CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PHILIPPE ANTOINE

# Notion de compacité et quasi-topologie

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 14, nº 3 (1973), p. 291-308

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_3_291_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE* *Vol. XIV-3*
*ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE*

# NOTION DE COMPACITE ET QUASI-TOPOLOGIE

*par Philippe ANTOINE*

## INTRODUCTION

Une théorie de quasi-topologie est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur d'oubli $V$ vers la catégorie des ensembles et d'un foncteur pleinement fidèle $I$ de la catégorie *Top* des espaces topologiques dans $\mathcal{C}$ tel que le foncteur composé $V \circ I$ soit le foncteur d'oubli usuel sur *Top*. On est amené à choisir une théorie de quasi-topologie afin de travailler dans une catégorie $\mathcal{C}$ possédant des propriétés nouvelles faisant défaut à *Top*; on veut par exemple que $(\mathcal{C}, V)$ vérifie :

(F) Il existe une structure canonique sur tout ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ et le foncteur $I$ respecte les structures canoniques lorsque celles-ci existent dans *Top*.

Simultanément, on souhaite conserver les bonnes propriétés de *Top*; on exige par exemple que $(\mathcal{C}, V)$ vérifie :

(C) Il existe dans $(\mathcal{C}, V)$ des structures initiales quelconques (donc aussi des structures finales quelconques) et le foncteur $I$ commute aux structures initiales.

Il existe a priori une infinité de théories de quasi-topologie vérifiant les conditions (F) et (C); quatre au moins ont été décrites, la plus connue étant la théorie de quasi-topologie de Fischer (structures aux limites) [1].

Un des outils de la Topologie est la notion d'espace compact et un développement satisfaisant de l'analyse dans le cadre d'une théorie de quasi-topologie suppose qu'on ait une généralisation de la notion de compacité, celle-ci devant vérifier les propriétés particulières qui font l'intérêt des espaces compacts. Si l'on aborde ce problème dans une théorie de quasi-topologie trop différente de la Topologie, c'est-à-dire intuitivement si la catégorie $\mathcal{C}$ est trop grande, on parvient éventuellement à généraliser la notion de compacité en ce sens que l'on définit une sous-catégorie $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ telle que $I^{-1}(\mathcal{K})$ soit la catégorie des espaces topologiques compacts, mais cette notion ne vérifie essentiellement pas les propriétés souhaitées. Il en est ainsi de la théorie de quasi-topologie de Fischer, où l'on définit de manière naturelle un objet quasi-compact comme étant un objet sur lequel tout ultrafiltre converge, et un objet compact comme étant un objet quasi-compact séparé, mais où, par exemple, un morphisme bijectif d'un objet quasi-compact dans un objet séparé n'est pas nécessairement un isomorphisme et où l'image d'un objet quasi-compact n'est pas nécessairement un objet quasi-compact.

Dans un article précédent [2] nous avons montré qu'il existe une théorie de quasi-topologie $(\mathcal{T}, V)$ minimale parmi les théories de quasi-topologie vérifiant (F) et (C). Le but du présent article est d'expliciter pour $(\mathcal{T}, V)$ une notion de compacité «aussi bonne» que la notion de compacité pour les espaces toplogiques.

Cette étude repose sur les propriétés d'un foncteur $\Omega$ de $\mathcal{T}^{0}$ dans $\mathcal{T}$ introduit au § 1, tel que $V\Omega(X)$ s'identifie à l'ensemble des ouverts de $X$, c'est-à-dire des ouverts de l'espace topologique $R(X)$ sous-jacent à $X$. La notion d'objet séparé est étudiée au §2 en relation avec le foncteur $\Omega$, puis la notion d'objet quasi-compact est définie au § 3 : un objet $X$ est quasi-compact si la partie à un élément $\{X\}$ de $\Omega(X)$ est un ouvert. Les théorèmes fondamentaux sur les objets quasi-compacts sont établis et l'on montre qu'un espace topologique $A$ est quasi-compact si et seulement si $I(A)$ est un objet quasi-compact au sens de la théorie $(\mathcal{T}, V)$. Enfin, la relation entre la notion de compacité dans $(\mathcal{T}, V)$ et la notion de compacité dans la théorie de quasi-topologie $(\mathfrak{Q}\mathcal{T}, V)$ de Fischer est établie au § 4.

Nous nous servirons sans les re-démontrer des propriétés suivantes de la théorie $(\mathcal{T}, V)$:

1° Tout objet de $\mathcal{T}$ est structure initiale pour une donnée initiale: $(E, (\phi_i, \mathcal{T}(A_i, B_i))_{i\in I})$, où $A_i$ et $B_i$ sont des espaces topologiques (cela résulte de la construction explicite de $\mathcal{T}$).

2° Tout objet de $\mathcal{T}$ est structure finale pour une donnée $((A_i, \phi_i)_{i\in I}, E)$, où $A_i$ est un espace topologique.

3° Le foncteur «espace topologique sous-jacent» $R$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $I$ de $Top$ dans $\mathcal{T}$.

L'ensemble $Hom_{\mathcal{T}}(X, Y)$ muni de sa structure canonique est noté $\mathcal{T}(X, Y)$; c'est un objet de $\mathcal{T}$.

REMARQUE. La notion de filtre convergent sur un objet de $\mathcal{T}$ donnée dans [2] est incorrecte : ainsi que l'a fait remarquer A. Machado elle ne coïncide pas avec la notion usuelle quand on se restreint aux espaces topologiques! Une définition correcte est proposée ici au début du § 4. (*)

## I. LE FONCTEUR $\Omega$.

I.1. DEFINITION. Soit $\mathcal{S}$ l'espace topologique d'ensemble sous-jacent $\{0,1\}$ admettant pour ouverts les parties $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$. Etant donné un objet $X$ de $\mathcal{T}$ nous appellerons *espace des ouverts* de $X$, et nous noterons $\Omega(X)$, l'objet $\mathcal{T}(X, \mathcal{S})$ de $\mathcal{T}$. Si $X$ est un espace topologique, on a

$$V\Omega(X) = V\mathcal{T}(X, \mathcal{S}) = Hom_{\mathcal{T}}(X, \mathcal{S}) = Hom_{Top}(X, \mathcal{S})$$

et il est clair que l'application, qui à $f$ élément de $Hom_{Top}(X, \mathcal{S})$ associe l'ouvert $f^{-1}(\{0\})$ de $X$, est une bijection ; si $X$ est quelconque, en usant de ce que $\mathcal{S}$ est topologique et de la propriété d'adjonction du foncteur $R$, il vient

$$V\Omega(X) = V\mathcal{T}(X, \mathcal{S}) = Hom_{\mathcal{T}}(X, \mathcal{S}) = Hom_{Top}(R(X), \mathcal{S});$$

ceci entraîne que $V\Omega(X)$ s'identifie à l'ensemble des ouverts de $R(X)$. Remarquons enfin que $\Omega$ définit un foncteur de $\mathcal{T}^{o}$ dans $\mathcal{T}$.

