : On rappelle qu'une algèbre de Heyting H est un ensemble ordonné vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) H a un plus petit et un plus grand élément.

(H2) Tout couple (x, y) d'éléments de H admet une borne supérieure $x \vee y$ et une borne inférieure $x \wedge y$.

(H3) Pour tout couple (x, y) d'éléments de H il existe un élément $x \rightarrow y$ tel que, pour tout z, on ait :

$$z \leqslant x \rightarrow y \quad \text{si et seulement si} \quad z \wedge x < y.$$

II. La catégorie des «Limesraüme» de Kowalsky [8]: Rappelons-en la définition. Un «Limesraum» est un couple (E, π), où E est un ensemble et π une application de source E à valeurs dans l'ensemble des parties de l'ensemble des filtres sur E, qui vérifie les propriétés suivantes :

Pour chaque x de E, on a :

(L1) $x^{\epsilon} \in \pi(x)$ où x^{ϵ} désigne le filtre des sur-ensembles de x.

(L1) Si $\phi \in \pi(x)$ et ϕ' est un filtre plus fin que ϕ, alors $\phi' \in \pi(x)$.

(L3) Si ϕ et ϕ' appartiennent à $\pi(x)$, alors $\phi \cap \phi' \in \pi(x)$.

Un morphisme $f : (E, \pi) \to (E', \pi')$ entre «Limesraüme» est une application $f : E \to E'$ telle que, pour tout x de E et pour tout filtre $\phi \in \pi(x)$, le filtre image $f\phi$ appartienne à $\pi'(fx)$.

III. La sous-catégorie pleine de la précédente ayant pour objets les pseudo-topologies de Choquet [4]. Une pseudo-topologie est donc un «Limesraum» (E, π) qui vérifie, de plus, la condition suivante :

(P) Si tout ultrafiltre plus fin qu'un filtre ϕ appartient à $\pi(x)$, alors il en va de même de ϕ.

IV. La catégorie des quasi-topologies de Spanier [10] : Une quasi-topologie est un couple (X, A), où X est un ensemble et A une application de la classe des espaces topologiques compacts dans la classe des ensembles qui, à un espace compact C, associe un ensemble $\mathrm{A}(C)$ d'applications de C dans X. L'application A doit en plus vérifier les axiomes suivants :

(Q1) Si C est un espace à un élément : $\mathrm{A}(C) = Ens(C, X)$.

(Q2) Si $a \in \mathrm{A}(C)$ et si $f : C' \to C$ est une application continue, alors $a.f \in \mathrm{A}(C')$.

(Q3) Soient C' et C'' deux compacts ; si C est la somme directe topologique de C' et C'' et si $a : C \to X$ vérifie

$$a \restriction C' \in \mathrm{A}(C') \quad \text{et} \quad a \restriction C'' \in \mathrm{A}(C''),$$

alors $a \in \mathrm{A}(C)$.

(Q3') $\mathrm{A}(\emptyset) = Ens(\emptyset, X)$.

(Q4) Soit $f : C' \to C$ une application continue surjective entre compacts, et soit $a : C \to X$ une application ; alors si $a.f \in \mathrm{A}(C')$, on aura : $a \in \mathrm{A}(C)$.

Un morphisme $f : (X, \mathrm{A}) \to (Y, \mathrm{B})$ est une application $f : X \to Y$ telle que, pour tout compact C et tout $a \in \mathrm{A}(C)$, on $f.a \in \mathrm{B}(C)$.

V. X étant un espace topologique, la catégorie des faisceaux de fonctions sur X : Un faisceau de fonctions sur X est un couple $(E, \mathcal{F})$, où E est un ensemble et $\mathcal{F}$ une application de l'ensemble des ouverts de X dans la classe des ensembles qui à un ouvert U de X associe un ensemble

$\mathcal{F}(U)$ d'applications de U dans E. L'application $\mathcal{F}$ doit en plus vérifier les axiomes suivants :

(F1) Si V est un ouvert de X contenu dans U et $a \in \mathcal{F}(U)$, alors l'application $a \restriction V$ appartient à $\mathcal{F}(V)$.

(F2) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X, U leur réunion et si $a : U \to E$ est une application telle que, pour tout i de I, $a \restriction U_i$ appartient à $\mathcal{F}(U_i)$, alors on a $a \in \mathcal{F}(U)$.

Un morphisme $f : (E, \mathcal{F}) \to (E', \mathcal{F}')$ est une application $f : E \to E'$ telle que, pour tout ouvert U de X et tout $a \in \mathcal{F}(U)$, on a $f.a \in \mathcal{F}'(U)$.

2.8. REMARQUE. Le lecteur constatera une profonde similitude entre les exemples IV et V. En fait, nous verrons plus loin (au paragraphe 5) qu'ils apparaissent comme des cas particuliers de la notion de p-cribles [1,2]. Les exemples II et III peuvent aussi être décrits de façon similaire, comme le montre la remarque 5.17.

2.9. Supposons que la catégorie $\underline{E}$ vérifie les axiomes (QT1), (QT2) et (QT3). Alors, dans $\underline{E}$:

1° les limites inductives sont stables par changement de base,

2° les épimorphismes sont stables par changement de base,

3° les coégalisateurs se composent,

4° toute flèche $A \to B$ se décompose sous la forme $A \to \hat{B} \to B$, où $\hat{B} \to B$ est un monomorphisme et $A \to \hat{B}$ un coégalisateur,

5° tout épimorphisme fort (i.e. monomorphisme fort dans $\underline{E}^o$) est un coégalisateur,

6° O, son objet initial, est strict (i.e. toute flèche $A \to O$ est inversible),

7° les flèches de la forme $O \to A$ sont des monomorphismes.

2.10. Supposons maintenant que la catégorie $\underline{E}$ vérifie les axiomes (QT1), (QT2) et (QT4). Alors, dans E :

1° tout monomorphisme fort est un égalisateur,

2° toute flèche $f : A \to B$ se décompose sous la forme $A \to \hat{B} \to B$, où $\hat{B} \to B$ est un monomorphisme fort et $A \to \hat{B}$ un épimorphisme.

A partir de maintenant, $\underline{E}$ sera un quasi-topos.

2.11. Pour chaque objet A de $\underline{E}$ notons $mon(A)$ (resp. $mof(A)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{E}/_A$ ayant pour objets les monomorphismes (resp. les monomorphismes forts) de but A. Comme pour toute flèche $f: A \to B$, le foncteur $f^*: \underline{E}/_B \to \underline{E}/_A$ préserve les monomorphismes et les monomorphismes forts (2.2.2), on a donc les foncteurs restrictions :

$$\overset{-1}{f} : mon(B) \to mon(A) \quad \text{et} \quad \overset{-1}{f} : mof(B) \to mof(A).$$

2.12. 1° Pour tout objet A de $\underline{E}$, $mon(A)$ et $mof(A)$ sont des algèbres de Heyting.

2° Pour toute flèche $f: A \to B$,

$$\overset{-1}{f} : mon(B) \to mon(A) \quad (\text{resp. } \overset{-1}{f} : mof(B) \to mof(A))$$

admet un adjoint à gauche $\exists_f$ (resp. $\bar{\exists}_f$) et un adjoint à droite, noté $\forall_f$ (resp. $\bar{\forall}_f$).

2.13. A et B étant deux objets de $\underline{E}$, notons $Ref(A,B)$ la sous-catégorie pleine de $Span(A,B)$ ayant pour objets les relations fortes (i.e. les spans $A \leftarrow R \to B$ tels que la flèche $R \to A \times B$ soit un monomorphisme fort). Notons aussi $\mathrm{R}(A,B)$ le quotient de $Ref(A,B)$ pour la relation d'équivalence d'isomorphisme. Comme dans $\underline{E}$ les épimorphismes sont stables par changement de base (2.9.2), on construit ainsi une catégorie, notée $\mathrm{R}(\underline{E})$. De plus, on a deux foncteurs canoniques

$$I: \underline{E} \to \mathrm{R}(\underline{E}), \quad * : \mathrm{R}(\underline{E}) \to \mathrm{R}(\underline{E})^o .$$

2.14. Le foncteur $I : \underline{E} \to \mathrm{R}(\underline{E})$ admet un adjoint à droite $P : \mathrm{R}(\underline{E}) \to \underline{E}$, où pour tout objet A de $\underline{E}$, $PA = \Omega^A$. Ceci permet de construire les deux foncteurs

$$\overleftarrow{P} : \underline{E} \to \underline{E}^o \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} : \underline{E} \to \underline{E}$$

comme étant respectivement les composés suivants :

$$\underline{E} \xrightarrow{I} \mathrm{R}(\underline{E}) \xrightarrow{\quad * \quad} \mathrm{R}(\underline{E})^o \xrightarrow{P^o} \underline{E}^o ,$$
$$\underline{E} \xrightarrow{I} \mathrm{R}(\underline{E}) \xrightarrow{P} \underline{E} .$$

2.15. Soit $f: A \to B$ une flèche de $\underline{E}$. Alors :

1° Si f est un monomorphisme,

$$I(f)^*.I(f) = Id_A \quad \text{et par suite} \quad \overleftarrow{P}f.\overrightarrow{P}f = Id_{PA}.$$

2° Si f est un épimorphisme,

$$I(f).I(f)^* = Id_B \quad \text{et par suite} \quad \overrightarrow{P}f.\overleftarrow{P}f = Id_{PB}.$$

2.16. 1° Soit $R \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} A$ une relation d'équivalence forte et $f: A \to \Omega^A$ le morphisme correspondant. Alors le diagramme suivant commute et est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & \Omega^A \end{tikzcd} .$$

2° Toute relation d'équivalence forte est une paire égalisatrice.

3° Pour tout objet A de $\underline{E}$, $\{.\}_A : A \to \Omega^A$ est un monomorphisme, où $\{.\}_A$ est le morphisme d'adjonction pour $I \dashv P$.

2.17. 1° Ω est un objet injectif (i.e. pour tout monomorphisme $A \to B$, $\underline{E}(B,\Omega) \to \underline{E}(A,\Omega)$ est surjectif).

2° Pour tout objet A de $\underline{E}$, Ω^A est injectif.

3° Tout objet de $\underline{E}$ est un sous-objet d'un objet injectif.

4° Si le carré ci-dessous à gauche est cartésien et est formé de monomorphismes, alors le carré de droite est co-cartésien (i.e. est une somme amalgamée)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{P}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}(B) \arrow[d] \\ \mathrm{P}(C) \arrow[r] & \mathrm{P}(A) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{P}(A) = \mathrm{R}(A, 1)$.

