

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

MOHAMMAD T. SADR

Structures topogènes sur une catégorie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, n° 4 (1968), p. 475-505

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_4_475_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES TOPOGENES SUR UNE CATEGORIE

par Mohammad T. SADR (*)

TABLE DES MATIERES

Introduction

CHAPITRE I : STRUCTURES PRE-TOPOGENES ET $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -TOPOGENES.

§ 1. Préliminaires.

§ 2. Structures pré-topogènes.

§ 3. Structures $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -topogènes.

§ 4. Structures pré-topogènes et $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -topogènes associées par un foncteur.

§ 5. Foncteurs pré-topogènes et $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -topogènes.

CHAPITRE II : RELATIONS PRE-TOPOGENES ET TOPOGENES.

§ 6. Propriétés de quelques sous-catégories de Ω .

§ 7. Relations pré-topogènes.

§ 8. Relations topogènes.

§ 9. Relations pré-topogènes et topogènes associées par une application.

§ 10. Morphismes entre les relations pré-topogènes et topogènes.

§ 11. Applications.

(*) Extrait de la thèse de Doctorat d'Université soutenue à Paris le 23 Juin 1967.

INTRODUCTION

A. Csaszar définit une relation d'ordre semi-topogène (resp. topogène parfait) sur l'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'ordre défini par l'inclusion. Il détermine les morphismes entre les ordres semi-topogènes à partir de la notion d'image réciproque d'un ordre semi-topogène par une application. Dans la définition de l'image réciproque d'un ordre semi-topogène, seule intervient l'extension d'une application à l'ensemble des parties d'un ensemble [2].

Monsieur Ehresmann m'avait proposé de généraliser les résultats de A. Csaszar en partant d'une classe ordonnée. J'ai donc été conduit à définir une relation pré-topogène sur une classe ordonnée (C, \leq) comme une relation α sur C vérifiant les axiomes :

$$\begin{aligned} a \alpha b \quad a, b \in C &\text{ implique } a \leq b. \\ a_1 \leq a \alpha b \leq b_1 &\text{ implique } a_1 \alpha b_1. \end{aligned}$$

En me faisant remarquer que l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \alpha b$ forme alors un idéal de la catégorie des couples associée à la classe ordonnée (C, \leq) , Monsieur Ehresmann m'a suggéré d'étudier d'une façon générale les structures pré-topogènes, qui sont définies par les couples (C^*, J) d'une catégorie C^* et d'un idéal J de C^* (§ 2).

De même qu'un ordre topogène parfait est défini à partir d'un ordre semi-topogène en imposant des conditions supplémentaires par rapport aux opérations de réunion et d'intersection sur l'ensemble des parties d'un ensemble, dans une catégorie C^* à \mathcal{I} -produits et à \mathcal{I}' -sommets, où \mathcal{I} et \mathcal{I}' sont des classes de classes données, il est naturel de définir une structure $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -topogène comme une structure pré-topogène (C^*, J) telle que J soit stable par \mathcal{I} -produits et par \mathcal{I}' -sommets. A toute structure pré-topogène correspond une structure topogène canonique, sa topogénisée (§ 3).

Soit \mathcal{F}_a la catégorie des foncteurs F admettant un adjoint G et $\tilde{\mathcal{F}}_a$ sa sous-catégorie formée des foncteurs à \mathcal{I} -produits et \mathcal{I}' -sommets et tels que G soit compatible avec les \mathcal{I} -produits (G est toujours compatible avec les \mathcal{I}' -sommets) (§ 1). On définit les notions d'image F_s , et d'image réci-

proque $s'F$ d'une structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène s ou s' par un foncteur $F \in \mathcal{F}_a$ (resp. $F \in \tilde{\mathcal{F}}_a$) (§ 4). Un foncteur pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène est un triplet (s', F, s) , où $s = (C^*, J)$ et $s' = (C'^*, J')$ sont deux structures pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogènes et où $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) vérifiant l'axiome $s'F \subset s$ (c'est-à-dire $C.G(J'). \subset C.J$). Les catégories des foncteurs pré-topogènes et des foncteurs $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogènes, et leurs foncteurs d'oubli canoniques, sont étudiés dans le § 5.