I.2. PROPOSITION. *Les espaces $\Omega(X\times Y)$, $\mathcal{T}(X, \Omega(Y))$ et $\mathcal{T}(Y, \Omega(X))$ sont canoniquement isomorphes.*

DEMONSTRATION. C'est l'isomorphisme canonique de $\mathcal{T}(X\times Y, \mathcal{S})$ sur $\mathcal{T}(X, \mathcal{T}(Y, \mathcal{S}))$ ou sur $\mathcal{T}(Y, \mathcal{T}(X, \mathcal{S}))$. L'isomorphisme de $\Omega(X\times Y)$ sur $\mathcal{T}(X, \Omega(Y))$ peut être décrit par son application sous-jacente : à $\omega$ ou-

(*) NOTE DE LA REDACTION. Une première version de cet article a été exposée à Paris en 1971 par A. Machado.

vert de $X \times Y$ correspond l'application de $X$ dans $\Omega(Y)$ qui à $x$ élément de $X$ associe la tranche de $\omega$ suivant $x$, c'est-à-dire l'ouvert de $Y$:

$$\omega_x = \{ y \mid (x, y) \in \omega \} \quad \blacksquare$$

I.3. PROPOSITION. *L'application qui à un morphisme $f$ de $X$ dans $Y$ associe le morphisme $\Omega(f)$ de $\Omega(Y)$ dans $\Omega(X)$ est sous-jacente à un morphisme de $\mathfrak{T}(X, Y)$ dans $\mathfrak{T}(\Omega(Y), \Omega(X))$.*

DEMONSTRATION. Le morphisme de composition

$$\gamma : \mathfrak{T}(X, Y) \times \mathfrak{T}(Y, \mathfrak{I}) \to \mathfrak{T}(X, \mathfrak{I}),$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}(X, Y) \times \Omega(Y) \to \Omega(X) : (f, \omega) \rightsquigarrow f^{-1}(\omega),$$

induit le morphisme

$$\mathfrak{T}(X, Y) \to \mathfrak{T}(\Omega(Y), \Omega(X)) : f \rightsquigarrow \Omega(f) = \{ \omega \rightsquigarrow f^{-1}(\omega) \} \quad \blacksquare$$

I.4. PROPOSITION. *L'application qui à un ouvert $\omega$ de $Y$ et à un élément $x$ de $X$ associe l'ouvert $\{ f \mid f(x) \in \omega \}$ de $\mathfrak{T}(X, Y)$ est sous-jacente à un morphisme de $\Omega(Y) \times X$ dans $\Omega\mathfrak{T}(X, Y)$.*

DEMONSTRATION. Le morphisme de composition $\gamma$ induit un morphisme

$$\mathfrak{T}(X, Y) \times \Omega(Y) \times X \to \mathfrak{I} : \qquad (f, \omega, x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in f^{-1}(\omega) \\ 1 & si \ \ x \notin f^{-1}(\omega), \end{cases}$$

d'où le morphisme

$$\Omega(Y) \times X \to \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(X, Y), \mathfrak{I}) = \Omega(\mathfrak{T}(X, Y)) : \quad (\omega, x) \rightsquigarrow \{ f \mid f(x) \in \omega \} \quad \blacksquare$$

I.5. THEOREME. *Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathfrak{T}$. Une application $f$ de $V(X)$ dans $V(Y)$ est sous-jacente à un morphisme de $X$ dans $Y$ si et seulement si :*

(i) *l'image réciproque par $f$ d'un ouvert de $Y$ est un ouvert de $X$;*

(ii) *l'application $f^*$ de $V\Omega(Y)$ dans $V\Omega(X)$ dont (i) assure l'existence est sous-jacente à un morphisme de $\Omega(Y)$ dans $\Omega(X)$.*

DEMONSTRATION. Si $f$ est sous-jacente à un morphisme, les conditions (i) et (ii) résultent du caractère fonctoriel de $\Omega$.

Soit maintenant $f$ une application de $V(X)$ dans $V(Y)$ vérifiant les conditions (i) et (ii). Si $Y$ est topologique, la condition (i) assure que $f$ est sous-jacente à un morphisme de $R(X)$ dans $Y$, donc de $X$ dans $Y$ d'après la propriété d'adjonction du foncteur $R$. Dans le cas général $Y$ est structure initiale pour une famille d'objets $\mathfrak{I}(A_i, B_i)$, où $A_i$ et $B_i$ sont topologiques; il est donc suffisant de démontrer le théorème dans le cas où $Y = \mathfrak{I}(A, B)$ avec $A$ et $B$ topologiques. La proposition 4 appliquée à $\mathfrak{I}(A, B)$, jointe à la condition (ii), assure que l'on a un morphisme composé

$$\Omega(B) \times A \to \Omega(X): \qquad (\omega, a) \rightsquigarrow \{x \mid f_x(a) \in \omega\},$$

ce qui est équivalent au morphisme

$$\Omega(B) \to \mathfrak{I}(A, \Omega(X)): \qquad \omega \rightsquigarrow [a \rightsquigarrow \{x \mid f_x(a) \in \omega\}],$$

ou encore, d'après la proposition 2,

$$\Omega(B) \to \Omega(A \times X): \qquad \omega \rightsquigarrow \{(a, x) \mid f_x(a) \in \omega\}.$$