5° Si E est un objet injectif de $\underline{E}$, alors le foncteur $\underline{E}(-, E)$ envoie un produit fibré de monomorphismes sur une somme amalgamée.

6° Un carré de monomorphismes forts est cartésien si, et seulement si, pour tout objet injectif E de $\underline{E}$, son image par $\underline{E}(-, E)$ est cocartésienne.

3. CONSTRUCTION DE QUASI-TOPOS.

3.1. Si $\underline{E}$ est un quasi-topos, alors, pour tout objet I de $\underline{E}$, la catégorie $\underline{E}/_I$ est encore un quasi-topos.

3.2. PROPOSITION *(Wyler [11]). Soit* $\mathbf{C}$ *un cotriple exact à gauche sur un quasi-topos* $\underline{E}$. *Alors la catégorie* $\underline{E}_{\mathbf{C}}$ *des* $\mathbf{C}$*-coalgèbres est encore un quasi-topos et le foncteur* $\underline{E} \to \underline{E}_{\mathbf{C}}$ *admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche.*

PREUVE. On sait que $\underline{E}_{\mathbf{C}}$ vérifie (QT1) et (QT2) (voir par exemple [7]) ainsi que (QT3) (d'après 1.6). Enfin (comme dans le cas des topos) l'objet classifiant les monomorphismes forts est l'égalisateur du couple de flèches suivant :

$$(C\Omega, \psi_\Omega) \underset{Id}{\overset{C\epsilon\,.\,\psi_\Omega}{\rightrightarrows}} (C\Omega, \psi_\Omega).$$

3.3. DEFINITION. $\underline{E}$ étant un quasi-topos,

1° on appelle *topologie sur* $\underline{E}$ la donnée, pour chaque objet A de $\underline{E}$, d'un foncteur $\gamma_A : Mon(A) \to Mon(A)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(T1) $(A' \rightarrowtail A) \leqslant \gamma_A(A' \rightarrowtail A)$;

(T2) $\gamma_A \gamma_A(A' \rightarrowtail A) \approx \gamma_A(A' \rightarrowtail A)$;

(T3) Pour tout $f: B \to A$, $\overset{-1}{f}(\gamma_A(A' \rightarrowtail A)) \approx \gamma_B(\overset{-1}{f}(A' \rightarrowtail A))$;

(T4) Si $A' \rightarrowtail A$ est fort, alors il en est de même de $\gamma_A(A' \rightarrowtail A)$;

2° on dit qu'un monomorphisme $A' \rightarrowtail A$ *est fermé* (resp. *dense*) *pour* γ si l'on a :

$$\gamma(A' \rightarrowtail A) \approx (A' \rightarrowtail A) \quad (\text{resp. } \gamma(A' \rightarrowtail A) \approx (A \overset{Id}{\rightarrowtail} A));$$

3° on dit qu'un objet A de $\underline{E}$ *est séparé* (resp. est un *faisceau*) si, pour tout monomorphisme dense $d: C \rightarrowtail D$, l'application canonique

$$\underline{E}(D, A) \to \underline{E}(C, A)$$

est injective (resp. bijective).

3.4. PROPOSITION *(Wyler [11]). Soit* γ *une topologie sur un quasi-topos*

$\underline{E}$; alors les objets séparés (resp. les faisceaux) pour γ définissent une sous-catégorie pleine $Sp_\gamma(\underline{E})$ (resp. $Fais_\gamma(\underline{E})$) de $\underline{E}$ qui est réflexive. De plus la catégorie $Fais_\gamma(\underline{E})$ est un quasi-topos et le réflecteur de $\underline{E}$ vers $Fais_\gamma(\underline{E})$ préserve les limites projectives finies.

PREUVE. On montre (comme dans le cas des topos) que $Fais_\gamma(\underline{E})$ est à limites projectives finies et est cartésienne fermée. De plus on remarque que, pour tout faisceau F pour γ, on a l'égalité

$$Fais_\gamma(\underline{E})/_F = Fais_{\gamma_F}(\underline{E}/_F),$$

où γ_F est la topologie sur $\underline{E}/_F$ définie par :

$$\gamma_F\left(\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}$$

avec $\bar{A} \rightarrowtail B = \gamma(A \rightarrowtail B)$. Ceci permet de conclure que $Fais_\gamma(\underline{E})$ est l.c.f. Enfin l'objet classifiant les monomorphismes forts est (comme dans le cas des topos) l'égalisateur des deux flèches $\Omega \underset{Id}{\overset{j}{\rightrightarrows}} \Omega$, où j est la fonction caractéristique de $\gamma(1 \overset{vrai}{\rightarrowtail} \Omega)$. Pour la fin de la proposition, on procèdera, par exemple, comme dans [6] en utilisant la Proposition 2.17.

3.5. REMARQUE. La construction du faisceau associé par P. Johnstone n'est plus valable ici.

3.6. Toute sous-catégorie exactement réflexive (i.e. réflexive, à réflecteur exact à gauche) d'un quasi-topos est une catégorie de faisceaux pour une certaine topologie.

3.7. Si $\underline{C}$ est une catégorie interne dans un quasi-topos $\underline{E}$, alors la catégorie $\underline{E}^{\underline{C}^o}$ des fibrations discrètes internes sur $\underline{C}$ est un quasi-topos.

3.8. DEFINITION. $\underline{E}$ étant une catégorie et $\underline{F} \to \underline{E}$ une catégorie fibrée sur $\underline{E}$, on dit que $\underline{F} \to \underline{E}$ est :

1° à *limites projectives* (resp. *inductives*) *finies* si :

a) pour tout objet I de $\underline{E}$, la fibre $\underline{F}_I$ est à limites projectives (resp. inductives) finies,

b) pour toute flèche $f: J \to I$ de $\underline{E}$, le foncteur image inverse f^*: $\underline{F}_I \to \underline{F}_J$ préserve les limites projectives (resp. inductives) finies ;

2° à *produits* (resp. *sommes*) *internes* si :

a) pour toute flèche $f: J \to I$ de $\underline{E}$, le foncteur image inverse f^*: $\underline{F}_I \to \underline{F}_J$ admet un adjoint à droite Π_f (resp. à gauche Σ_f)

b) pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} J' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & J \arrow[d, "f"] \\ I' \arrow[r, "g"] & I \end{tikzcd}$$

dans $\underline{E}$, la flèche canonique $g^*\Pi_f \to \Pi_{f'}g'^*$ (resp. $\Sigma_{f'}g'^* \to g^*\Sigma_f$) est un isomorphisme (condition de Chevalley-Beck) ;

3° *complète* (resp. *cocomplète*) si $\underline{F} \to \underline{E}$ est à limites projectives (resp. inductives) finies et à produits (resp. sommes) internes ;

4° *cartésienne fermée* (resp. *localement cartésienne fermée*, *un quasi-topos*, *un topos*) si :

a) pour tout objet I de $\underline{E}$, $\underline{F}_I$ est cartésienne fermée (resp. l.c.f., un quasi-topos, un topos),

b) pour toute flèche $f: J \to I$ de $\underline{E}$, $f^*: \underline{F}_I \to \underline{F}_J$ préserve la structure cartésienne fermée (resp. l.c.f., de quasi-topos, de topos).

Pour avoir plus de détails sur ces questions, on peut consulter [3].

3.9. 1° Les catégories fibrées à limites projectives finies (resp. à limites inductives finies, cartésiennes fermées, l.c.f., qui sont des quasi-topos, qui sont des topos) sont stables par changement de base.

2° Considérons le produit fibré de catégories suivant :

$$\begin{tikzcd} \underline{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \underline{F} \arrow[d] \\ \underline{E}' \arrow[r] & \underline{E} \end{tikzcd}$$

où $\underline{E}' \to \underline{E}$ préserve les produits fibrés finis. Alors, si $\underline{F} \to \underline{E}$ est une catégorie fibrée à produits (resp. à sommes) internes, il en est de même de $\underline{F}' \to \underline{E}'$.

3.10. PROPOSITION. *Soit* $\underline{F} \to \underline{E}$ *une catégorie fibrée. Si :*

1° $\underline{F} \to \underline{E}$ *et* $\underline{E}$ *sont à limites projectives finies, alors il en est de même de* $\underline{F}$*;*

2° $\underline{F} \to \underline{E}$ *est cocomplète et* $\underline{E}$ *à limites inductives finies, alors* $\underline{F}$ *est à limites inductives finies ;*

3° $\underline{F} \to \underline{E}$ *et* E *sont cartésiennes fermées et* $\underline{F} \to \underline{E}$ *complète, alors* $\underline{F}$ *est cartésienne fermée;*

4° $\underline{F} \to \underline{E}$ *et* $\underline{E}$ *sont l.c.f. et* $\underline{F} \to \underline{E}$ *complète, alors* $\underline{F}$ *est l.c.f.*

5° $\underline{F} \to \underline{E}$ *et* $\underline{E}$ *sont des quasi-topos et* $\underline{F} \to \underline{E}$ *complète et cocomplète, alors* $\underline{F}$ *est un quasi-topos ;*

6° $\underline{F} \to \underline{E}$ *et* $\underline{E}$ *sont des topos et* $\underline{F} \to \underline{E}$ *complète et cocomplète, alors* $\underline{F}$ *est un topos.*

PREUVE. 1° Déjà connu.

2° Si $\underline{F} \to \underline{E}$ est cocomplète, alors c'est une catégorie cofibrée. De plus la catégorie fibrée $\underline{F}^o \to \underline{E}^o$ est à limites projectives finies, ainsi que $\underline{E}^o$. Par suite, $\underline{F}^o$ est à limites projectives finies.

