CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JOSEPH CHACRON

Sous-catégories semi-pleines maximales d'une catégorie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, nº 3 (1971), p. 323-332

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_3_323_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XII,3

A A. Bastiani

SOUS-CATEGORIES SEMI-PLEINES MAXIMALES D'UNE CATEGORIE

par Joseph CHACRON

Nous définissons une sous-catégorie semi-pleine d'une catégorie comme une sous-catégorie qui est saturée par rapport à l'équivalence: x et x' sont équivalents s'ils ont même source et même but. Certaines sous-catégories semi-pleines simples sont construites explicitement: si la catégorie est transitive, ce sont les sous-catégories semi-pleines maximales, et toute sous-catégorie semi-pleine propre est l'intersection des sous-catégories de ce type qui la contiennent.

On détermine de même les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux d'un groupoïde transitif. Alors qu'une sous-catégorie semi-pleine maximale n'est pas nécessairement maximale en tant que sous-catégorie, les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux sont des sous-groupoïdes maximaux. Ceci permet de caractériser complètement les sous-groupoïdes maximaux quelconques d'un groupoïde.

L'étude générale appliquée au groupoïde des couples associé à un ensemble redonne les préordres maximaux sur un ensemble et les équivalences maximales d'Ore.

Certains résultats ont été annoncés dans [1-1] et établis moins directement dans [1-2] (où le problème est envisagé plus systématiquement, à l'aide d'une correspondance de Galois).

Notations.

C désigne une catégorie, C_0 l'ensemble de ses unités, α et β ses applications source et but, ab le composé de a et b. On note γ l'application de C dans $C_0 \times C_0$ qui associe $(\beta(x), \alpha(x))$ à $x \in C$. Des notations analogues sont utilisés pour un groupoïde, que l'on notera G.

1. Sous-catégories semi-pleines d'une catégorie.

DEFINITION 1. Une partie A de C sera dite *semi-pleine* si

$$[a \in A,\ x \in C,\ \gamma(x) = \gamma(a)] \to x \in A$$

(c'est-à-dire si $A = \overset{-1}{\gamma}(\gamma(A))$.

En appelant I_α et I_β les équivalences déduites des applications α et β, il est clair que A est semi-pleine si, et seulement si, A est $I_\alpha \cap I_\beta$-saturée. En outre, l'ensemble des parties semi-pleines de C forme un sous-treillis complet du treillis des parties de C.

DEFINITION 2. On appelle *sous-catégorie semi-pleine de* C une sous-catégorie de C définie par une partie semi-pleine.

PROPOSITION 1. *Pour toute partie* X_0 *de* C_0 *l'ensemble* $C(X_0)$, *où*

$$C(X_0) = \{x \mid x \in C,\ [\gamma(x) \in X_0 \times X_0 \text{ ou } \alpha(x) \notin X_0]\},$$

définit une sous-catégorie semi-pleine de C *qui de plus contient* C_0.

PREUVE. 1° Il est évident que $C_0 \subset C(X_0)$ et que $C(X_0)$ est semi-pleine.
2° Soient x et y des éléments de $C(X_0)$ tels que $\alpha(x) = \beta(y)$. On vérifie que xy appartient à $C(X_0)$ en envisageant les divers cas possibles:

- $x \in C(X_0)$ et $\alpha(y) \notin X_0$; dans ce cas $\alpha(xy) \notin X_0$,
- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$; alors $\gamma(xy) \in X_0 \times X_0$,
- $\alpha(x) \notin X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$, ce qui est imposible, car $\alpha(x) = \beta(y)$.

DEFINITION 3. On appelle *sous-groupoïde semi-plein* d'un groupoïde G un sous-groupoïde de G défini par une partie semi-pleine.

PROPOSITION 2. *Soit* X_0 *une partie de l'ensemble* G_0 *des unités d'un groupoïde* G *et soit* $X_0' = G_0 - X_0$. *L'ensemble* $G[X_0]$, *où*

$$G[X_0] = \{x \mid x \in G,\ [\gamma(x) \in X_0 \times X_0 \text{ ou } \gamma(x) \in X_0' \times X_0']\},$$

définit un sous-groupoïde semi-plein de G *qui de plus contient* G_0.