L'application

$$\tilde{f}: V(A) \times V(X) \to V(B): \qquad (a, x) \rightsquigarrow f_x(a)$$

est donc telle que l'image réciproque d'un ouvert de $B$ est un ouvert de $A \times X$ et, $B$ étant topologique, cette condition est suffisante pour que $\tilde{f}$ soit sous-jacente à un morphisme. Par définition de la structure $\mathfrak{I}(A, B)$ il en résulte que $f$ est sous-jacente à un morphisme ∎

Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathfrak{I}$. Par la proposition 2 on a les isomorphismes naturels suivants:

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{I}(\Omega(Y), \Omega(X)) \cong \Omega(\Omega(Y) \times X) \cong \mathfrak{I}(X, \Omega\Omega(Y)).$$

Si $X = Y$, à l'identité de $\Omega(X)$ correspond un morphisme $\xi$ de $X$ dans $\Omega\Omega(X)$ que l'on peut décrire de la manière suivante: $\xi(x)$ est l'ensemble des ouverts de $X$ contenant $x$. Le théorème 5 est alors équivalent à:

I.6. PROPOSITION. *L'objet $X$ est structure initiale pour $\xi$.*

DEMONSTRATION. On doit montrer qu'une application $f$ de $V(Z)$ dans

$V(X)$ est sous-jacente à un morphisme de $Z$ dans $X$ si et seulement si l'application composée

$$V(Z) \to V(X) \overset{\xi}{\to} V\Omega\Omega(X): \qquad z \rightsquigarrow \{\omega \mid f(z) \in \omega\}$$

est sous-jacente à un morphisme. Par la suite d'isomorphismes (I) cela est équivalent à ce que $\{(\omega, z) \mid f(z) \in \omega\}$ soit un ouvert de $\Omega(X) \times Z$, ou encore que l'application de $V\Omega(X)$ dans $V\Omega(Z)$ qui à $\omega$ associe $\{z \mid f(z) \in \omega\}$ soit sous-jacente à un morphisme, c'est-à-dire les conditions (i) et (ii) du théorème 5 ■

L'existence du morphisme $\xi$ déduit des isomorphismes (I) donne un premier renseignement sur la structure de $\Omega(X)$:

I.7. PROPOSITION. *L'ensemble des ouverts de $X$ contenant un élément fixé $x$ de $X$ est un ouvert de $\Omega(X)$.*

Nous allons maintenant préciser les liens entre la structure de $\Omega(X)$ et, d'une part la relation d'ordre définie par l'inclusion des ouverts, d'autre part les lois de composition internes définies par la réunion et l'intersection et la loi de composition externe définie par le produit.

I.8. PROPOSITION. *Un élément $\omega_1$ de $\Omega(X)$ adhère à un élément $\omega_2$ si et seulement si $\omega_1$ est inclus dans $\omega_2$.*

DEMONSTRATION. Soit $\omega_1$ adhérant à $\omega_2$. Quel que soit $x$ élément de $\omega_1$ l'ouvert $\{\omega \mid x \in \omega\}$ de $\Omega(X)$ contenant $\omega_1$ doit contenir $\omega_2$, donc $x$ appartient à $\omega_2$, c'est-à-dire que $\omega_1$ est inclus dans $\omega_2$.

Réciproquement, si $\omega_1$ est inclus dans $\omega_2$, alors

$$\omega = \omega_2 \times \{0\} \cup \omega_1 \times \{1\}$$

est un ouvert de $X \times \mathcal{S}$: on a en effet $\omega = \omega_2 \times \{0\} \cup \omega_1 \times \{0, 1\}$, réunion de deux ouverts. Par la proposition 2 on en déduit un morphisme

$$\mathcal{S} \longrightarrow \Omega(X): \qquad \begin{cases} 0 \rightsquigarrow \omega_2 \\ 1 \rightsquigarrow \omega_1 \end{cases}.$$

Si un ouvert de $\Omega(X)$ contient $\omega_1$, son image réciproque par ce morphisme est un ouvert de $\mathcal{S}$ contenant $1$ : c'est donc $\{0, 1\}$. Il s'ensuit que $\omega_2$ appartient aussi à l'ouvert considéré de $\Omega(X)$ ■

I.9. COROLLAIRE. *Si un ouvert de $\Omega(X)$ contient un ouvert $\omega$ de $X$, il contient tout ouvert $\omega'$ de $X$ contenant $\omega$.*

En particulier, tout ouvert de $\Omega(X)$ contient $X$.

Soit $\mathcal{G}^n$ un produit fini d'exemplaires de $\mathcal{G}$. Le point $(0,\dots,0)$ de $\mathcal{G}^n$ est ouvert puisque produit d'un nombre fini d'ouverts. On en déduit une application continue de $\mathcal{G}^n$ dans $\mathcal{G}$ envoyant $(0,\dots,0)$ sur $0$ et tous les autres éléments sur $1$. Quel que soit l'objet $X$, on a par fonctorialité un morphisme de

$$\mathcal{T}(X,\mathcal{G}^n) \cong \mathcal{T}(X,\mathcal{G})^n = \Omega(X)^n \quad \text{dans} \quad \mathcal{T}(X,\mathcal{G}) = \Omega(X)$$

dont l'application sous-jacente est l'application d'intersection.

I.10. PROPOSITION. *L'application d'intersection finie*

$$V((\Omega(X))^n) = (V\Omega(X))^n \to V\Omega(X): \quad \{\omega_i\}_{i=1}^n \rightsquigarrow \bigcap_{i=1}^n \omega_i$$

*est sous-jacente à un morphisme.*

I.11. COROLLAIRE. *L'application de produit fini*

$$V(\prod_{i=1}^n \Omega(X_i)) = \prod_{i=1}^n V\Omega(X_i) \to V\Omega(\prod_{i=1}^n X_i): \quad \{\omega_i\}_{i=1}^n \rightsquigarrow \prod_{i=1}^n \omega_i$$

*est sous-jacente à un morphisme.*

DEMONSTRATION. Les morphismes de projection

$$\pi_j : \prod_{i=1}^n X_i \to X_j: \quad \{x_i\}_{i=1}^n \rightsquigarrow x_j$$

donnent par le foncteur $\Omega$ des morphismes

$$\Omega(\pi_j): \Omega(X_j) \to \Omega(\prod_{i=1}^n X_i): \quad \omega_j \rightsquigarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times \omega_j \times \dots \times X_n .$$