Le but du chapitre II est d'étudier et de préciser les résultats précédents dans le cas particulier des relations pré-topogènes (resp. topogènes) sur une classe ordonnée (resp. sur une classe complète, i.e. telle que toute partie admette une borne supérieure). Ce cas est donc celui des structures pré-topogènes (resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogènes) (M^*, J) telle que M^* soit la catégorie des couples associée à un ordre (C, \leq) (resp. à une classe complète (C, \leq)) et que $\mathcal{J} = \mathcal{P}(C)$ et $\mathcal{J}' = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$.

Si l'on part d'une classe complète locale, la relation topogénisée α' une relation pré-topogène peut être construite explicitement (§ 8).

La catégorie des morphismes entre relations pré-topogènes (§ 9-10) est définie à l'aide de la catégorie Ω_a des applications ordonnées f admettant un adjoint g ; si $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq))$ est une application ordonnée, on a $f \in \Omega_a$ si, et seulement si, pour tout $a' \in C'$, la classe

$$C_{a'} = \{a \in C : f(a) \leq a'\}$$

admet un plus grand élément $g(a')$ (§ 6).

Les paratopologies sont obtenues (§ 8) comme relations topogènes (C, \leq, α) vérifiant la condition supplémentaire :

$$\text{Si } a \alpha b, \text{ il existe } c \in C \text{ tel que } a \alpha c \alpha b$$

(i.e. l'idéal J associé vérifie $J \subset J.J$); les ouverts de la paratopologie sont les $a \in C$ tels que $a \alpha a$. Les topologies usuelles en sont un cas particulier.

A titre d'application, nous définissons dans le § 11 la notion de catégorie topogène (= catégorie structurée par une relation topogène), généralisant celle de catégorie topologique au sens de C. Ehresmann.

Cette introduction serait incomplète si je n'y exprimais ma profonde reconnaissance et mon grand respect pour mon Professeur, Monsieur C. Ehresmann; c'est grâce à ses suggestions, à sa direction et à sa surveillance constante que ce travail a pris forme.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Choquet, qui a bien voulu accepter d'être Président du Jury, et Monsieur le Professeur Deheuvels qui a bien voulu me proposer le sujet de la deuxième thèse.

CHAPITRE I

STRUCTURES PRE-TOPOGENES ET $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -TOPOGENES

1. Préliminaire.

Nous désignons toujours par \mathfrak{M} une catégorie pleine d'applications (voir [3], p. 23), par \mathcal{I} et \mathcal{I}' deux ensembles d'ensembles. Un foncteur est dit \mathcal{I} -compatible s'il est compatible avec les \mathcal{I} -produits, \mathcal{I}' -compatible s'il est compatible avec les \mathcal{I}' -sommés.

Soient C^* , C'^* des catégories. Soit \mathcal{F} la catégorie des foncteurs $F = (C'^*, \underline{F}, C^*)$, associée à \mathfrak{M} . Dans ce qui suit nous considérerons les sous-catégories suivantes de \mathcal{F} :

- $\check{\mathcal{F}}$ (resp. $\check{\check{\mathcal{F}}}$), ayant pour unités les catégories qui admettent une \emptyset -somme unique (resp. un \emptyset -produit) (voir [3] p. 200).

- $\overline{\mathcal{F}}$, ayant pour unités les catégories à \mathcal{I} -produits et à \mathcal{I}' -sommés et pour morphismes les foncteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -compatibles.

- \mathcal{F}_a , formée des foncteurs qui admettent un foncteur adjoint à gauche (voir [9] début de § 1).

- $\overline{\mathcal{F}}_a = \overline{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F}_a$.

- $\check{\check{\mathcal{F}}}_a$, ayant pour éléments les foncteurs $F \in \overline{\mathcal{F}}_a$ tels que leurs adjoints à gauche soient \mathcal{I} -compatibles.

REMARQUE 1. On connaît des conditions suffisantes pour que

$$F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}$$

admette un adjoint à gauche; en tous cas, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées (voir [8], p. 149) :

- 1) Le foncteur F est compatible avec les limites projectives.
- 2) Pour tout $a \in C'_0$ la sous-classe $F(C'_0; C^*.a) \neq \emptyset$.