PREUVE. 1° Il est évident que $G[X_0]$ contient G_0, est une partie semi-pleine et est stable pour l'inversion.
2° Soient x et y des éléments de $G[X_0]$ tels que $\alpha(x) = \beta(y)$. On vérifie que xy appartient à $G[X_0]$ en envisageant les divers cas:

- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$; alors $\gamma(xy) \in X_0 \times X_0$,
- $\gamma(x) \in X_0 \times X_0$ et $\gamma(y) \in X'_0 \times X'_0$, ce qui est impossible, car $\alpha(x) = \beta(y)$.
- $\gamma(x) \in X'_0 \times X'_0$ et $\gamma(y) \in X_0 \times X_0$, ce qui est encore impossible.
- $\gamma(x) \in X'_0 \times X'_0$ et $\gamma(y) \in X'_0 \times X'_0$; dans ce cas $\gamma(xy) \in X'_0 \times X'_0$.

REMARQUES. 1° Si C est un demi-groupe, la seule sous-catégorie semi-pleine est C. Si G est un groupe, le seul sous-groupoïde semi-plein est G.

2° Soit E un ensemble, C la catégorie des couples associée à E et X un sous-ensemble de E. Nous pouvons associer à X le sous-ensemble X_0 de C_0 formé des couples (x, x), où $x \in X$. La proposition 1 montre que la relation R de E vers E définie par

$$(a, b) \in R \quad \text{ssi} \quad [\, (a, b) \in X \times X \text{ ou } b \notin X \,]$$

est un préordre sur E [1-1].

3° Avec les mêmes notations, comme C est un groupoïde, la proposition 2 montre que la relation R' de E vers E définie par

$$(a, b) \in R' \quad \text{ssi} \quad [\, (a, b) \in X \times X \text{ ou } [\, a \notin X,\ b \notin X \,]\,]$$

est une équivalence sur E [2].

2. Sous-catégories semi-pleines maximales.

On dit qu'une sous-catégorie A de C (resp. un sous-groupoïde A de G) est *propre* si $A \neq C$ (resp. $A \neq G$).

DEFINITION 4. Nous dirons qu'une sous-catégorie semi-pleine A de la catégorie C est *maximale* (resp. qu'un sous-groupoïde semi-plein du groupoïde G est *maximal*) lorsque:

1° A est propre.

2° Si A' est une sous-catégorie semi-pleine de C (resp. un sous-groupoïde semi-plein de G) qui soit propre et qui contienne A, alors $A = A'$.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

THEOREME 1. *Soit C une catégorie transitive (c'est-à-dire telle que: $\gamma(C) = C_0 \times C_0$). Pour toute partie X_0 non vide et strictement contenue dans C_0, la sous-catégorie semi-pleine $C(X_0)$ est maximale; toutes les* *sous-catégories semi-pleines maximales sont du type* $C(X_0)$; *leur nombre* † *est* $2^{|C_0|}-2$; *enfin toute sous-catégorie semi-pleine propre de* C *qui contient* C_0 *est une intersection de sous-catégories semi-pleines de type* $C(X_0)$ *(et par suite maximales).*

Au préalable, précisons la terminologie. Soit E un ensemble, P un préordre sur E. Une partie X de E est dite P*-saturée* si

$$[(a,b)\in P,\ b\in X] \to a\in X.$$

Pour tout $a\in E$, la section $\overleftarrow{a}$ est l'ensemble des $x\in E$ tels que $(x,a)\in P$; c'est donc la plus petite partie P-saturée qui admet a pour élément.

LEMME 1. *Si* C *est une catégorie transitive,* X_0 *et* Y_0 *deux parties de* C_0 *non vides et distinctes de* C_0, *l'égalité* $C(X_0)=C(Y_0)$ *entraîne* $X_0=Y_0$.

PREUVE. Supposons $X_0\neq Y_0$. Il existe par exemple $e\in X_0$ tel que $e\notin Y_0$. D'autre part, il existe $e'\in C_0-X_0$. Puisque C est transitive, il existe $x\in C$ tel que $\gamma(x)=(e',e)$. Donc $x\in C(Y_0)$ et $x\notin C(X_0)$, ce qui entraîne $C(X_0)\neq C(Y_0)$.