3° Soient X et X' deux objets de $\underline{F}$ au-dessus, respectivement, de A et A'. Alors l'exponentiation de X' par X est :

$$X \pitchfork X' = \Pi_p (p'^* X \underset{(A \pitchfork A') \times A}{\pitchfork} Val^* X')$$

($U \underset{B}{\pitchfork} V$ désigant, de façon générale, l'exponentiation de V par U, dans la fibre au-dessus de B), où p, p' et Val sont les flèches canoniques apparaissant dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \pitchfork A' & (A \pitchfork A') \times A \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "Val"] & A \\ & A' . & \end{tikzcd}$$

4° Soit X un objet de $\underline{F}$ au-dessus de A dans $\underline{E}$. Alors le foncteur $\underline{F}/_X \to \underline{E}/_A$ est fibrant, et pour toute flèche $a: B \to A$ de $\underline{E}$ on a un isomorphisme :

$$(\underline{F}/X)_a \approx (\underline{F}_B)/a^*X \cdot$$

Comme $\underline{F} \to \underline{E}$ est l.c.f., $\underline{F}_B$ est l.c.f., donc $(\underline{F}_B)/a^*X$ est cartésienne fermée. Par suite $\underline{F}/X \to \underline{E}/A$ a des fibres cartésiennes fermées. De même comme le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\underline{F}/X)_a \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & (\underline{F}_B)/a^*X \arrow[d] \\
(\underline{F}/X)_{a'} \arrow[r, "\approx"] & (\underline{F}_{B'})/a'^*X
\end{tikzcd}$$

pour toute flèche $\begin{tikzcd}[column sep=small] B' \arrow[rr] \arrow[dr, "a'"'] & & B \arrow[dl, "a"] \\ & A & \end{tikzcd}$ de $\underline{E}/A$, $(\underline{F}/X)_a \to (\underline{F}/X)_{a'}$ préserve la structure cartésienne fermée. Donc $\underline{F}/X \to \underline{E}/A$ est cartésienne fermée ainsi que $\underline{E}/A$ et $\underline{F}/X \to \underline{E}/A$ est complète (on le vérifie de la même manière) donc $\underline{F}/X$ est cartésienne fermée, pour tout objet X de $\underline{F}$. Ainsi $\underline{F}$ est l.c.f.

5° L'objet classifiant de $\underline{F}$ est $\hat{\Omega} = \Pi_{vrai}(\Omega_1)$, où $vrai : 1 \to \Omega$ est la flèche classifiante de $\underline{E}$ et Ω_1 l'objet classifiant de la fibre au-dessus de 1.

6° On vérifie facilement que tout monomorphisme de $\underline{F}$ est fort.

4. DEFINITION EQUIVALENTE DE QUASI-TOPOS.

Soit $\underline{E}$ un quasi-topos.

4.1. $A \rightarrowtail B$ étant un monomorphisme de $\underline{E}$, on peut considérer sa décomposition $A \twoheadrightarrow \hat{A} \rightarrowtail B$ en épimorphisme et monomorphisme fort. En posant

$$\gamma_B(A \rightarrowtail B) = (\hat{A} \rightarrowtail B),$$

on construit ainsi une topologie sur $\underline{E}$.

4.2. DEFINITION. On dira qu'un objet A de $\underline{E}$ *est grossier* si c'est un faisceau pour la topologie définie ci-dessus.

4.3. Si $Gr(\underline{E})$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets les objets grossiers, alors $Gr(\underline{E})$ est un topos (d'après la Proposition 3.4). De plus $Gr(\underline{E})$ est une sous-catégorie exactement réflexive de E. On notera $gr: \underline{E} \to Gr(\underline{E})$ la réflexion et η l'unité de cette réflexion.

4.4. 1° Pour tout monomorphisme fort $m: A \to B$ le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\ grA \arrow[r, "gr(m)"] & grB \end{tikzcd}$$

2° Les monomorphismes forts sont les monomorphismes gr-cartésiens.

3° Les monomorphismes sont stables par co-changement de base (i.e. stables par changement de base dans $\underline{E}^o$).

4.5. DEFINITION. Soit $A \leftarrow A' \to B$ un span dans $\underline{E}$. On dit que c'est une *flèche partielle forte* si $A' \to A$ est un monomorphisme fort.

4.6. PROPOSITION. *Dans un quasi-topos les flèches partielles fortes sont représentables (i.e. pour tout objet A de $\underline{E}$, le foncteur $Part(-, A)$ est représentable, où pour tout objet B de $\underline{E}$, $Part(B, A)$ désigne le sous-ensemble de $\mathrm{R}(B, A)$ ayant pour éléments les classes d'équivalence de flèches partielles fortes).*

PREUVE. Pour cela, démontrons tout d'abord le lemme suivant :

4.7. LEMME. *Soit A un objet grossier, $\tilde{A}$ la représentation de $Part(-, A)$ dans le topos $Gr(\underline{E})$ et $v_A : A \rightarrowtail \tilde{A}$ la flèche canonique. Alors, quelle que soit la flèche partielle forte $C \xleftarrow{m} B \xrightarrow{f} A$ de $\underline{E}$, il existe une unique flèche $C \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{A}$ rendant le carré ci-dessous commutatif et cartésien :*

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "v_A"] \\ C \arrow[r, "\tilde{f}"] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

PREUVE DU LEMME. Considérons la flèche partielle forte

$$gr\,C \xleftarrow{gr(m)} gr\,B \xrightarrow{gr(f)} A$$

dans $Gr(\underline{E})$ (ce qui a un sens car gr préserve les monomorphismes). Comme $Gr(\underline{E})$ est un topos, il existe alors une unique flèche $\tilde{f}': gr\,C \to \tilde{A}$ rendant le carré ci-dessous cartésien dans $Gr(\underline{E})$

$$\begin{tikzcd} gr\,B \arrow[r, "gr(f)"] \arrow[d, tail, "gr(m)"'] & A \arrow[d, tail, "v_A"] \\ gr\,C \arrow[r, "\tilde{f}'"] & \tilde{A} \end{tikzcd} .$$

Posons alors $\tilde{f} = \tilde{f}'.\eta_C$. Comme m est un monomorphisme fort dans E, les deux carrés ci-dessous ainsi que leur composé sont cartésiens (d'après 4.4.1):

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, tail, "m"'] & gr\,B \arrow[r, "gr(f)"] \arrow[d, tail, "gr(m)"] & A \arrow[d, tail, "v_A"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"] & gr\,C \arrow[r, "\tilde{f}'"] & \tilde{A} \end{tikzcd} .$$

Le carré (1) est donc cartésien. Inversement soit $g: C \to \tilde{A}$ une flèche de $\underline{E}$ rendant le carré ci-dessous commutatif et cartésien

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "m"'] & A \arrow[d, tail, "v_A"] \\ C \arrow[r, "g"] & \tilde{A} \end{tikzcd} .$$

Alors son image par le foncteur gr est encore cartésienne. Mais ceci entraîne que $gr(g) = \tilde{f}'$, donc que $g = \tilde{f}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.6. A étant un objet de $\underline{E}$, notons

$$\tilde{A} \overset{a}{\rightarrowtail} \widetilde{gr\,A} = \Pi_{v_{gr\,A}}(A \overset{\eta_A}{\rightarrowtail} gr\,A).$$

Comme $v_{gr\,A}$ est un monomorphisme, on a

$$v^*_{gr\,A}\Pi_{v_{gr\,A}}(A \xrightarrow{\eta_A} gr\,A) \approx A \xrightarrow{\eta_A} gr\,A$$

(résulte de la condition de Chevalley-Beck), donc il existe une flèche $v_A : A \to \tilde{A}$ rendant le carré suivant commutatif et cartésien :

$$\text{(2)} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "v_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & \tilde{A} \arrow[d, "a"] \\ gr\,A \arrow[r, "v_{gr\,A}"] & \widetilde{gr\,A} \end{tikzcd} .$$

v_A est donc un monomorphisme fort, car c'est le cas de $v_{gr\,A}$. Soit maintenant $C \xleftarrow{m} B \xrightarrow{f} A$ un morphisme partiel fort. D'après le Lemme 4.7 il existe alors une unique flèche $\tilde{f}': C \to \widetilde{gr\,A}$ rendant le carré suivant cartésien :

$$\text{(3)} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\eta_A \cdot f"'] & C \arrow[d, "\tilde{f}'"] \\ gr\,A \arrow[r, "v_{gr\,A}"] & \widetilde{gr\,A} \end{tikzcd} .$$

Mais comme on a une bijection canonique :

$$\underline{E}/_{\widetilde{gr\,A}}(\tilde{f}', a) \to \underline{E}/_{gr\,A}(\eta_A \cdot f, \eta_A),$$

il existe une flèche $\tilde{f}: C \to \tilde{A}$ telle que $a \cdot \tilde{f} = \tilde{f}'$. On a

$$a \cdot \tilde{f} \cdot m = \tilde{f}' \cdot m = v_{gr\,A} \cdot \eta_A \cdot f = a \cdot v_A \cdot f.$$

Or $a: \tilde{A} \to \widetilde{gr\,A}$ est un monomorphisme, car $\Pi_{v_{gr\,A}}$ préserve les objets moniques (i.e. les objets dont la diagonale est inversible). Donc $v_A \cdot f = \tilde{f} \cdot m$. De plus, comme les carrés (2) et (3) sont cartésiens, il en est de même du carré :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ A \arrow[r, "v_A"] & \tilde{A} \end{tikzcd} .$$

Inversement, soit $g: C \to \tilde{A}$ une flèche telle que le carré suivant (4) soit cartésien. Alors, le carré obtenu en composant (4) et (2) est cartésien, et ainsi d'après le Lemme 4.7, $a \cdot g = a \cdot \tilde{f}$, d'où $g = \tilde{f}$ puisque a est un monomorphisme.

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "v_A"] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

4.8. THEOREME. *$\underline{E}$ étant une catégorie, c'est un quasi-topos si et seulement si elle vérifie les axiomes (QT1), (QT2) ainsi que les deux axiomes suivants :*

(QT'3) $\underline{E}$ est cartésienne fermée,

(QT'4) Dans $\underline{E}$ les flèches partielles fortes sont représentables.

PREUVE. Si $\underline{E}$ est un quasi-topos, nous avons vu qu'il vérifie (QT'4) (Proposition 4.6). Il vérifie aussi (QT'3). La réciproque (qui procède comme dans les topos) est signalée dans [9] et [11].

Ainsi la notion de quasi-topos considérée ici est bien la même que celle étudiée dans [9] et [11].

5. QUASI-TOPOS $\mathcal{U}$-BORNES.

5.1. DEFINITION. $\mathcal{U}$ étant un univers, on dit qu'un quasi-topos $\underline{E}$ est $\mathcal{U}$-*borné* si $\underline{E}$ est à sommes $\mathcal{U}$-petites et si elle est $\mathcal{U}$-bien balancée (i.e., «well powered»).

Le but de ce paragraphe est de donner une caractérisation des quasi-topos $\mathcal{U}$-bornés. Pour cela donnons quelques définitions.