On identifie alors le morphisme de produit fini au morphisme composé du morphisme d'intersection et du morphisme $\prod_{i=1}^n \Omega(\pi_i)$ ∎

Soit $\mathcal{G}^I$ un produit quelconque d'exemplaires de $\mathcal{G}$. Le point $\mathbf{1} = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ avec $\varepsilon_i = 1$ est fermé puisque produit de fermés. On en déduit une application continue de $\mathcal{G}^I$ dans $\mathcal{G}$ envoyant $\mathbf{1}$ sur $1$ et tous les autres éléments sur $0$. Quel que soit l'objet $X$, on a par fonctorialité un morphisme de $\mathcal{T}(X,\mathcal{G}^I) \cong \mathcal{T}(X,\mathcal{G})^I = [\Omega(X)]^I$ dans $\mathcal{T}(X,\mathcal{G}) = \Omega(X)$ dont l'application sous-jacente est l'application de réunion:

I.12. PROPOSITION. *L'application de réunion*

$$V((\Omega(X))^I)=(V\Omega(X))^I \to V\Omega(X):\ \{\omega_i\}_{i\in I} \rightsquigarrow \bigcup_{i\in I}\omega_i$$

*est sous-jacente à un morphisme.*

Si un objet $X$ est structure finale pour une donnée $((X_i,\phi_i)_{i\in I},E)$, alors, une application $\alpha$ de $E$ dans $\mathcal{G}$ est sous-jacente à un morphisme (i.e. définit un ouvert de $X$) si et seulement si $\alpha\circ\phi_i$ est sous-jacente à un morphisme pour tout $i$. En d'autres termes une partie $\omega$ de $E$ est un ouvert de $X$ si et seulement si $\phi_i^{-1}(\omega)$ est un ouvert de $X$ pour tout $i$. Soient $\phi_i^*$ les applications de $V\Omega(X)$ dans $V\Omega(X_i)$ induites par les applications $\phi_i$ ; on a alors:

I.13. PROPOSITION. *Si un objet $X$ est structure finale pour une donnée surjective $((X_i,\phi_i)_{i\in I},E)$, l'objet $\Omega(X)$ est structure initiale pour la donnée $(V\Omega(X),(\phi_i^*,\Omega(X_i))_{i\in I})$.*

DEMONSTRATION. Si une application $\phi$ de $V(Z)$ dans $V\Omega(X)=V\mathcal{T}(X,\mathcal{G})$ a la propriété que $\phi_i^*\circ\phi$ soit sous-jacente à un morphisme de $Z$ dans $\Omega(X_i)=\mathcal{T}(X_i,\mathcal{G})$, on a la suite de morphismes:

$$Z\to\mathcal{T}(X_i,\mathcal{G}):\qquad z\rightsquigarrow\phi_z\circ\phi_i,$$

$$Z\times X_i\to\mathcal{G}:\qquad (z,x_i)\rightsquigarrow\phi_z\circ\phi_i(x_i),$$

$$\begin{array}{ll} X_i\to\mathcal{T}(Z,\mathcal{G}): & x_i\rightsquigarrow[z\rightsquigarrow\phi_z\circ\phi_i(x_i)], \\ \quad\searrow X\nearrow & \qquad\searrow\ \phi_i(x_i)\ \nearrow \end{array}$$

$$X\to\mathcal{T}(Z,\mathcal{G}):\qquad x\rightsquigarrow[z\rightsquigarrow\phi_z(x)],$$

$$X\times Z\to\mathcal{G}:\qquad (x,z)\rightsquigarrow\phi_z(x),$$

$$Z\to\mathcal{T}(X,\mathcal{G}):\qquad z\rightsquigarrow\phi_z\qquad\blacksquare$$

## 2. OBJETS SEPARES.

2.1. DEFINITION. Nous dirons qu'un objet $X$ de $\mathcal{T}$ est *séparé* si la diagonale de $X\times X$ est fermée.

On étend sans difficultés aux objets séparés de $\mathcal{T}$ les théorèmes classiques de la Topologie générale relatifs aux espaces séparés; par exemple, tout sous-objet d'un objet séparé est séparé et tout produit d'objets séparés est séparé. Certains résultats sont propres à la présente théorie, conséquences de l'existence du foncteur $\Omega$ et de ce que dans $\mathcal{T}$ les structures finales sont plus fines que dans *Top*.

2.2. PROPOSITION. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet $X$ soit séparé est que les points soient fermés et que l'application*

$$V(X) \to V\Omega(X): \quad x \rightsquigarrow X - \{x\}$$

*soit sous-jacente à un morphisme.*

DEMONSTRATION. Si $X$ est séparé, la diagonale est fermée dans $X \times X$; à l'ouvert $X \times X - \Delta$ est associé le morphisme

$$X \times X \to \mathfrak{I}: \quad (x,y) \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & si \ x \neq y \\ 1 & si \ x = y \end{cases}$$

d'où le morphisme

$$X \to \mathcal{T}(X, \mathfrak{I}): \quad x \rightsquigarrow \left[ y \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & si \ x \neq y \\ 1 & si \ x = y \end{cases} \right]$$

que l'on interprète en termes d'ouverts :

$$X \to \Omega(X): \quad x \rightsquigarrow X - \{x\}.$$

La réciproque est immédiate ■

2.3. COROLLAIRE. *Si $\mathfrak{W}$ est un ouvert de $\Omega(X)$ et si $X$ est séparé, la partie $\bigcap_{\omega \in \mathfrak{W}} \omega$ est fermée dans $X$ et l'application*

$$V\Omega\Omega(X) \to V\Omega(X): \quad \mathfrak{W} \rightsquigarrow \complement \bigcap_{\omega \in \mathfrak{W}} \omega$$

*est sous-jacente à un morphisme.*

DEMONSTRATION. On applique le foncteur $\Omega$ au morphisme de $X$ dans $\Omega(X)$ décrit à la proposition 2 :

$$\Omega\Omega(X) \to \Omega(X): \quad \mathfrak{W} \rightsquigarrow \{x \mid X - \{x\} \in \mathfrak{W}\}.$$

Un élément $x$ tel que $X - \{x\}$ appartienne à $\mathfrak{W}$ appartient au complémentaire d'un élément de $\mathfrak{W}$. Réciproquement, si $x$ appartient au complémentaire d'un élément $\omega$ de $\mathfrak{W}$, alors $\omega$ est inclus dans $X - \{x\}$, ce qui entraîne (Cor. 1.9) que $X-\{x\}$ appartient à $\mho$. On a donc

$$\{x \mid X-\{x\}\in \mho\} = \bigcup_{\omega\in\mho} \complement\, \omega = \complement \bigcap_{\omega\in\mho} \omega \quad \blacksquare$$

2.4. THEOREME. *Pour qu'un objet quotient* $X/S$ *soit séparé, il faut et il suffit que le graphe* $\Gamma$ *de* $S$ *soit fermé dans* $X\times X$.