LEMME 2. *Si* C *est une catégorie transitive et* X_0 *une partie de* C_0 *non vide et distincte de* C_0, *la sous-catégorie semi-pleine* $C(X_0)$ *est maximale.*

PREUVE. Soit $e'\in C_0-X_0$ et $e\in X_0$. Puisque C est transitive, il existe $x\in C$ tel que $\gamma(x)=(e',e)$. On a $x\notin C(X_0)$, de sorte que $C(X_0)$ est propre. — Supposons maintenant que A soit une sous-catégorie semi-pleine propre de C qui contienne strictement $C(X_0)$. Il existe a et b tels que l'on ait

$$a\in A-C(X_0) \quad\text{et}\quad b\in C-A \qquad (1).$$

Les relations $a\notin C(X_0)$, $b\notin C(X_0)$ signifient

$$[\alpha(a)\in X_0,\ \beta(a)\notin X_0] \quad\text{et}\quad [\alpha(b)\in X_0,\ \beta(b)\notin X_0].$$

Il existe $a'\in C$ et $b'\in C$ tels que

$$\gamma(a')=(\beta(b),\beta(a)) \quad\text{et}\quad \gamma(b')=(\alpha(a),\alpha(b)).$$

† Ceci signifie que le cardinal de l'ensemble des sous-catégories semi-pleines maximales de C est 2^n-2 si le cardinal $|C_0|$ de C_0 est l'entier n et $2^{|C_0|}$ si $|C_0|$ est infini.

Il en résulte $a' \epsilon C(X_0)$, $b' \epsilon C(X_0)$ et, comme $C(X_0)$ contient A, les éléments a', a et b' appartiennent à A. Le composé $a'ab'$ étant défini et A étant stable, il vient $a'ab' \epsilon A$. Or

$$\beta(a'ab') = \beta(a') = \beta(b) \quad \text{et} \quad \alpha(a'ab') = \alpha(b') = \alpha(b).$$

Comme A est semi-pleine et $a'ab' \epsilon A$, on doit avoir $b \epsilon A$. Ceci est contraire à (1) et démontre le lemme.

COROLLAIRE. Les lemmes 1 et 2 nous montrent déjà qu'une catégorie transitive C possède au moins $2^{|C_0|} - 2$ sous-catégories semi-pleines maximales.

LEMME 3. *Soit C une catégorie quelconque, A une sous-catégorie de C contenant C_0. L'ensemble $\gamma(A)$ est un préordre sur C_0, noté P_A.*

PREUVE. Il est clair que P_A est réflexive. Supposons $(e, e') \epsilon P_A$ et $(e', e'') \epsilon P_A$. Il existe $x \epsilon A$ et $y \epsilon A$ tels que

$$(e, e') = \gamma(x) \quad \text{et} \quad (e', e'') = \gamma(y).$$

Comme xy est défini et que A est une sous-catégorie, il vient $xy \epsilon A$. Donc $(e, e'') = \gamma(xy) \epsilon P_A$ et P_A est transitive.

LEMME 4. *Si A est une sous-catégorie de C contenant C_0 et si P_A est le préordre défini ci-dessus, pour toute partie X_0 de C_0 qui est P_A-saturée, on a $A \subset C(X_0)$.*

PREUVE. Soit $a \epsilon A$. Par définition, $\gamma(a) \epsilon P_A$. Si $\alpha(a) \notin X_0$, alors a appartient à $C(X_0)$. Si $\alpha(a) \epsilon X_0$, comme $\gamma(a) \epsilon P_A$ et que X_0 est P_A-saturé, il vient $\gamma(a) \epsilon X_0$. Donc $\gamma(a) \epsilon X_0 \times X_0$, soit $a \epsilon C(X_0)$.

COROLLAIRE. Dans une catégorie transitive C, toute sous-catégorie semi-pleine maximale A est du type $C(X_0)$. En effet, A contient C_0. Par ailleurs, il existe une partie X_0 de C_0 qui est P_A-saturée et distincte de C_0, sans quoi la section associée à tout $e \epsilon C_0$ serait $C_0 \times C_0$ et on aurait $P_A = C_0 \times C_0$, d'où $A = C$. Pour une telle partie, d'après le lemme 4, on a $A \subset C(X_0)$. Par suite $A = C(X_0)$.

LEMME 5. *Si A est une sous-catégorie semi-pleine de la catégorie transitive C contenant C_0 et si $f(P_A)$ désigne l'ensemble des parties P_A-sa-*

turées, on a $A = \bigcap_{X_0 \in f(P_A)} C(X_0)$.