REMARQUE 2. Soient $F = (C^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ et $C^*, C'^* \in \overline{\mathcal{F}}_o$. On sait que les foncteurs adjoints à gauche de F sont \mathcal{G}' -compatibles. Mais en revanche ils ne sont pas en général compatibles avec les \mathcal{G} -produits.

Soit $p_{\mathcal{F}} = (\mathcal{M}, \underline{p}_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur projection de \mathcal{F} vers \mathcal{M} . On sait que $p_{\mathcal{F}}$ est un foncteur d'homomorphismes à produits finis, résolvant à droite et saturé au-dessus de \mathcal{M} . (Voir [3] Ch. II, défs. 19, 20; Ch. III déf. 8 et Ch. IV déf. 6). Soit $p_{\overline{\mathcal{F}}}$ (resp. $p_{\mathcal{F}_a}$, resp. $p_{\overline{\mathcal{F}}_a}$, resp. $p_{\overline{\mathcal{F}}_a}$) les restrictions correspondantes de $p_{\mathcal{F}}$. On peut voir que ce sont des foncteurs d'homomorphismes saturés au-dessus de \mathcal{M} .

DEFINITION 1.1. Soient C^* une catégorie à \mathcal{G} -produits et à \mathcal{G}' -sommets et C_1 une sous-classe de C . On dit que C_1 est une sous-classe $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -stable de C^* si C_1 est stable par \mathcal{G} -produits et par \mathcal{G}' -sommets. On dit que C_1 est une sous-catégorie $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -stable de C^* si C_1 est en plus une sous-catégorie de C^* .

DEFINITION 1.2. Soient $C^* \in \overline{\mathcal{F}}_o$ et A une sous-classe de C^* . Soit $\mathcal{G}\mathcal{G}'(A)$ l'intersection de toutes les sous-classes $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -stables contenant A . Alors $\mathcal{G}\mathcal{G}'(A)$ est $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -stable (voir [9], prop. 1.8) et appelée sous-classe $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -stable engendrée par A .

2. Structures pré-topogènes.

DEFINITION 2.1. Soit C^* une catégorie. On dit que I est un idéal à droite (resp. à gauche) de C^* si I est une sous-classe de C et si $I.C.C.I$ (resp. $C.I.C.I$). On dit que I est un idéal de C^* s'il est à la fois un idéal à gauche et à droite de C^* (voir [3], p. 2).

DEFINITION 2.2. Soit C^* une catégorie. On dit que \overline{A} est l'idéal engendré par A si A est une sous-classe de C et si $\overline{A} = C.A.C$.

DEFINITION 2.3. On dit que le couple (C^*, J) définit une structure pré-topogène sur la catégorie C^* si J est un idéal de C^* .

PROPOSITION 2.1. Soit $(C^*, J_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de structures pré-topogènes sur C^* ; alors $(C^*, \bigcup_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma)$ et $(C^*, \bigcap_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma)$ sont des structures pré-topogènes sur C^* (voir [9], prop. 2.1).

DEFINITION 2.4. Soient C^\bullet une catégorie et A une sous-classe de C . On dit que (C^\bullet, \bar{A}) est la structure pré-topogène engendrée par A si \bar{A} est l'idéal engendré par A .

PROPOSITION 2.2. Soient C^\bullet une catégorie, $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de sous-classes de C et \bar{A}_γ l'idéal engendré (déf. 2.2) par A_γ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On a alors $(C^\bullet, \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma}) = (C^\bullet, \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma)$ et $(C^\bullet, \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma}) = (C^\bullet, \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma)$ (voir [9], prop. 2.2).

Soient C^\bullet une catégorie et J un idéal de C^\bullet . Posons $J^2 = J \cdot J$.

PROPOSITION 2.3. Si (C^\bullet, J) est une structure pré-topogène sur C^\bullet , alors (C^\bullet, J^2) en est aussi une.