DEMONSTRATION. Si $X/S$ est séparé, on a le morphisme

$$X/S \to \Omega(X/S): \qquad [x] \rightsquigarrow X/S - \{[x]\}$$

qui composé avec les morphismes canoniques donne

$$X \to X/S \to \Omega(X/S) \to \Omega(X): \qquad x \rightsquigarrow X - \{y \mid ySx\},$$

ce qui exprime la fermeture du graphe.

Réciproquement, si $\Gamma$ est fermé, les classes d'équivalence sont fermées et il suffit de montrer que l'application

$$V(X/S) \to V\Omega(X/S): \qquad [x] \rightsquigarrow X/S - \{[x]\}$$

est sous-jacente à un morphisme. Or $X/S$ est une structure finale et $\Omega(X/S)$ est une structure initiale (Prop. 1.13); on est donc ramené à l'étude de l'application composée

$$V(X) \to V(X/S) \to V\Omega(X/S) \to V\Omega(X): \quad x \rightsquigarrow X - \{y \mid ySx\},$$

c'est-à-dire la fermeture du graphe $\blacksquare$

2.5. REMARQUE. La topologie de $R(X\times X)$ étant plus fine que celle de $R(X)\times R(X)$, il suffit que $R(X)$ soit séparé pour que $X$ le soit, mais cette condition n'est pas nécessaire.

## 3. OBJETS QUASI-COMPACTS, OBJETS COMPACTS.

3.1. DEFINITION. Nous dirons au'un objet $X$ de $\mathcal{T}$ est *quasi-compact* si la partie à un élément $\{X\}$ de $\Omega(X)$ est un ouvert. Nous dirons que $X$ est *compact* si $X$ est un objet quasi-compact séparé.

3.2. PROPOSITION. *Un objet* $X$ *est quasi-compact si et seulement si pour tout ensemble d'indices* $I$ *l'ensemble des recouvrements ouverts de* $X$ *indexés par* $I$ *est un ouvert de* $(\Omega(X))^I$.

DEMONSTRATION. Si $X$ vérifie la propriété, on voit en prenant pour $I$ un ensemble à un élément, $\{X\}$ étant le seul recouvrement de $X$ indexé par $I$, que $\{X\}$ est ouvert dans $\Omega(X)$, donc que $X$ est quasi-compact.

Si $X$ est quasi-compact, l'ensemble des recouvrements indexés par $I$ est l'image réciproque de l'ouvert $\{X\}$ par le morphisme de réunion

$$(\Omega(X))^I \to \Omega(X): \qquad \{\omega_i\}_{i\in I} \rightsquigarrow \bigcup_{i\in I} \omega_i,$$

donc est un ouvert ■

3.3. REMARQUE. Si $X$ est un espace topologique localement compact, alors $\Omega(X)$ est un espace topologique et la proposition 2 entraîne que $X$ possède la propriété des recouvrements finis, donc que $X$ est quasi-compact au sens topologique. Nous verrons (Cor. 16) que ce résultat reste vrai si l'on supprime l'hypothèse que $X$ est localement compact.

3.4. COROLLAIRE. *Si $X$ est un objet quasi-compact, l'ensemble des ouverts de $X$ contenant un fermé donné de $X$ est un ouvert de $\Omega(X)$ et l'application*

$$V\Omega(X) \to V\Omega\Omega(X): \qquad \omega \rightsquigarrow \{\,\mathfrak{o} \mid \mathfrak{o} \supset \complement\omega\,\}$$

*est sous-jacente à un morphisme.*

DEMONSTRATION. L'ensemble des recouvrements ouverts de $X$ formés de deux ouverts est un ouvert de $\Omega(X)\times\Omega(X)$. A cet ouvert est associé le morphisme

$$\Omega(X)\times\Omega(X) \to \mathfrak{I}: \quad (\omega_1,\omega_2) \rightsquigarrow \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \omega_1 \cup \omega_2 = X \\ 1 \ \ si \ \ \omega_1 \cup \omega_2 \neq X \end{cases}$$

d'où le morphisme

$$\Omega(X) \to \mathcal{T}(\Omega(X),\mathfrak{I}): \quad \omega_1 \rightsquigarrow \left[\omega_2 \rightsquigarrow \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \omega_1 \cup \omega_2 = X \\ 1 \ \ si \ \ \omega_1 \cup \omega_2 \neq X \end{cases}\right]$$

que l'on interprète en termes d'ouverts :

$$\Omega(X) \to \Omega\Omega(X): \quad \omega_1 \rightsquigarrow \{\,\omega_2 \mid \omega_1 \cup \omega_2 = X\,\} = \{\,\omega_2 \mid \omega_2 \supset \complement\omega_1\,\} \ ■$$

3.5. DEFINITION. Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathcal{T}$. Nous dirons qu'une application $\phi$ de $V(X)$ dans $V(Y)$ est *fermée* si l'image directe d'un fermé est un fermé et si l'application

$$V\Omega(X)\to V\Omega(Y): \quad \omega \rightsquigarrow \complement\phi(\complement\omega)=\{y\,|\,(y=\phi(x))\Longrightarrow x\in\omega\}$$

est sous-jacente à un morphisme (si $X$ et $Y$ sont topologiques, cette condition est a priori plus forte que la condition topologique d'application fermée). Un morphisme $f$ de $X$ dans $Y$ sera dit fermé si son application sous-jacente est fermée.