PREUVE. 1° L'inclusion dans un sens résulte du lemme 4.
2° Soit réciproquement a un élément de l'intersection. Considérons la section $S = \overleftarrow{\alpha}(a)$ dans C_0 relativement à P_A. Comme $S \in f(P_A)$, on trouve $a \in C(S)$. La relation $\alpha(a) \in S$ entraîne $\gamma(a) \in S \times S$, d'où $\gamma(a) \in P_A$. Il existe donc $a' \in A$ tel que $\gamma(a) = \gamma(a')$. Comme A est semi-pleine, $a \in A$. Ceci achève la démonstration du lemme, et celle du théorème 1.

Appliquons le théorème 1 lorsque C est la catégorie des couples associée à un ensemble. Nous obtenons:

THEOREME 2. *Si* E *est un ensemble, pour toutes les parties* X *de* E *qui sont non vides et distinctes de* E, *les relations* P_X *définies par*

$$(a,b) \in P_X \quad ssi \quad (a,b) \in X \times X \ ou \ b \notin X$$

sont les préordres maximaux sur E. *Tout préordre sur* E *qui est distinct de* $E \times E$ *est une intersection de préordres maximaux.*

REMARQUES.

1° γ définit un foncteur de C vers la catégorie des couples associée à C_0. Si C est transitive, les sous-catégories semi-pleines A de C sont les images réciproques par γ des préordres sur C_0 ; en associant P_A à A, on définit un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous-catégories semi-pleines de C sur l'ensemble ordonné des préordres sur C_0. Donc les sous-catégories semi-pleines maximales de C correspondent aux préordres maximaux sur C_0.

2° Appelons *sous-catégorie maximale de* C une sous-catégorie propre A de C telle que, si A' est une sous-catégorie propre de C contenant A, on ait $A' = A$. Une sous-catégorie maximale contient évidemment C_0, mais elle n'est pas toujours semi-pleine. Inversement, une sous-catégorie semi-pleine maximale de C peut ne pas être une sous-catégorie maximale de C, comme le montre l'exemple suivant: Soit G et G' deux groupes abéliens d'ordre 2 ; soit C la sous-catégorie pleine de la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens ayant G et G' pour objets. La sous-catégorie semi-pleine maximale $C(X_0)$ associée à l'ensemble X_0 ayant pour seul élément l'homomorphisme identique de G n'est pas une sous-catégorie maximale; en effet, elle est contenue strictement dans la sous-catégorie propre de C formée de tous les éléments de C à l'exception de l'isomorphisme de G sur G'.

3. Sous-groupoïdes maximaux d'un groupoïde.

DEFINITION 5. On appelle *sous-groupoïde maximal* d'un groupoïde G un sous-groupoïde propre A de G tel que, pour tout sous-groupoïde propre A' de G contenant A, on ait $A' = A$.

Soit G un groupoïde. Un sous-groupoïde maximal contient évidemment G_0. Si A est un sous-groupoïde maximal et un sous-groupoïde semi-plein de G, alors A est un sous-groupoïde semi-plein maximal.

THEOREME 3. *Soit G un groupoïde transitif. Pour toute partie X_0 de G_0 non vide et strictement contenue dans G_0, le sous-groupoïde semi-plein $G[X_0]$ (proposition 2) est un sous-groupoïde maximal; tous les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux sont du type $G[X_0]$, et leur nombre est $(2^{|G_0|}-2)/2$; enfin tout sous-groupoïde semi-plein propre de G qui contient G_0 est une intersection de sous-groupoïdes du type $G[X_0]$.*

LEMME 5. *Si G est un groupoïde transitif et si X_0 et Y_0 sont deux parties non vides de G_0 distinctes de G_0, on a*

$$G[X_0] = G[Y_0] \quad ssi \quad [X_0 = Y_0 \ \text{ ou } \ X_0 = G_0 - Y_0].$$

PREUVE. 1° Dans un sens, la propriété est immédiate.