5.2. DEFINITION. Soit $p : \underline{F} \to \underline{E}$ un foncteur.

1° Si $(A_i \xrightarrow{a_i} A)_{i \in I}$ est une famille de flèches de $\underline{F}$ de but A on dit qu'elle est *finissante pour* p si, pour toute famille $(A_i \xrightarrow{b_i} B)_{i \in I}$, et toute flèche $pA \xrightarrow{k} pB$ vérifiant, en chaque i de I, l'égalité

$$pA_i \xrightarrow{pa_i} pA \xrightarrow{k} pB = pA_i \xrightarrow{pb_i} pB,$$

il existe une unique flèche $l : A \to B$ au-dessus de k pour laquelle, en chaque i de I, on ait :

$$A_i \xrightarrow{a_i} A \xrightarrow{l} B = A_i \xrightarrow{b_i} B.$$

2° Si $(A \to A_i)_{i \in I}$ est une famille de flèches de $\underline{F}$ de source A on dit qu'elle est *commençante pour* p si elle est finissante pour $p^o : \underline{F}^o \to \underline{E}^o$.

3° On dit que p (ou $\underline{F}$ par abus de langage) est *à structures finales quelconques* (resp. *épimorphes, finies*) si, pour tout objet B de $\underline{E}$ et pour toute famille de couples $(A_i, b_i)_{i \in I}$ où $(pA_i \xrightarrow{b_i} B)_{i \in I}$ est une famille quelconque (resp. épimorphe, finie) de $\underline{E}$, il existe une famille finissante $(A_i \xrightarrow{a_i} A)_{i \in I}$ et un inversible $\gamma : B \to pA$ tels que, en chaque i de I, on ait :

$$pA_i \xrightarrow{b_i} B \xrightarrow{\gamma} pA = pA_i \xrightarrow{pa_i} pA.$$

4° On dit que p (ou $\underline{F}$) *est à structures initiales quelconques* (resp. *monomorphes, finies*) si $p^o : \underline{F}^o \to \underline{E}^o$ est à structures finales quelconques (resp. épimorphes, finies).

5.3. 1° Un foncteur est à structures finales quelconques si et seulement si il est à structures initiales quelconques.

2° Si le foncteur $\underline{F} \to \underline{E}$ est à structures finales épimorphes, il est fidèle. Si de plus $\underline{E}$ est $\mathfrak{U}$-complète, il en est de même de $\underline{F}$.

3° Si le foncteur $\underline{F} \to \underline{E}$ est à structures initiales finies et $\underline{E}$ à limites projectives finies, alors $\underline{F}$ est à limites projectives finies.

5.4. DEFINITION. On dit qu'une famille finissante épimorphe $(A_i \to A)_{i \in I}$ est *universelle* si, pour toute flèche $B \to A$ et pour tout i de I, le produit fibré suivant existe dans $\underline{F}$:

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r] \arrow[d] & A_i \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

et si la famille $(B_i \to B)_{i \in I}$ est aussi finissante et épimorphe.

5.5. Considérons les catégories $\underline{E}$ pour lesquelles :

Il existe un foncteur $p: \underline{E} \to \underline{G}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(QTB'1) p est à structures initiales finies,

(QTB'2) p est à structures finales épimorphes,

(QTB'3) les familles finissantes épimorphes pour p sont universelles.

(QTB'4) les fibres de p sont $\mathfrak{U}$-petites,

(QTB'5) $\underline{G}$ est un topos $\mathfrak{U}$-borné.

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que ces catégories sont exactement les quasi-topos $\mathfrak{U}$-bornés.

5.6. Soit $p: \underline{E} \to \underline{G}$ un foncteur où $\underline{E}$ est une catégorie $\mathfrak{U}$-petite et $\underline{G}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie (i. e. une catégorie dont tous les «*Hom*» sont $\mathfrak{U}$-petits). Nous allons lui associer une catégorie notée $\underline{E}^{cr}_{\underline{G}}$ (ou simplement $\underline{E}^{cr}$ s'il n'y a pas de confusion possible pour $\underline{G}$), appelée *catégorie des p-cribles* [1]. Elle est obtenue par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}^{cr} & \longrightarrow & \mathbf{P}(\hat{\underline{E}}) \\ {\scriptstyle p^{cr}}\downarrow & & \downarrow \\ \underline{G} & \xrightarrow{\Phi} & \hat{\underline{E}} \end{array}$$

où $\Phi(G) = \underline{G}(p(-), G)$ et où $\mathbf{P}(\hat{\underline{E}}) \to \hat{\underline{E}}$ est la catégorie fibrée des «sous-objets de $\hat{\underline{E}} = \underline{Ens}^{\underline{E}^{o}}$».

Plus concrètement la catégorie $\underline{E}^{cr}$ a :

- pour objets les couples $(G, \mathcal{G})$ où G est un objet de $\underline{G}$ et $\mathcal{G}$ un sous-foncteur de $\underline{G}(p(-), G)$,

- pour morphismes $f: (G, \mathcal{G}) \to (G', \mathcal{G}')$, les flèches $f: G \to G'$ de $\underline{G}$ telles que, pour tout objet X de $\underline{E}$ et pour toute flèche $x: p(X) \to G$ de $\mathcal{G}(X)$, le composé $p(X) \xrightarrow{x} G \xrightarrow{f} G'$ soit dans $\mathcal{G}'(X)$.

On construit aussi un foncteur $\mathcal{Y}: \underline{E} \to \underline{E}^{cr}$ au-dessus de $\underline{G}$ de la façon suivante : $\mathcal{Y}(X) = (pX, \mathcal{Y}_X)$, où

$$\mathcal{Y}_X(Y) = \{ pY \xrightarrow{py} pX \mid y: Y \to X \}.$$

5.7. THEOREME *(Antoine [1]). Pour tout p-crible $(G, \mathcal{G})$, on a l'égalité:*

$$\underline{E}^{cr}(\mathcal{Y}(X),(G,\mathcal{G}))=\mathcal{G}(X).$$

En particulier, $\mathcal{Y}$ *est un foncteur plein. De plus si* p *est fidèle, il en est de même de* $\mathcal{Y}$.

5.8. THEOREME *(Wyler [11]). Si* $\underline{G}$ *est un quasi-topos, alors il en est de même de* $\underline{E}^{cr}$.

PREUVE. On pourrait (comme le fait O. Wyler) démontrer directement ce théorème en utilisant le théorème d'Antoine. Nous préférons, pourtant, en donner une autre démonstration (plus globale) qui est la suivante :

Comme $\hat{\underline{E}}$ est un topos, la catégorie fibrée $\mathbf{P}(\hat{\underline{E}})\to\hat{\underline{E}}$ est un quasi-topos complet et cocomplet (voir Définition 3.8). De plus $\Phi:\underline{G}\to\hat{\underline{E}}$ préservant les limites projectives finies et le diagramme de 5.6 étant un produit fibré, le foncteur $\underline{E}^{cr}\xrightarrow{p^{cr}}\underline{G}$, qui est fibrant, est encore un quasi-topos complet et cocomplet (3.9). Par suite, d'après la Proposition 3.10, comme $\underline{G}$ est un (quasi-)topos, il en est de même de $\underline{E}^{cr}$.

5.9. Notons maintenant $\underline{E}^{crep}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}^{cr}$ ayant pour objets les p-cribles épimorphes (i.e. les p-cribles $(G,\mathcal{G})$ tels que la famille $(G_i\xrightarrow{g_i}G)_{i\in\hat{\mathcal{G}}}$ soit épimorphe, où

$$\hat{\mathcal{G}}=\sum_{X\in|\underline{E}|}\mathcal{G}(X),\quad G_{(x,X)}=\mathrm{p}X\quad\text{et}\quad g_{(x,X)}=x\text{).}$$

5.10. PROPOSITION. *Soient* $\underline{A}$ *une catégorie,* $\underline{G}$ *un topos* $\mathcal{U}$*-borné, et* $\mathrm{p}:\underline{A}\to\underline{G}$ *un foncteur vérifiant les trois conditions (très faibles) suivantes :*

(EP 1) Il existe une famille $(A_i)_{i\in I}$ *d'objets de* $\underline{A}$ *telle que la famille* $(\mathrm{p}A_i\to 1)_{i\in I}$ *soit épimorphe.*

(EP 2) Pour tout couple d'objets A *et* A' *de* $\underline{A}$, *il existe une famille* $(A\xleftarrow{a_i}A_i\xrightarrow{a'_i}A')_{i\in I}$ *de spans de* $\underline{A}$ *telle que la famille*

$$(\mathrm{p}A_i\xrightarrow{[\mathrm{p}a_i,\mathrm{p}a'_i]}\mathrm{p}A\times\mathrm{p}A')_{i\in I}$$

soit épimorphe.

(EP 3) Pour tout objet A *de* $\underline{A}$ *et tout sous-objet* $G\rightarrowtail\mathrm{p}A$ *dans* $\underline{G}$,

il existe une famille $(A_i \xrightarrow{a_i} A)_{i\in I}$ *de flèches de* $\underline{A}$ *telle que*

$$\bigcup_{i\in I} Im(p\, a_i) = G.$$

Alors la catégorie $\underline{A}^{crep}$ *des p-cribles épimorphes est un quasi-topos.*

PREUVE. 1° Montrons tout d'abord que $\underline{A}^{crep}$ est stable pour les limites projectives finies de $\underline{A}^{cr}$.

a) Soit $(1, \mathcal{I})$ l'objet final de $\underline{A}^{cr}$. Alors, d'après les hypothèses, il existe une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\underline{A}$ telle que $(p\,A_i \to 1)_{i\in I}$ soit épimorphe. Par suite, la famille $(p\,A \xrightarrow{x} 1)_{(x,A)\in\hat{\mathcal{I}}}$ contenant la précédente comme sous-famille est donc, elle-même, épimorphe.

b) Soient $(G, \mathcal{G})$ et $(G', \mathcal{G}')$ deux p-cribles épimorphes et soient $f, f': G\times G' \rightrightarrows G''$ deux flèches de G telles que, pour tout objet X de $\underline{A}$ et tout $x: p\,X \to G\times G'$ de $(\mathcal{G}\times\mathcal{G}')(X)$, on ait $f.x = f'.x$. Si maintenant $a: p\,A \to G$ et $a': p\,A' \to G'$ sont deux flèches quelconques respectivement de $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(A')$, alors on sait qu'il existe une famille

$$(A \xleftarrow{a_i} A_i \xrightarrow{a'_i} A')_{i\in I}$$

de spans de $\underline{A}$ pour laquelle la famille

$$(p\,A_i \xrightarrow{[p\,a_i,\, p\,a'_i]} p\,A\times p\,A')_{i\in I}$$

soit épimorphe. Pour tout i de I on a

$$(p\,A_i \xrightarrow{[p\,a_i,\, p\,a'_i]} p\,A\times p\,A' \xrightarrow{a\times a'} G\times G') \in \mathcal{G}\times\mathcal{G}'(A_i).$$