3.6. THEOREME. *Un morphisme $f$ d'un objet quasi-compact dans un objet $Y$ séparé est fermé. Si $V(f)$ est bijective, $f$ est un isomorphisme.*

DEMONSTRATION. L'objet $X$ étant quasi-compact, on a (Cor. 4) le morphisme

(1) $$\Omega(X)\to\Omega\Omega(X): \quad u\rightsquigarrow\{v\,|\,v\supset\complement u\};$$

$f$ étant un morphisme, on lui associe par le foncteur $\Omega\Omega$ le morphisme

(2) $$\Omega\Omega(X)\to\Omega\Omega(Y): \quad \mathfrak{O}\rightsquigarrow\{\omega\,|\,f^{-1}(\omega)\in\mathfrak{O}\};$$

enfin, $Y$ étant séparé, on a (Cor. 2.3) le morphisme

(3) $$\Omega\Omega(Y)\to\Omega(Y): \quad \mathfrak{W}\rightsquigarrow\complement\bigcap_{\omega\in\mathfrak{W}}\omega.$$

En remarquant que dans un objet séparé $Y$ l'intersection des ouverts contenant une partie $A$ est égale à $A$ (les points étant fermés) le composé des morphismes (1), (2) et (3) donne le morphisme

(4) $$\Omega(X)\to\Omega(Y): \quad u\rightsquigarrow\complement f(\complement u)=\{y\,|\,(y=f(x))\Longrightarrow x\in\omega\},$$

ce qui démontre la première partie du théorème. Si $V(f)$ est bijective, soit $\phi$ son application réciproque : le morphisme (4) peut alors être décrit de la manière suivante :

(4') $$\Omega(X)\to\Omega(Y): \quad u\rightsquigarrow\{y\,|\,\phi(y)\in u\}=\phi^{-1}(u),$$

ce qui montre que l'image réciproque d'un ouvert par $\phi$ est un ouvert et que l'application $\phi^*$ de $V\Omega(X)$ dans $V\Omega(Y)$ qu'on en déduit est sous-jacente à un morphisme. Il résulte du théorème 1.5 que $\phi$ est sous-jacente à un morphisme qui est le morphisme inverse de $f$ ■

3.7. COROLLAIRE. *Tout sous-objet compact d'un objet séparé est fermé.*

3.8. COROLLAIRE. *Toute structure séparée moins fine qu'une structure* *quasi-compacte lui est identique.*

En particulier, si $X$ est compact et si $R(X)$ est séparé, alors $X$ est topologique.

3.9. THEOREME. *L'image par un morphisme d'un objet quasi-compact est un objet quasi-compact.*

DEMONSTRATION. Soient $X$ un objet quasi-compact et $f$ un morphisme surjectif de $X$ sur un objet $Y$. En appliquant le foncteur $\Omega$ à $f$ on obtient le morphisme

$$\Omega(f):\Omega(Y)\to\Omega(X): \quad \omega \rightsquigarrow f^{-1}(\omega),$$

qui transforme par image inverse l'ouvert $\{X\}$ de $\Omega(X)$ en un ouvert de $\Omega(Y)$; $f$ étant surjective, on a $\{Y\}=(\Omega(f))^{-1}(\{X\})$, donc $\{Y\}$ est ouvert dans $\Omega(Y)$ et $Y$ est quasi-compact ■

3.10. COROLLAIRE. *L'espace topologique sous-jacent à un objet quasi-compact est un objet quasi-compact.*

Nous verrons (Cor. 16) que cela entraîne que l'espace sous-jacent est un espace quasi-compact au sens topologique.

Pour que cette théorie soit cohérente, il reste à établir le lien qu'il y a entre les notions d'espaces topologiques quasi-compacts (resp. compacts) et d'objets quasi-compacts (resp. compacts).

3.11. PROPOSITION. *Une condition suffisante pour qu'un objet $X$ soit quasi-compact est que, pour tout espace topologique $A$, l'image directe d'un fermé par le morphisme de projection de $X\times A$ sur $A$ soit un fermé.*

DEMONSTRATION. On établit d'abord le lemme suivant:

3.12. LEMME. *Soit $X$ un objet tel que l'image directe d'un fermé par la projection de $X\times A$ sur $A$ soit un fermé lorsque $A$ est topologique; alors la propriété est vraie pour $A$ objet quelconque de $\mathfrak{T}$.*

DEMONSTRATION. Soit $Z$ un objet quelconque: il est structure finale pour une donnée $((A_i,\phi_i)_{i\in I},E)$, où $A_i$ est topologique. On doit montrer que, quel que soit l'ouvert $\omega$ élément de $\Omega(X\times Z)$, la partie

$$\alpha=\{z\,|\,\forall\, x,\ (x,z)\in\omega\}$$

de $E$ est un ouvert de $Z$ : c'est équivalent à montrer que pour tout indice $i$ l'image réciproque par $\phi_i$ de cette partie est un ouvert de $A_i$. Le morphisme de $X \times A_i$ dans $X \times Z$ qui à $(x, a_i)$ associe $(x, \phi_i(a_i))$ se transforme par le foncteur $\Omega$ en le morphisme

$$\Omega(X \times Z) \to \Omega(X \times A_i): \quad \omega \rightsquigarrow \omega_i = \{(x, a_i) \mid (x, \phi_i(a_i)) \in \omega\}.$$

Par hypothèse la projection $p_i$ de $X \times A_i$ sur $A_i$ transforme un fermé en un fermé, donc

$$\complement p_i(\complement \omega_i) = \{a_i \mid \forall x, (x, a_i) \in \omega_i\} = \{a_i \mid \forall x, (x, \phi_i(a_i)) \in \omega\}$$

est un ouvert de $A_i$; or c'est l'image réciproque de $\alpha$ par $\phi_i$, ce qui achève la démonstration.

La démonstration de la proposition est alors immédiate : on considère la projection

$$X \times \Omega(X) \to \Omega(X): \quad (x, \omega) \rightsquigarrow \omega$$

et on applique la propriété à l'ouvert $\mathfrak{X} = \{(x, \omega) \mid x \in \omega\}$ de $X \times \Omega(X)$ (c'est l'ouvert associé au morphisme d'évaluation de $X \times \Omega(X) = X \times \mathfrak{T}(X, \mathfrak{S})$ dans $\mathfrak{S}$); il vient que

$$\{\omega \mid \forall x, (x, \omega) \in \mathfrak{X}\} = \{X\}$$

est un ouvert de $\Omega(X)$, donc que $X$ est quasi-compact ■

3.13. COROLLAIRE. *Tout espace topologique quasi-compact (au sens topologique) est un objet quasi-compact de* $\mathfrak{T}$.