2° Supposons $G[X_0] = G[Y_0]$ et $X_0 \neq Y_0$. Il existe, par exemple, $e \in X_0$ tel que $e \notin Y_0$. Soit $e' \in X_0$; il existe $x \in G$ tel que $\gamma(x) = (e', e)$, d'où $x \in G[X_0]$; comme $\alpha(x)$ n'appartient pas à Y_0 et que $G[X_0] = G[Y_0]$, il vient $\beta(x) \notin Y_0$. Ainsi $e' \notin Y_0$ et X_0 est contenu dans $G_0 - Y_0$.

Supposons réciproquement $e'' \in G_0 - Y_0$. Il existe $x' \in G$ tel que $\gamma(x') = (e, e'')$; il vient $x' \in G[Y_0] = G[X_0]$; la relation $\beta(x') \in X_0$ entraîne que $\alpha(x') \in X_0$, c'est-à-dire $e'' \in X_0$.

LEMME 6. *Pour toute partie X_0 non vide et strictement contenue dans G_0 le sous-groupoïde semi-plein $G[X_0]$ est un sous-groupoïde maximal de G.*

PREUVE. Puisque X_0 est propre, il existe $e \in X_0$ et $e' \in G_0 - X_0$. Comme x n'appartient pas à $G[X_0]$ si $\gamma(x) = (e', e)$, $G[X_0]$ est propre.

Supposons que A soit un sous-groupoïde propre de G qui contient strictement $G[X_0]$. Il existe

$$a \in A - G[X_0] \quad \text{et} \quad b \in G - A \qquad (1).$$

Puisque $G[X_0]$ et A sont des groupoïdes, on peut supposer (en remplaçant éventuellement a ou b par leurs inverses) que les relations $a \notin G[X_0]$ et $b \notin G[X_0]$ se traduisent par

$$[\beta(a) \in X_0 \text{ et } \alpha(a) \notin X_0] \quad \text{et} \quad [\beta(b) \in X_0 \text{ et } \alpha(b) \notin X_0].$$

Il existe $a' \in G$ tel que $\gamma(a') = (\beta(a), \beta(b))$, d'où $a' \in G[X_0] \subset A$. Posons $b' = a^{-1} a' b$; puisque $\gamma(b') = (\alpha(a), \alpha(b))$, on a $b' \in G[X_0] \subset A$. L'égalité $b = a'^{-1} a\, b'$ entraîne $b \in A$, car A est un sous-groupoïde auquel appartiennent a', a et b'. Ceci étant contraire à (1), on en déduit que $G[X_0]$ est un sous-groupoïde maximal de G.

COROLLAIRE. Les lemmes 5 et 6 montrent qu'un groupoïde transitif G possède au moins $(2^{|G_0|} - 2)/2$ sous-groupoïdes semi-pleins maximaux (si le cardinal $|G_0|$ est infini, ceci signifie que l'ensemble des sous-groupoïdes semi-pleins de G admet $2^{|G_0|}$ pour cardinal).

LEMME 7. *Si A est un sous-groupoïde de G contenant G_0, la relation $\gamma(A)$ sur G_0 est une équivalence notée P'_A.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

LEMME 8. *Si A est un sous-groupoïde de G qui contient G_0 et si X_0 est une classe d'équivalence modulo P'_A, on a $A \subset G[X_0]$.*

PREUVE. Soit $a \in A$. Si $\alpha(a) \notin X_0$, comme $\gamma(a) \in P'_A$, il vient $\beta(a) \notin X_0$. Si $\alpha(a) \in X_0$, on a aussi $\beta(a) \in X_0$. Donc $a \in G[X_0]$.

COROLLAIRE. Le lemme 8 montre que tous les sous-groupoïdes semi-pleins maximaux de G sont du type $G[X_0]$.

LEMME 9. *Si A est un sous-groupoïde semi-plein propre de G qui contient G_0, alors $A = \bigcap_{X_0 \in G_0 / P'_A} G[X_0]$.*

PREUVE. 1° Dans un sens l'inclusion résulte du lemme 8.