Par suite

$$f.a\times a'.[p\,a_i, p\,a'_i] = f'.a\times a'.[p\,a_i, p\,a'_i].$$

Et ainsi $f.a\times a' = f'.a\times a'$, puisque

$$(p\,A_i \xrightarrow{[p\,a_i,\, p\,a'_i]} p\,A\times p\,A')_{i\in I}$$

est épimorphe. D'autre part les familles

$$(p\,A \xrightarrow{a} G)_{(a,A)\in\hat{\mathcal{G}}} \quad \text{et} \quad (p\,A' \xrightarrow{a'} G')_{(a',A')\in\hat{\mathcal{G}}'}$$

étant épimorphes, il en est de même de la famille produit

$$(pA \times pA' \xrightarrow{a \times a'} G \times G')_{(a,A)(a',A')},$$

puisque les familles épimorphes définissent une topologie de Grothendieck sur $\underline{G}$. Ainsi l'égalité $f.a \times a' = f'.a \times a'$ entraîne que $f = f'$, ce qui prouve que le p-crible $(G, \mathcal{G}) \times (G', \mathcal{G}') = (G \times G', \mathcal{G} \times \mathcal{G}')$ est épimorphe.

c) Soient $(F, \mathcal{F}) \overset{g, g'}{\rightrightarrows} (G, \mathcal{G})$ deux flèches parallèles de $\underline{E}^{crep}$, $(N, \mathcal{N})$ l'égalisateur de (g, g') et $f, f' : N \rightrightarrows G'$ deux flèches de $\underline{G}$ telles que, pour tout objet X de $\underline{A}$ et toute flèche $x : pX \to N$ de $\mathcal{N}(X)$, on ait $f.x = f'.x$. Soit maintenant $a : pA \to F$ un élément de $\mathcal{F}(A)$ et considérons le produit fibré suivant dans $\underline{G}$:

$$\begin{array}{ccc} N_a & \rightarrowtail & pA \\ {\scriptstyle u_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ N & \rightarrowtail & F. \end{array}$$

D'après les hypothèses, il existe une famille $(A_i \xrightarrow{a_i} A)_{i \in I}$ de flèches de $\underline{A}$ telle que $\bigcup_{i \in I} Im(a_i) = N_a$. Notons alors $a'_i : pA_i \to N_a$ l'unique flèche telle que

$$pA_i \xrightarrow{a'_i} N_a \rightarrowtail pA = pA_i \xrightarrow{pa_i} pA.$$

On vcit que, pour tout i de I, $u_a . a'_i$ appartient à $\mathcal{N}(A_i)$. Par suite

$$f.u_a.a'_i = f'.u_a.a'_i.$$

Mais nous savons que la famille $(pA_i \xrightarrow{a'_i} N_a)_{i \in I}$ est épimorphe, donc : $f.u_a = f'.u_a$. D'autre part la famille $(N_a \xrightarrow{u_a} N)_{(A,a) \in \hat{\mathcal{F}}}$ est épimorphe, car il en est de même de $(pA \xrightarrow{a} F)_{(A,a) \in \hat{\mathcal{F}}}$ et les familles épimorphes de $\underline{G}$ sont stables par changement de base.

Ainsi on en conclut que $f = f'$, ce qui prouve que le p-crible $(N, \mathcal{N})$ est épimorphe.

2° Montrons maintenant que l'inclusion $\underline{E}^{crep} \hookrightarrow \underline{E}^{cr}$ admet un adjoint à droite.

Soit $(F,\mathfrak{F})$ un p-crible, et posons $\bar{F} = \bigcup_{(x,X)\in\hat{\mathfrak{F}}} Im(x)$. La restriction $(\bar{F},\bar{\mathfrak{F}})$ de $(F,\mathfrak{F})$ à $\bar{F}$ est épimorphe par construction. Soit maintenant $(G,\mathfrak{G})$ un p-crible épimorphe et $(G,\mathfrak{G}) \xrightarrow{f} (F,\mathfrak{F})$ une flèche de $\underline{E}^{cr}$. Alors, on a les inégalités suivantes :

$$Im(f) = \exists_f \bar{G} = \exists_f \Big(\bigcup_{(x,X)\in\hat{\mathfrak{G}}} Im(x)\Big) = \bigcup_{(x,X)\in\hat{\mathfrak{G}}} \exists_f Im(x) =$$

$$= \bigcup_{(x,X)\in\hat{\mathfrak{G}}} Im(f.x) \subset \bigcup_{(y,Y)\in\hat{\mathfrak{F}}} Im(y) = \bar{F}.$$

Donc $f\colon G \to F$ se factorise par $\bar{F} \rightarrowtail F$, et ainsi $f\colon (G,\mathfrak{G}) \to (F,\mathfrak{F})$ se factorise par $(\bar{F},\bar{\mathfrak{F}}) \hookrightarrow (F,\mathfrak{F})$.

3° Le foncteur $\underline{E}^{crep} \hookrightarrow \underline{E}^{cr}$ étant exact à gauche ainsi que son adjoint à droite, ils définissent un cotriple exact à gauche $\mathbf{C}$. Par suite, $\underline{E}^{crep}$, qui s'identifie à la catégorie des $\mathbf{C}$-coalgèbres, est un quasi-topos (d'après 3.2).

5.11. $\underline{G}$ étant un quasi-topos, considérons une topologie de Grothendieck J sur $\underline{E}$ et soit $\underline{E}^{cr}_J$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}^{cr}$ ayant pour objets les p-cribles $(F,\mathfrak{F})$ tels que le sous-objet $\mathfrak{F} \hookrightarrow G(p(-),F)$ soit fermé pour J dans $\hat{\underline{E}}$. On montre facilement que $\underline{E}^{cr}_J$ est une sous-catégorie exactement réflexive de $\underline{E}^{cr}$. Par suite (3.6) $\underline{E}^{cr}_J$ est encore un quasi-topos.

5.12. Si maintenant $p\colon \underline{E} \to \underline{G}$ vérifie les trois conditions (EP 1), (EP 2) et (EP 3) de la Proposition 5.10 et si $\underline{G}$ est un topos $\mathfrak{U}$-borné, alors la sous-catégorie pleine $\underline{E}^{crep}_J = \underline{E}^{crep} \cap \underline{E}^{cr}_J$ de $\underline{E}^{crep}$ est exactement réflexive (car le réflecteur $\underline{E}^{cr} \to \underline{E}^{cr}_J$ préserve les p-cribles épimorphes). C'est donc encore un quasi-topos.

5.13. PROPOSITION. *Si le foncteur $p\colon \underline{E} \to \underline{G}$ vérifie les quatre propriétés (QTB'1), (QTB'2), (QTB'3) et (QTB'5), alors $\underline{E}$ est un quasi-topos.*

PREUVE. Pour chaque objet X de $\underline{E}$ soit J la topologie de Grothendieck ayant pour familles couvrantes les familles finissantes épimorphes (c'en est bien une d'après (QTB'3)). Montrons qu'on a l'équivalence $\underline{E} \approx \underline{E}^{crep}_J$.

Tout d'abord, on voit que le foncteur $\mathcal{Y} : \underline{E} \to \underline{E}_J^{cr}$ a son image dans $\underline{E}_J^{crep}$, car, pour tout objet E de $\underline{E}$, $\mathcal{Y}(E)$ est épimorphe, Id_{pE} appartenant à $\mathcal{Y}_E(E)$. Réciproquement, soit $(F, \mathfrak{F})$ un objet de $\underline{E}_J^{crep}$. Comme $p : \underline{E} \to \underline{G}$ est à structures finales épimorphes, il existe une famille finissante

$$(X \xrightarrow{\bar{x}} E)_{(x, X) \in \hat{\mathfrak{F}}} \quad \text{dans } \underline{E}$$

et un inversible $y : pE \approx F$ tels que

$$pX \xrightarrow{p\bar{x}} pE \xrightarrow{y} F = pX \xrightarrow{x} F.$$

y définit alors un isomorphisme $\mathcal{Y}(E) \approx (F, \mathfrak{F})$. (En effet, le p-crible $(F, \mathfrak{F})$ appartenant à $\underline{E}_J^{crep}$ et la famille $(X \xrightarrow{\bar{x}} E)_{(x, X) \in \hat{\mathfrak{F}}}$ étant finissante, on voit que y appartient à $\mathfrak{F}(E)$.)

Les deux catégories $\underline{E}$ et $\underline{E}_J^{crep}$ étant équivalentes et $\underline{E}_J^{crep}$ étant un quasi-topos (5.12), on en conclut que $\underline{E}$ est un quasi-topos.

5.14. THEOREME. *$\underline{E}$ étant une catégorie et $\mathfrak{U}$ un univers, $\underline{E}$ est un quasi-topos $\mathfrak{U}$-borné si et seulement si elle vérifie les axiomes énoncés au 5.5. Dans ce cas il existe une équivalence $Gr(\underline{E}) \simeq \underline{G}$ qui rend le diagramme suivant commutatif:*

$$\begin{tikzcd} & \underline{E} \arrow[dl, "gr"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Gr(\underline{E}) \arrow[rr, "\sim"] & & \underline{G}. \end{tikzcd}$$

PREUVE. 1° Supposons tout d'abord que $\underline{E}$ vérifie les axiomes énoncés au 5.5. Alors d'après la Proposition 5.13, $\underline{E}$ est un quasi-topos. D'autre part, $\underline{G}$ étant $\mathfrak{U}$-cocomplète et p à structures finales épimorphes, $\underline{E}$ est donc $\mathfrak{U}$-cocomplète (5.3.2).

Soit maintenant A un objet de $\underline{E}$. Notons $P_{\underline{E}}(A)$ (resp. $P_{\underline{G}}(pA)$) l'ensemble des sous-objets (non nécessairement forts) de A dans $\underline{E}$ (resp. de pA dans $\underline{G}$). Il existe une application canonique $P_{\underline{E}}(A) \to P_{\underline{G}}(pA)$. Or d'après (QTB'4), cette application est à fibres $\mathfrak{U}$-petites et, d'après (QTB'5), $P_{\underline{G}}(pA)$ est $\mathfrak{U}$-petit. Donc $P_{\underline{E}}(A)$ est $\mathfrak{U}$-petit.