DEMONSTRATION. Pour un espace topologique quasi-compact l'application constante sur un point est propre ■

3.14. DEFINITION. Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathfrak{T}$. Nous dirons qu'une application $\phi$ de $V(X)$ dans $V(Y)$ est *propre* si quel que soit l'objet $Z$ de $\mathfrak{T}$ l'application

$$V(X \times Z) \to V(Y \times Z): \quad (x, z) \rightsquigarrow (\phi(x), z)$$

est fermée. Si $Y$ est l'objet ponctuel, cette propriété s'explicite par : quel que soit l'objet $Z$ et quel que soit l'ouvert $\omega$ de $X \times Z$, la partie

$$\{z \mid \forall x, (x, z) \in \omega\}$$

de $V(Z)$ est un ouvert et l'application

$$V\Omega(X\times Z)\to V\Omega(Z): \quad \omega \rightsquigarrow \{z \mid \forall x,\ (x,z)\in\omega\}$$

est sous-jacente à un morphisme.

3.15. THEOREME. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet de $\mathfrak{I}$ soit quasi-compact est que l'application constante sur un point soit propre.*

DEMONSTRATION. La condition suffisante résulte de la proposition 11. On suppose maintenant que $X$ est quasi-compact. Par application des propositions 1.2 et 1.3 on a les morphismes

(1) $\Omega(X\times Z)\to\mathfrak{I}(Z,\Omega(X)): \quad \omega \rightsquigarrow [z \rightsquigarrow \{x \mid (x,z)\in\omega\}]$,

(2) $\mathfrak{I}(Z,\Omega(X))\to\mathfrak{I}(\Omega\Omega(X),\Omega(Z)): \quad \zeta \rightsquigarrow [\{\alpha\} \rightsquigarrow \{z \mid \zeta_z \in \{\alpha\}\}]$.

On compose les morphismes (1) et (2) avec, l'objet $X$ étant quasi-compact, l'évaluation au point $\{X\}$ de $\Omega\Omega(X)$; il vient le morphisme

$$\Omega(X\times Z)\to\Omega(Z): \quad \omega \rightsquigarrow \{z \mid \forall x,(x,z)\in\omega\} \ \blacksquare$$

3.16. COROLLAIRE. *Tout objet quasi-compact et topologique est un espace quasi-compact au sens topologique.*

## 4. FILTRES CONVERGENTS SUR UN OBJET COMPACT.

4.1. DEFINITION. Si $E$ est un ensemble et $\mathfrak{F}$ un filtre sur $E$, soit $E_{\mathfrak{F}}$ l'espace topologique pointé d'ensemble sous-jacent $E \coprod \{*\}$, dont les ouverts sont d'une part les parties ne contenant pas le point de base $*$, d'autre part les parties $A \coprod \{*\}$ avec $A$ élément de $\mathfrak{F}$. Soit $X$ un objet de $\mathfrak{I}$; on dit qu'*une application $\phi$ de $E$ dans $V(X)$ converge vers un point $a$ suivant le filtre* $\mathfrak{F}$ si l'application $\phi_a$ de $E_{\mathfrak{F}}$ dans $V(X)$ telle que

$$\phi_a \mid E=\phi \quad \text{et} \quad \phi_a(*)=a$$

est sous-jacente à un morphisme. Il est immédiat que, si $\mathfrak{F}'$ est un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$, l'application $\phi$ converge encore vers $a$ suivant $\mathfrak{F}'$ et que, si $g$ est un morphisme de $X$ dans $Y$, l'application $V(g)\circ\phi$ converge vers $g(a)$ suivant le filtre $\mathfrak{F}$. Le filtre image $\phi(\mathfrak{F})$ sur $X$ est dit un un *filtre sur $X$ convergeant vers $a$*. L'ensemble des filtres convergents sur un objet $X$ de $\mathcal{T}$ définit sur $V(X)$ une structure aux limites et l'application ainsi définie de $\mathcal{T}$ dans la catégorie $\mathcal{Q}\mathcal{T}$ des quasi-topologies au sens de Fischer identifie $\mathcal{T}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}\mathcal{T}$.

Nous nous proposons de relier la notion de quasi-compacité dans $\mathcal{T}$ définie au paragraphe 3 à la notion de quasi-compacité dans $\mathcal{Q}\mathcal{T}$.

4.2. NOTATIONS. Si $M$ est une partie de $\Omega(X)$ nous noterons $\delta(M)$ l'intersection des ouverts de $X$ appartenant à $M$; on vérifie la relation $\delta(M \cap N) \supset \delta(M) \cup \delta(N)$. Si $A$ est une partie de $X$, nous noterons $\widetilde{A}$ l'ensemble des ouverts de $X$ contenant le complémentaire de $A$; on a clairement

$$\delta(\widetilde{A}) \supset \complement A \quad et \quad \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{A \cap B}.$$

4.3. PROPOSITION. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre* $\mathfrak{F}$ *sur* $\Omega(X)$ *converge vers* $\omega$ *est que, pour tout point* $x$ *de* $\omega$ *et tout filtre* $\mathfrak{X}$ *sur* $X$ *convergeant vers* $x$, *il existe un élément* $M$ *de* $\mathfrak{F}$ *et un élément* $A$ *de* $\mathfrak{X}$ *tels que* $\delta(M) \supset A$.

DEMONSTRATION. Les filtres de l'espace $\mathcal{G}$ sont au nombre de trois:

$F_0 = \{\{0\}, \{0,1\}\}$ le filtre des voisinages de $0$ qui converge vers $0$ et $1$,

$F_1 = \{\{0,1\}\}$ le filtre des voisinages de $1$ qui converge vers $1$,

$F = \{\{1\}, \{0,1\}\}$ un filtre qui converge vers $1$.