2° Supposons que a soit un élément de l'intersection. Soit X_0 la classe de $\alpha(a)$ modulo P'_A. Comme $a \in G[X]$ et $\alpha(a) \in X_0$, il vient $\beta(a) \in X_0$, donc $\gamma(a) \in P'_A$. Il existe par conséquent $a' \in A$ tel que $\gamma(a) = \gamma(a')$, d'où, A étant semi-plein, il vient $a \in A$.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Si G est le groupoïde des couples associé à un ensemble, il vient

THEOREME 4. *Si E est un ensemble, pour toutes les parties X de E qui sont non vides et distinctes de E, les relations C_X définies par*

$$(a, b) \in C \quad ssi \quad [\,(a, b) \in X \times X \text{ ou } [\,a \notin X \text{ et } b \notin X\,]\,]$$

sont les équivalences maximales sur E. Leur nombre est $(2^{|E|} - 2)/2$. Toute équivalence sur E qui est distincte de $E \times E$ est une intersection d'équivalences maximales †.

Soit e une unité du groupoïde G; nous désignons par G_e le sous-groupe de G en e (formé des éléments de source et but e). Si G est transitif, tous les groupes G_e sont isomorphes.

THEOREME 5. *Un sous-groupoïde A d'un groupoïde transitif G est un un sous-groupoïde maximal de G si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1° A est un sous-groupoïde semi-plein maximal de G.

2° A est transitif, $A_0 = G_0$ et le sous-groupe plein A_e de A en e est un sous-groupe maximal de G_e.

La démonstration utilise les lemmes suivants:

LEMME 10. *Si A et B sont des sous-groupoïdes transitifs du groupoïde G tels que $A_0 = G_0 = B_0$ et $A \subset B$, on a $A = B$ si, et seulement si, on a $A_e = B_e$ pour une unité e de G.*

PREUVE. Soit $z \in G$. Il existe $x \in A$ et $x' \in A$ tels que $\gamma(x) = (\alpha(z), e)$ et $\gamma(x') = (\alpha(z), e)$; posons $y = x'^{-1} z x$. On a $z \in B$ ssi $y \in B_e$. Par suite, B est formé des éléments z de G de la forme

† Résultat dû à Ore (cf [2]).

$$z = x' y x^{-1}, \quad \text{où } x \in A,\ x' \in A,\ y \in B_e.$$

LEMME 11. *Soit A un sous-groupoïde transitif de G tel que $A_0 = G_0$. Si e est une unité de G et K un sous-groupe de G_e contenant A_e, il existe un sous-groupoïde B de G contenant A tel que $B_e = K$.*

PREUVE. On voit facilement que B est formé des éléments z de G tels qu'il existe $x \in A$, $x' \in A$ et $y \in K$ vérifiant $z = x' y x^{-1}$.

PREUVE DU THEOREME 5. 1° Si la condition 1 est vérifiée, A est un sous-groupoïde maximal de G d'après le théorème 3.

2° Si la condition 2 est satisfaite et si B est un sous-groupoïde contenant A, alors A_e est contenu dans B_e, d'où $A_e = B_e$ et $B = A$ (lemme 10).

3° Soit A un sous-groupoïde maximal de G. Il contient G_0.

- Si A n'est pas transitif, l'équivalence P'_A est propre; d'après le lemme 8, A est contenu dans $G[X_0]$, où X_0 est une classe modulo P'_A, de sorte que $A = G[X_0]$.

- Si A est transitif, $A_e \neq G_e$ d'après le lemme 10. Si K est un sous-groupe propre de G_e contenant A_e, le lemme 11 assure qu'il existe un sous-groupoïde propre B de G contenant A tel que $B_e = K$. Il s'ensuit $B = A$, d'où $K = A_e$. Ainsi la condition 2 est remplie.

COROLLAIRE. Soit G un groupoïde et I l'ensemble de ses composantes G_i. Les G_i sont des groupoïdes transitifs dont G est la somme. Par suite un sous-groupoïde A de G est maximal si, et seulement si, il existe un i tel que $A \cap G_i$ soit un sous-groupoïde maximal de G_i et que $A \cap G_j = G_j$ pour tout $j \in I$, $j \neq i$. Le théorème 5 permet donc de caractériser tous les sous-groupoïdes maximaux de G.

Bibliographie.

1. J. CHACRON, 1° Treillis des sous-catégories semi-pleines d'une catégorie, *C. R. A. S., Paris, t. 270* (1969), p. 438-440.
2° Nouvelles correspondances de Galois, *Bull. Soc. Math. Belgique* (sous presse).

2. O. ORE, Theory of equivalence relations, *Duke Math. J. IX* (1942), p.573.

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, 33 rue Saint-Leu
80 - AMIENS