2° Supposons maintenant que $\underline{E}$ soit un quasi-topos $\mathfrak{U}$-borné et posons

$\underline{G} = Gr(\underline{E})$ et $p = gr$. $\underline{G}$ est un topos $\mathfrak{U}$-bien balancé, car, pour tout objet A de $\underline{G}$, $P_{\underline{G}}(A)$ est contenu dans $P_{\underline{E}}(A)$; de plus il est à sommes $\mathfrak{U}$-petites, car l'inclusion $\underline{G} \hookrightarrow \underline{E}$ admet un adjoint à gauche. Par suite c'est un topos $\mathfrak{U}$-borné. On voit aussi que les fibres de p sont $\mathfrak{U}$-petites, car, pour tout objet A de $\underline{G}$, on a $\bar{p}^1(\{A\}) \subset P_{\underline{E}}(A)$. p est aussi à structures initiales finies ; en effet, soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'objets de $\underline{E}$, G un objet de $\underline{G}$ et $(G \xrightarrow{f_i} pA_i)_{i \in I}$ une famille de flèches de $\underline{G}$. Considérons le produit fibré suivant dans $\underline{E}$:

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} & \longrightarrow & \Pi A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & p(\Pi A_i). \end{array}$$

On montre que la famille $(\bar{G} \to \Pi A_i \to A_i)_{i \in I}$ est commençante. Avant de

Avant de montrer que p vérifie (QTB'2), démontrons que :

a) Pour tout objet A de $\underline{E}$, le treillis $P_{\underline{E}}(A)$ est complet ;

b) Si $(A_i \rightarrowtail A)_{i \in I}$ est une famille épimorphe de monomorphismes, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \rightarrowtail A$ est un épimorphisme (on peut supposer I $\mathfrak{U}$-petit).

PREUVE DE a. L'inclusion $mon(\underline{A}) \hookrightarrow \underline{E}/_A$ admet un adjoint à gauche et $\underline{E}/_A$ est $\mathfrak{U}$-cocomplète. Donc $mon(\underline{A})$ est $\mathfrak{U}$-cocomplète. Par suite l'ensemble ordonné $P_{\underline{E}}(A)$ qui lui est équivalent est aussi $\mathfrak{U}$-cocomplet, donc complet en tant qu'ensemble ordonné, car il est $\mathfrak{U}$-petit.

PREUVE DE b. Comme

$$\bigcup_{i \in I} A_i \rightarrowtail A = Im(\sum_{i \in I} A_i \to A)$$

et que $\sum_{i \in I} A_i \to A$ est un épimorphisme, $\bigcup_{i \in I} A_i \rightarrowtail A$ est un épimorphisme.

Soit maintenant $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{E}$ et $(pA_i \xrightarrow{f_i} B)_{i \in I}$ une famille épimorphe de flèches de $\underline{G}$ (donc de $\underline{E}$, car $p : \underline{E} \to \underline{G}$ est fidèle). Notons

$$B_i \rightarrowtail B = \exists_{f_i}(A_i \rightarrowtail pA_i)$$

et soit $f'_i : A_i \to B$, pour tout i de I, la flèche qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, tail] & B_i \arrow[d, tail] \\ p\,A_i \arrow[r, "f_i"] & B . \end{tikzcd}$$

Soit maintenant $\bar{B} \rightarrowtail B = \bigcup_{i \in I} B_i \rightarrowtail B$. Comme la famille $(p\,A_i \xrightarrow{f_i} B)_{i \in I}$ est épimorphe et que les flèches $A_i \rightarrowtail p\,A_i$ sont des épimorphismes, la famille

$$(A_i \rightarrowtail p\,A_i \xrightarrow{f_i} B)_{i \in I} = (A_i \xrightarrow{f'_i} B_i \rightarrowtail B)_{i \in I}$$

est épimorphe, ainsi que la famille $(B_i \rightarrowtail B)_{i \in I}$. Par suite, $\bar{B} \rightarrowtail B$, qui en est la réunion, est un épimorphisme (et un monomorphisme). Il existe alors un isomorphisme $B \approx p\,\bar{B}$ tel que

$$\bar{B} \rightarrowtail B \xrightarrow{\approx} p\,\bar{B} = \bar{B} \rightarrowtail p\,\bar{B}.$$

De plus, pour chaque i de I,

$$p\,A_i \xrightarrow{f_i} B \xrightarrow{\approx} p\,\bar{B} = p\,A_i \xrightarrow{p f'_i} p\,B_i \rightarrowtail p\,\bar{B}.$$

Montrons que la famille $(A_i \xrightarrow{f'_i} B_i \to \bar{B})_{i \in I}$ est finissante. Soit donc une famille $(A_i \xrightarrow{g_i} C)_{i \in I}$ de flèches de $\underline{E}$, et $k : B \to p\,C$ une flèche de $\underline{G}$ telle que, pour tout i de I, on ait

$$p\,A_i \xrightarrow{f_i} B \xrightarrow{k} p\,C = p\,A_i \xrightarrow{p\,g_i} p\,C.$$

On a les inégalités successives suivantes :

$$A_i \rightarrowtail p\,A_i \leqslant (p\,g_i)^{-1}(C \rightarrowtail p\,C) = f_i^{-1}\, k^{-1}(C \rightarrowtail p\,C),$$

$$B_i \rightarrowtail B = \exists_{f_i}(A_i \rightarrowtail p\,A_i) \leqslant k^{-1}(C \rightarrowtail p\,C),$$

$$\bar{B} \rightarrowtail B = \bigcup_{i \in I}(B_i \rightarrowtail B) \leqslant k^{-1}(C \rightarrowtail p\,C).$$

Donc il existe une flèche $l : \bar{B} \to C$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \bar{B} \arrow[r, "l"] \arrow[d, tail] & C \arrow[d, tail] \\ B \arrow[r, "k"] & p\,C. \end{tikzcd}$$

Comme $\bar{B} \rightarrowtail B$ et $C \rightarrowtail p\,C$ sont des bimorphismes, on a les égalités :

$$\bar{B} \xrightarrow{\approx} p\,\bar{B} \xrightarrow{p\,l} p\,C = \bar{B} \xrightarrow{k} p\,C \quad \text{et} \quad A_i \xrightarrow{f'_i} B_i \rightarrowtail \bar{B} \xrightarrow{l} C = A_i \xrightarrow{g_i} C.$$

Enfin $l: \bar{B} \to C$ est l'unique flèche de $\underline{E}$ remplissant ces deux conditions, car p est fidèle. On a donc achevé de montrer l'axiome (QTB'2). Nous venons de voir qu'une famille $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ est finissante et épimorphe si et seulement si $A = \bigcup_{i \in I} Im(f_i)$. Or, pour toute flèche $a: A' \to A$ de $\underline{E}$, le foncteur $a^*: \underline{E}/A \to \underline{E}/A'$ préserve les images et les unions, car il préserve les limites inductives et projectives. Par suite les familles finissantes épimorphes sont universelles. La fin de la proposition se prouve facilement.

5.15. REMARQUE. En fait nous avons vu, au cours de la Proposition 5.13 que tout quasi-topos $\mathfrak{U}$-borné pouvait se mettre sous la forme $\underline{A}_J^{crep}$ (du moins à une équivalence près), où $\underline{A}$ est une catégorie munie d'un foncteur d'oubli à structures initiales finies vers un topos $\mathfrak{U}$-borné. La proposition suivante montre même un peu plus.

5.16. PROPOSITION. *Soient $\underline{G}$ un topos $\mathfrak{U}$-borné, $p: \underline{E} \to \underline{G}$ un foncteur vérifiant les trois axiomes (QTB'1), (QTB'2) et (QTB'3) et $\lambda: \underline{A} \to \underline{E}$ un foncteur pleinement fidèle. Supposons de plus que tout objet E de $\underline{E}$ soit le but d'une famille finissante épimorphe $(\lambda A_i \to E)_{i \in I}$ où, pour chaque i de I, A_i est un objet de $\underline{A}$. Alors il existe une équivalence naturelle : $\underline{E} \approx \underline{A}_J^{crep}$, où J est la topologie de Grothendieck sur $\underline{A}$ ayant pour familles couvrantes les familles $(A_i \to A)_{i \in I}$ telles que $(\lambda A_i \to \lambda A)_{i \in I}$ soient finissantes et épimorphes.*

PREUVE. Tout d'abord précisons que, sous les hypothèses ci-dessus, le foncteur composé

$$\underline{A} \xrightarrow{\lambda} \underline{E} \xrightarrow{p} \underline{G}$$

vérifie les conditions (EP1), (EP2) et (EP3) de la Proposition 5.10. Ainsi la catégorie $\underline{A}^{crep}$ est bien un quasi-topos. D'autre part sous ces mêmes hypothèses J est bien une topologie de Grothendieck. Ceci dit, pour vérifier la proposition, il suffit de montrer (d'après la Preuve de 5.13) qu'on a un isomorphisme $\underline{A}_J^{crep} \approx \underline{E}_{J'}^{crep}$, où J' est la topologie de Grothendieck sur $\underline{E}$ ayant pour familles couvrantes les familles finissantes épimorphes.

5.17. REMARQUE. I. On peut appliquer la proposition précédente aux exemples II et III de 2.7 qui sont des quasi-topos $\mathfrak{U}$-bornés. Si, dans ces deux cas, on prend pour $\underline{A}$ la catégorie $\underline{Top}$ des espaces topologiques, les familles J-couvrantes sont alors :

1° dans l'exemple II, les familles $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ telles que, pour tout x de X, il existe un nombre fini d'indices $i_1, \dots, i_n$ de I et des éléments $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ respectivement de $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ tels que :

$$V_x = f_{i_1} V_{x_{i_1}} \cap \dots \cap f_{i_n} V_{x_{i_n}} \quad \text{et} \quad f_{i_1} x_{i_1} = \dots = f_{i_n} x_{i_n} = x,$$

où V_x note le filtre des voisinages de x dans l'espace X ;

2° dans l'exemple III, les familles $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ telles que, pour tout x de X et pour tout ultrafiltre ϕ sur X convergeant vers x, il existe un indice i de I, un élément x_i de X_i et un ultrafiltre ϕ_i sur X_i convergeant vers x_i tels que

$$f_i \phi_i = \phi \quad \text{et} \quad f_i x_i = x.$$

(On retrouve ainsi une partie de la Proposition 4.9 de [11].)