Un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\Omega(X) = \mathcal{T}(X, \mathcal{G})$ converge vers $\omega$ si, pour tout point $x$ de $X$ et tout filtre $\mathfrak{X}$ sur $X$ convergeant vers $x$, on a $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ qui converge vers $\omega(x)$. Deux cas se présentent:

1° $x \in \complement \omega$. On a alors $\omega(x) = 1$ et comme tout filtre de $\mathcal{G}$ converge vers $1$ la condition est vide.

2° $x \in \omega$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ converge vers $0$ est que $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ contienne la partie $\{0\}$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $M$ de $\mathfrak{F}$ et un élément $A$ de $\mathfrak{X}$ tel que $M(A) = \{0\}$, c'est-à-dire $\delta(M) \supset A$ ■

4.4. DEFINITION. *Un point* $x$ *adhère à un filtre* $\mathfrak{F}$ s'il existe un filtre $\mathfrak{X}$ plus fin que $\mathfrak{F}$, convergeant vers $x$.

4.5. LEMME. *Soit $\mathfrak{F}$ un filtre n'admettant pas de point d'adhérence. Quel que soit le filtre convergent $\mathfrak{X}$, il existe un élément $M$ de $\mathfrak{F}$ et un élément $A$ de $\mathfrak{X}$ tels que $M \cap A = \emptyset$.*

DEMONSTRATION. Supposons qu'il existe un filtre $\mathfrak{X}$ convergeant vers $x$ et tel que $M \cap A \neq \emptyset$ quels que soient les éléments $M$ de $\mathfrak{F}$ et $A$ de $\mathfrak{X}$. Alors les filtres $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{X}$ admettent une borne supérieure qui est un filtre plus fin que $\mathfrak{X}$, donc un filtre convergeant vers $x$, et plus fin que $\mathfrak{F}$, ce qui entraîne que $x$ adhère à $\mathfrak{F}$, en contradiction avec l'hypothèse faite sur $\mathfrak{F}$ ■

4.6. THEOREME. *Soit $X$ un objet séparé de $\mathfrak{T}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) Tout ultrafiltre sur $X$ est convergent.*

*(ii) Tout filtre sur $X$ admet un point d'adhérence.*

*(iii) L'objet $X$ est quasi-compact (au sens de la définition 3.1).*

DEMONSTRATION. L'équivalence de *(i)* et de *(ii)* est immédiate.

*(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)*. On doit montrer que $\{X\}$ est ouvert dans $\Omega(X)$, c'est-à-dire que tout filtre sur $\Omega(X)$ convergeant vers $X$ contient la partie $\{X\}$. S'il existait un filtre $\mathfrak{F}$ convergeant vers $X$ et ne contenant pas $\{X\}$, quel que soit l'élément $M$ de $\mathfrak{F}$ on aurait $\delta(M) \neq X$, c'est-à-dire $\complement\,\delta(M) \neq \emptyset$. La famille $d\mathfrak{F} = \{\complement\,\delta(M) \mid M \in \mathfrak{F}\}$ serait alors une famille non vide de parties non vides de $X$ et comme

$$\complement\,\delta(M) \cap \complement\,\delta(N) = \complement\,(\delta(M) \cup \delta(N)) \supset \complement\,\delta(M \cap N),$$

$d\mathfrak{F}$ serait une base de filtre sur $X$. La propriété *(ii)* entraînerait alors qu'il existerait un point $x$ et un filtre $\mathfrak{X}$ convergeant vers $x$, plus fin que $d\mathfrak{F}$. Le filtre $\mathfrak{F}$ convergeant vers $X$, il existerait (Prop. 3) un élément $M$ de $\mathfrak{F}$ et un élément $A$ de $\mathfrak{X}$ tels que $\delta(M) \supset A$; par ailleurs, $A$ appartenant à un filtre plus fin que $d\mathfrak{F}$, on aurait $A \cap \complement\,\delta(M) \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire.

*(iii)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. S'il existait un filtre $\mathfrak{G}$ sur $X$ n'admettant pas de point d'adhérence, la famille $\widetilde{\mathfrak{G}} = \{\widetilde{M} \mid M \in \mathfrak{G}\}$ serait une famille non vide de parties non vides de $\Omega(X)$ et comme $\widetilde{M} \cap \widetilde{N} = \widetilde{M \cap N}$, $\widetilde{\mathfrak{G}}$ serait une base de filtre sur $\Omega(X)$. Le filtre associé à $\widetilde{\mathfrak{G}}$ convergerait vers $X$ : quel que soit

le filtre $\mathfrak{X}$ convergeant vers $x$, il existe (lemme 5) un élément $M$ de $\mathfrak{G}$ et un élément $A$ de $\mathfrak{X}$ tels que $M \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire $\complement M \supset A$; comme $\delta(\widetilde{M}) \supset \complement M$, on a trouvé un élément $A$ de $\mathfrak{X}$ et un élément $\widetilde{M}$ de $\widetilde{\mathfrak{G}}$ tels que $\delta(\widetilde{M}) \supset A$. L'objet $X$ étant quasi-compact, il existerait alors un élément $N$ de $\mathfrak{G}$ tel que $\widetilde{N} \subset \{X\}$, c'est-à-dire, les points de $X$ étant fermés, $\complement N = X$ ou encore $N = \emptyset$ ce qui est impossible pour un élément d'un filtre ■

4.7. COROLLAIRE. *Tout produit d'objets compacts de $\mathfrak{T}$ est un objet compact.*

4.8. COROLLAIRE. *Tout sous-objet fermé d'un objet compact de $\mathfrak{T}$ est un objet compact.*

4.9. REMARQUE. L'hypothèse de séparation de $X$ dans le théorème 6 n'intervient que pour assurer dans la démonstration de *(iii)* $\Longrightarrow$ *(ii)* que les points sont fermés; on peut donc affaiblir l'hypothèse faite sur $X$ et par exemple les corollaires 7 et 8 demeurent vrais pour des objets quasi-compacts dont les points sont fermés.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] FISCHER H.R., Limesraüme, *Math. Ann.* 137 (1959), p.269-303.

[2] ANTOINE P., Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belg.*, XVIII 2 et 4 (1966).

Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques Pures
B. P. 36
59650 VILLENEUVE D'ASCQ