DEMONSTRATION. Soit $b \in C \cdot J^2 \cdot C$; alors il existe $g, f \in C$ et $a \in J^2$ tel que $b = g \cdot a \cdot f$. Mais ceci implique qu'il existe $(a_1, a_2) \in J * J$ tel que $a = a_1 \cdot a_2$. Donc $j = g \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot f = (g \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot f) \in J \cdot J = J^2$. Ce qui démontre J^2 est un idéal de C^\bullet . ■

DEFINITION 2.5. Soient C^\bullet une catégorie et J, J' deux idéaux de C^\bullet . On dit que la structure pré-topogène (C^\bullet, J) est moins fine que la structure pré-topogène (C^\bullet, J') si, et seulement si, $J \subset J'$.

3. Structures $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogènes.

Soit C^\bullet une catégorie à \mathcal{J} -produits et à \mathcal{J}' -sommes, où \mathcal{J} et \mathcal{J}' sont des classes de classes données.

DEFINITION 3.1. On dit que J est un idéal $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stable de C^\bullet si J est un idéal de C^\bullet (déf. 2.1) et s'il est stable par \mathcal{J} -produits et par \mathcal{J}' -sommes. Dans ce cas (C^\bullet, J) est appelée une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène sur C^\bullet .

PROPOSITION 3.1. Soit $s = (C^\bullet, J)$ une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène sur C^\bullet . La structure $s^2 = (C^\bullet, J^2)$ est aussi $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène (voir [9] prop. 3.1).

PROPOSITION 3.2. Soit $(C^\bullet, J_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de structures $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogènes sur C^\bullet . Alors le couple $(C^\bullet, \bigcap_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma)$ en est aussi une (voir [9], prop. 3.2).

Soient $C^\bullet \in \overline{\mathcal{F}}_o$, A une sous-classe de C et $A^t = C \cdot \mathcal{J} \mathcal{J}' A \cdot C$ l'idéal engendré (déf. 2.2) par $\mathcal{J} \mathcal{J}' A$, où $\mathcal{J} \mathcal{J}' A$ est la classe $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stable

engendrée par A (voir déf. 1.2) .

PROPOSITION 3.3. *Le couple (C^\bullet, A^t) ci-dessus définit une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène sur C^\bullet (voir [9], prop. 3.3).*

Soient $C^\bullet \in \overline{\mathcal{F}}_0$ et A une sous-classe de C . Soit \mathcal{U} (resp. \mathcal{U}') la classe des sous-classes (resp. des idéaux) $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stables A' contenant A . Alors $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Posons $\hat{A} = \bigcap_{A' \in \mathcal{U}'} A'$.

PROPOSITION 3.4. *La structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène (C^\bullet, \hat{A}) est identique à (C^\bullet, A^t) .*

DEMONSTRATION. A^t est un idéal $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stable contenant A donc $A^t \in \mathcal{U}'$ et $\hat{A} \subset A^t$. D'autre part, soit $b \in A^t$; alors il existe $g, f \in C$ et $a \in \mathcal{J}'A$ tels que $b = g.a.f$; ceci implique que $a \in A'$ pour toute sous-classe $A' \in \mathcal{U}'$. Par suite $b \in A'$ pour tout $A' \in \mathcal{U}'$; il en résulte que $b \in \hat{A}$. D'où l'égalité. ■

DEFINITION 3.2. *La structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène $(C^\bullet, A^t) = (C^\bullet, \hat{A})$ est appelée la structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène engendrée par la sous-classe A .*

PROPOSITION 3.5. *Soient $C^\bullet \in \overline{\mathcal{F}}_0$ et $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de sous-classes de C . Alors $(C^\bullet, (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^t) \subset (C^\bullet, \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^t)$ (voir [9], prop. 3.5).*

PROPOSITION 3.6. *Soient $C^\bullet \in \overline{\mathcal{F}}_0$ et $(C^\bullet, J) = s$ une structure pré-topogène sur C^\bullet . Il existe une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène s^t plus fine que s et moins fine que toute structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène plus fine que s .*

DEMONSTRATION. Considérons la structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène $s^t = (C^\bullet, J^t)$ engendrée par J (déf. 3.2). Alors $J \subset J^t$, donc $s \subset s^t$. Soit $s' = (C^\bullet, J')$ une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène sur C^\bullet plus fine que s ; on a $J \subset J'$ d'après la déf. 2.5. D'où $J^t \subset J'^t$ d'après la définition de J^t . Donc $s^t \subset s'$. ■