II. Soit $\underline{A}$ une catégorie et $p : \underline{A} \to \underline{Ens}$ un foncteur vérifiant les deux conditions suivantes :

1° $\underline{A}$ a un élément final 1 préservé par p,

2° Pour tout objet A de $\underline{A}$ et tout $x : p1 \to pA$ il existe une unique flèche $a : 1 \to A$ telle que $pa = x$.

Alors p vérifie les trois conditions (EP1), (EP2) et (EP3) de la Proposition 5.10, et un p-crible $(E, \mathcal{E})$ est épimorphe ssi $\mathcal{E}(1) = Ens(p1, E)$.

6. APPLICATION AUX VARIETES.

6.1. Tout d'abord donnons quelques terminologies.

- Si $\lambda : \underline{F} \to \underline{E}$ est un foncteur pleinement fidèle, on dit qu'un objet E de $\underline{E}$ *est représentable dans* $\underline{F}$ s'il existe un objet F de $\underline{F}$ tel que λF soit isomorphe à E dans $\underline{E}$.

- Soit $\underline{E}$ une catégorie et $top : \underline{E} \to \underline{Top}$ un foncteur fidèle ($top(X)$ signifiant intuitivement : topologie sous-jacente à X). Si X et X' sont deux objets de $\underline{E}$, on dira que X' *est un ouvert de* X si $top(X')$ est un sous-espace ouvert de $top(X)$ et $X' \hookrightarrow X$ un morphisme commençant (i. e. hypercartésien, ou une top-injection) de $\underline{E}$. Enfin, si X est un objet de $\underline{E}$, on dira qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\underline{E}$ *est un recouvrement d'ouverts de* X si X_i est un ouvert de X pour tout i de I et si

$$\bigcup_{i \in I} top(X_i) = top\, X.$$

- $\underline{E}$ étant une catégorie et $top : \underline{E} \to \underline{Top}$ un foncteur fidèle, soit maintenant $\lambda : \underline{B} \to \underline{E}$ un foncteur pleinement fidèle. On dit qu'un objet X de $\underline{E}$ *est variétal* (resp. *variétal de type fini*) *sur* $\underline{B}$ s'il admet un recouvrement (resp. fini) d'ouverts qui sont tous représentables dans $\underline{B}$.

6.2. Soit $\underline{E}$ une catégorie et $top : \underline{E} \to \underline{Top}$ un foncteur. On dit que le couple $(\underline{E}, top)$ (ou simplement $\underline{E}$, par abus de langage) est une catégorie *variétalement close* (resp. *variétalement close de type fini*) s'il vérifie les axiomes suivants :

1° top est fidèle ;

2° si X est un objet de $\underline{E}$ et $\gamma : \underset{\sim}{X}' \to top\, X$ un inversible de $\underline{Top}$, il existe un unique objet X' de $\underline{E}$ tel que $top\, X' = \underset{\sim}{X}'$ et que $\gamma : X' \to X$ soit une flèche de $\underline{E}$;

3° $\underline{E}$ a assez d'ouverts (i. e. soit X un objet de $\underline{E}$ et U un sous-espace ouvert de $top\, X$; alors il existe un ouvert X' de X tel que l'on ait $top\, X' = U$ (on note $X' = X \restriction U$)).

4° Soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement (resp. recouvrement fini) d'ouverts de X dans $\underline{E}$; alors la famille $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ est finissante (voir Définition 5.2.1).

5° $\underline{E}$ vérifie la condition de recollement (resp. recollement de type fini) (i. e. soit $\underset{\sim}{X}$ un espace topologique et $(X_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ une famille (resp. famille finie) d'objets de $\underline{E}$ telle que :

a) $(top\, X_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ est une famille de sous-espaces ouverts recouvrant $\underset{\sim}{X}$,

b) $top\, X_{ij} = top\, X_{ii} \cap top\, X_{jj}$,

c) $X_{ij} \hookrightarrow X_{ii}$ et $X_{ij} \hookrightarrow X_{jj}$ sont commençants (i. e. hypercartésiens, des *top*-injections).

Alors il existe un objet X (qui est unique d'après les axiomes 2 et 4) au-dessus de $\underset{\sim}{X}$ tel que $X_{ij} \hookrightarrow X$ soit commençant pour tout i et j de I).

Pour simplifier le texte on écrira souvent c.v.c. (resp. c.v.c.t.f.) au lieu de catégorie variétalement close (resp. catégorie variétalement close de type fini).

6.3. Appelons *site topologique concret* (resp. *site topologique concret de type fini*) ou plus brièvement s.t.c. (resp. s.t.c.t.f.) un triplet $(\underline{B}, top, \mathfrak{B})$, où $\underline{B}$ est une catégorie, $top : \underline{B} \to \underline{Top}$ un foncteur fidèle et $\mathfrak{B}$ la donnée pour chaque objet B de $\underline{B}$ d'une partie $\mathfrak{B}(B)$ de $|\underline{B}/_B|$ vérifiant les axiomes suivants :

1° Si $m : B' \to B$ est dans $\mathfrak{B}(B)$, alors $top(m)$ est injective ouverte et m est commençant.

2° Soit $B' \to B$ dans $\mathfrak{B}(B)$ et $A \to B$ une flèche de $\underline{B}$; alors le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

existe dans $\underline{B}$ et est préservé par *top* ; de plus $A' \to A$ est dans $\mathfrak{B}(A)$.

3° Si $A \to B$ et $A' \to B$ sont dans $\mathfrak{B}(B)$, alors $A \underset{B}{\times} A' \to B$ y est aussi.

4° Soient B un objet de $\underline{B}$ et U un sous-espace ouvert de $top\, B$; alors il existe une famille (resp. famille finie) $(B_i \xrightarrow{m_i} B)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{B}(B)$ telle que $\bigcup_{i\in I} m_i(top\, B_i) = U$.

5° Soit $(B_i \xrightarrow{m_i} B)_{i\in I}$ une famille (resp. famille finie) d'éléments de $\mathfrak{B}(B)$ telle que $\bigcup_{i\in I} m_i(\mathit{top}\, B_i) = \mathit{top}\, B$; alors elle est finissante.

La plupart du temps on notera un s.t.c. ou un s.t.c.t.f. $(\underline{B}, \mathit{top}, \mathfrak{B})$ seulement par la lettre $\underline{B}$.

6.4. 1° Soit $\underline{B}$ un site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.) et $f: A \to B$ une flèche injective (i.e. $\mathit{top}\, f$ est injectif). Alors f est commençante ouverte (i.e. $\mathit{top}\, f$ est ouverte) si, et seulement si, il existe une famille (resp. famille finie) $(B_i \to B)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{B}(B)$ telle que

$$(\mathit{top}\, f^* B_i \to \mathit{top}\, A)_{i\in I}$$

est épimorphe et $f^* B_i \to B_i$, pour tout i de I, est inversible.

2° Soient $\underline{B}$ et $\underline{B}'$ deux sites topologiques concrets (resp. s.t.c.t.f.) et soit $\lambda: \underline{B} \to \underline{B}'$ un foncteur au-dessus de $\underline{Top}$ tel que, pour tout $\hat{B} \to B$ de $\mathfrak{B}(B)$, on ait $\lambda \hat{B} \to \lambda B$ dans $\mathfrak{B}'(\lambda B)$. Alors λ préserve les morphismes commençants injectifs ouverts.

3° Soient $\underline{B}$ un site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.), $\underline{E}$ une catégorie variétalement close (resp. c.v.c.t.f.) et $\lambda: \underline{B} \to \underline{E}$ un foncteur pleinement fidèle au-dessus de $\underline{Top}$ tels que, si $A \to B$ est dans $\mathfrak{B}(B)$, alors $\lambda A \to \lambda B$ est commençant. Alors la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets les objets variétaux (resp. objets variétaux de type fini) sur $\underline{B}$ est encore variétalement close (resp. une c.v.c.t.f.).

4° Soient $\underline{B}$ un site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.), $\underline{E}$ et $\underline{F}$ des catégories variétalement closes (resp. c.v.c.t.f.), $\lambda: \underline{B} \to \underline{E}$ et $\mu: \underline{B} \to \underline{F}$ deux foncteurs pleinement fidèles au-dessus de $\underline{Top}$ tels que :

si $A \to B$ est dans $\mathfrak{B}(B)$, alors $\lambda A \to \lambda B$ et $\mu A \to \mu B$ sont commençants.

De plus on suppose que tout objet de $\underline{E}$ est variétal (resp. variétal de type fini) sur $\underline{B}$. Alors il existe un unique foncteur $\Phi: \underline{E} \to \underline{F}$ au-dessus de $\underline{Top}$ tel qu'on ait

$$\underline{B} \xrightarrow{\lambda} \underline{E} \xrightarrow{\Phi} \underline{F} = \underline{B} \xrightarrow{\mu} \underline{F}.$$

5° Si de plus on suppose, dans la propriété précédente, que tout objet de $\underline{F}$ est variétal (resp. variétal de type fini) sur $\underline{B}$, alors Φ est un isomorphisme.

6.5. Soit $\underline{B}$ un site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.) et considérons le quasi-topos $\underline{B}_J^{cr}$ (construit au 5.11) où J est une topologie de Grothendieck pour laquelle :

1° toute famille (resp. famille finie) $(B_i \to B)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}(B)$ pour laquelle $(top\, B_i \to top\, B)_{i \in I}$ est épimorphe, est J-couvrante,

2° toute famille J-couvrante est finissante.

Remarquons que les familles (resp. familles finies) $(B_i \to B)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}(B)$ pour lesquelles $(top\, B_i \to top\, B)_{i \in I}$ est épimorphe forment une topologie de Grothendieck vérifiant les conditions ci-dessus.

6.6. 1° Le plongement $\mathcal{Y} : \underline{B} \to \underline{B}^{cr}$ (voir 5.6) se factorise par $\underline{B}_J^{cr}$.

2° On construit un foncteur $top : \underline{B}_J^{cr} \to \underline{Top}$: il associe au p-crible $(E, \mathcal{E})$ (où $p = \underline{B} \xrightarrow{top} \underline{Top} \xrightarrow{oub} \underline{Ens}$) l'espace topologique final pour la famille d'applications $(p\, B \xrightarrow{x} E)_{(B, x) \in \mathcal{E}}$. Ainsi $\mathcal{Y} : \underline{B} \to \underline{B}_J^{cr}$ devient un foncteur au-dessus de $\underline{Top}$.

3° Sous les conditions 6.5, la catégorie $\underline{B}_J^{cr}$ est variétalement close (resp. une c.v.c.t.f.).

Ainsi, à l'aide de 6.4, on voit que :

6.7. PROPOSITION. *Pour tout site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.) $\underline{B}$, il existe une catégorie $\underline{E}$ variétalement close (resp. une c.v.c.t.f.) et un foncteur pleinement fidèle $\lambda : \underline{B} \to \underline{E}$ au-dessus de $\underline{Top}$ tels que :*

1° toute flèche $B' \to B$ de $\mathcal{B}(B)$ est envoyée par λ sur une flèche commençante ;

2° tout objet de $\underline{E}$ est variétal (resp. variétal de type fini) sur $\underline{B}$. De plus, si $\lambda' : \underline{B} \to \underline{E}'$ est une autre solution du problème, il existe un unique isomorphisme $\Phi : \underline{E} \to \underline{E}'$ au-dessus de $\underline{Top}$ tel que :

$$\underline{B} \xrightarrow{\lambda} \underline{E} \xrightarrow{\Phi} \underline{E}' = \underline{B} \xrightarrow{\lambda'} \underline{E}'.$$

PREUVE. On prend pour $\underline{E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{B}_J^{cr}$ ayant pour objets ceux qui sont variétaux (resp. variétaux de type fini) sur $\underline{B}$.

On notera alors $\underline{E} = Var(\underline{B})$ (resp. $\underline{E} = Var_f(\underline{B})$), et on dira que $Var(\underline{B})$ (resp. $Var_f(\underline{B})$) *est la clôture variétale* (resp. *clôture variétale de type fini*) *de* $\underline{B}$.

6.8. REMARQUE. Dans la preuve de la Proposition 6.7, nous voyons qu'il y a plusieurs choix possibles de topologies de Grothendieck (celles qui vérifient 6.5) qui donnent la même catégorie $Var(\underline{B})$ (resp. $Var_f(\underline{B})$).

En fait dans la pratique on donne la plupart du temps une autre description, plus particulière, de $Var(\underline{B})$ que nous allons résumer ici.

6.9. 1° Soit $\underline{B}$ une catégorie et $top: \underline{B} \to \underline{Top}$ un foncteur vérifiant seulement les axiomes (1), (3) et (4) des catégories variétalement closes (6.2). $\underline{B}$ est en particulier un site topologique concret en prenant pour $\mathfrak{B}(B)$ l'ensemble des morphismes commençants injectifs ouverts de but B.

2° On appelle *carte* sur un espace topologique V un triplet (V, ϕ, B), où U est un sous-espace ouvert de V, B un objet de $\underline{B}$ et $\phi: U \to top\, B$ un homéomorphisme.

3° Deux cartes (U, ϕ, B) et (U', ϕ', B') sont dites *compatibles* si,

$$\phi_1 : U \cap U' \to \phi(U \cap U') \quad \text{et} \quad \phi'_1 : U \cap U' \to \phi'(U \cap U')$$

étant les restrictions respectivement de ϕ et ϕ', l'homéomorphisme

$$\phi'_1 . \phi_1^{-1} : \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$$

se relève en un isomorphisme $B \restriction \phi(U \cap U') \to B' \restriction \phi'(U \cap U')$.

4° Un *atlas* A sur V est un ensemble de cartes deux à deux compatibles qui recouvrent V (i. e. tel que $V = \bigcup_{(U, \phi, B) \in \mathrm{A}} U$).

5° Un atlas est dit *complet* s'il est maximal pour l'inclusion.

6° On appelle *variété modelée sur* $\underline{B}$ un couple (V, A) où V est un espace topologique et A un atlas complet sur V.

7° Un *morphisme* $f: (V, \mathrm{A}) \to (V', \mathrm{A}')$ entre variétés modelées sur $\underline{B}$ est une application continue $f: V \to V'$ telle que, pour toutes les cartes

(U,ϕ,B) de A et (U',ϕ',B') de A', le composé

$$\phi(U\cap \overset{-1}{f}U') \xrightarrow{\overset{-1}{\phi}} U\cap \overset{-1}{f}U' \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{\phi'} top\, B'$$

se relève en une flèche $B\restriction \phi(U\cap \overset{-1}{f}U') \to B'$. On construit ainsi une catégorie Var$(\underline{B})$.

8° On construit canoniquement un foncteur $v: \underline{B} \to$ Var$(\underline{B})$ qui est pleinement fidèle. Il associe à l'objet B de $\underline{B}$ le couple $(top\, B, A_B)$, où A_B est l'atlas complet formé des cartes (U,ϕ,B') où U est un sous-espace ouvert de $top\, B$ et $\phi: U \to top\, B'$ un homéomorphisme qui se relève en un isomorphisme $B\restriction U \to B'$.

6.10. PROPOSITION. Var$(\underline{B})$ *est la clôture variétale de* $\underline{B}$. *Par suite*

$$\text{Var}(\underline{B}) \approx Var(\underline{B}).$$

6.11. EXEMPLES. 1° La dernière proposition montre que, si on prend pour catégorie $\underline{B}$:

a) la catégorie ayant

- pour objets, les couples (U,B), où B est un espace de Banach et U un ouvert de B,
- pour morphismes $f:(U,B)\to(U',B')$ les applications $f: U\to U'$ qui sont différentiables de classe C^p,

b) la catégorie ayant :

- pour objets, les couples (U,n), où n est un entier naturel et U un ouvert de k^n (k étant un corps valué fixé une fois pour toutes),
- pour morphismes $(U,n)\to(U',n')$ les applications $f: U\to U'$ qui sont analytiques sur k,

alors la catégorie $Var(\underline{B})$ n'est autre que la catégorie :

- des variétés banachiques de classe C^p dans le cas a,
- des variétés analytiques sur k dans le cas b.

2° La Proposition 6.7 permet de donner un autre exemple qui n'entre pas dans le cadre de la Proposition 6.10 : Prenons, en effet, pour catégorie $\underline{B}$ la catégorie opposée (ou duale) de la catégorie des k-algèbres réduites de type fini. $\underline{B}$ devient un site topologique concret en prenant pour ensemble $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des homomorphismes de la forme

$$A \to A_f \quad \text{où} \quad A_f = A[X]/(1-fX),$$

et pour foncteur $top = Spm : \underline{B} \to \underline{Top}$ (spectre maximal). Alors la catégorie des prévariétés algébriques vérifie les axiomes d'une clôture variétale de type fini de $\underline{B}$.

6.12. CONCLUSION. Ainsi ces différentes catégories de variétés peuvent être construites de façon sensiblement plus simple, en utilisant le quasi-topos $\underline{B}_J^{cr}$, $Var(\underline{B})$ (resp. $Var_f(\underline{B})$) étant simplement, comme nous l'avons vu, la sous-catégorie pleine de cette dernière qui a pour objets les objets variétaux (resp. variétaux de type fini) sur $\underline{B}$. L'utilisation de $\underline{B}_J^{cr}$ présente d'autres avantages (sur la catégorie des k-espaces de Cartan, par exemple), comme le montre la proposition suivante :

6.13. 1° Si les produits finis existent dans le site topologique concret (resp. s.t.c.t.f.) $\underline{B}$ et sont préservés par le foncteur d'oubli composé

$$\underline{B} \longrightarrow \underline{Top} \longrightarrow \underline{Ens},$$

alors ils existent aussi dans $Var(\underline{B})$ (resp. $Var_f(\underline{B})$) et ils sont préservés par le foncteur inclusion

$$Var(\underline{B}) \hookrightarrow \underline{B}_J^{cr} \quad (\text{resp. } Var_f(\underline{B}) \hookrightarrow \underline{B}_J^{cr}).$$

2° On a l'isomorphisme $\underline{B}_J^{cr} \approx Var(\underline{B})_{J'}^{cr}$ (resp. $\approx Var_f(\underline{B})_{J'}^{cr}$), où :

- J est la topologie de Grothendieck sur $\underline{B}$ ayant pour familles couvrantes les familles (resp. familles finies) $(B_i \to B)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}(B)$ pour lesquels $(top\, B_i \to top\, B)_{i \in I}$ est épimorphe,
- J' est la topologie de Grothendieck sur $Var(\underline{B})$ (resp. $Var_f(\underline{B})$) ayant pour familles couvrantes sur l'objet V de $Var(\underline{B})$ les recouvrements (resp. recouvrements finis) d'ouverts de V.

3° Le foncteur inclusion $Var(\underline{B}) \hookrightarrow \underline{B}_J^{cr}$ (resp. $Var_f(\underline{B}) \hookrightarrow \underline{B}_J^{cr}$) préserve les limites projectives déjà préservées par le foncteur d'oubli

$$Var(\underline{B}) \to \underline{Ens} \quad (\text{resp. } Var_f(\underline{B}) \to \underline{Ens}).$$

BIBLIOGRAPHIE.

1. ANTOINE, P., Extension minimale de la catégorie des espaces topologiques, *C.R. A.S. Paris* 262 (1966), 1389 - 1392.

2. ANTOINE, P., Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique* 18 (1966), 142 - 166 et 387 - 414.

3. BENABOU, J., Notes de Conférences, 1974.

4. CHOQUET, G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble*, Sect. Sc. Math. Phys. 23 (1948), 57 - 112.

5. DAY, B., Limit spaces and closed span categories, Cat. Sem. Sidney 1972 - 73, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974), 65 - 74.

6. FREYD, P., Aspects of topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.* 7 (1972), 1 - 76.

7. KOCK, A. and WRAITH, G. C., *Elementary toposes*, Lecture Notes 30, Matem. Institut, Aarhus Univ., 1971.

8. KOWALSKY, H.-J., Limesräume und Komplettierung, *Math. Nachr.* 12 (1954), 301 - 340.

9. PENON, J., Quasi-topos, *C.R.A.S. Paris* 276 (1973), 237 - 240.

10. SPANIER, Quasi-topologie, *Duke Math. J.* 30 (1963).

11. WYLER, O., Are there topoi in Topology ? *Lecture Notes in Math.* 540, Springer (1975), 699 - 719.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7, Tours 45 - 55
2 Place Jussieu
75005 PARIS