DEFINITION 3.3. *La structure $(C^\bullet, J^t) = (C^\bullet, \hat{J})$ (voir prop. 3.4) est appelée la structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogénisée de la structure pré-topogène (C^\bullet, J) .*

PROPOSITION 3.7. *Une structure pré-topogène $s = (C^\bullet, J)$ sur C^\bullet est $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène si, et seulement si, $s = s^t$.*

DEMONSTRATION. Si $s = s^t$, alors s est une structure $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -topogène.

Réciproquement, si $s = (C^*, J)$ est une structure $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -topogène sur C^* , on a $s \subset s^t$ d'après la prop. 3.6. D'autre part $J^t \subset J$, puisque J est un idéal $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -stable de C^* , donc $s^t \subset s$. D'où l'égalité. ■

DEFINITION 3.4. On dit qu'une structure $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -topogène $s = (C^*, J)$ sur C^* est topologique si, et seulement si, $s \subset s^2$.

4. Structures pré-topogènes et $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -topogènes associées par un foncteur.

Soit $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$). Soient $s = (C^*, J)$ et $s' = (C'^*, J')$ des structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes respectivement sur C^* et C'^* et G un foncteur adjoint à gauche de F . On peut vérifier que $\overline{G(J')} = C \cdot G(J') \cdot C$, $\overline{F(J)} = C' \cdot F(J) \cdot C'$ et $G^{-1}(J)$ sont des idéaux (resp. des idéaux $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -stables) respectivement de C^* et de C'^* (voir [9], prop. 4.2). On pose alors $\overline{G(J')} = J'F$ et $FJ = G^{-1}(J)$.

DEFINITION 4.1. On dit que (C^*, J) est une structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène associée à s' par F , et on pose $\dot{s} = s'F$, si l'on a $J = J'F$.

PROPOSITION 4.1. Soient $s'_1 = (C'^*, J'_1)$ et $s'_2 = (C'^*, J'_2)$ des structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes sur C'^* . Si $s'_1 \subset s'_2$, alors $s'_1 F \subset s'_2 F$. (Voir [9], prop. 4.5).

PROPOSITION 4.2. Soient $(s'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (C'^*, J'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes sur C'^* et $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$). Alors on a $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} s'_\gamma)F = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (s'_\gamma F)$ et $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} s'_\gamma)F = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (s'_\gamma F)$ (resp. $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} s'_\gamma)F = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (s'_\gamma F)$). (Voir [9], prop. 4.6).

PROPOSITION 4.3. Soient $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) et $s' = (C'^*, J')$ une structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène sur C'^* . La structure $s'^2 F$ est moins fine que la structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène $(s'F)^2$. (Voir [9], prop. 4.7).

PROPOSITION 4.4. Soient $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) et s une structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène sur C^* . Parmi les structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes s' sur C'^* telles que $s'FCs$, il en existe une plus fine. Cette structure est définie de la façon suivante : $s' = (C'^*, J')$, où $J' = FJ$ (voir le début de ce §).

DEMONSTRATION. FJ est un idéal (resp. un idéal $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stable) de $C' \bullet$ (voir [9], prop. 4.2). Donc $(C' \bullet, J')$ est une structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène sur $C' \bullet$. Montrons que $(FJ)F \subset J$. Or,

$$\begin{aligned} (FJ)F &= (G^{-1}(J))F = \overline{G(G^{-1}(J))} = C \cdot G(G^{-1}(J)) \cdot C = \\ &= C \cdot G G^{-1}(J) \cdot C \subset C \cdot J \cdot C \subset J. \end{aligned}$$

Si $s'_1 = (C' \bullet, J'_1)$ est une autre structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène sur $C' \bullet$ telle que $s'_1 F \subset s$, on a

$$C \cdot G(J'_1) \cdot C = \overline{G(J'_1)} = J'_1 F \subset J.$$

Par suite

$$G(J'_1) \subset J, \text{ d'où } J'_1 \subset G^{-1}G(J'_1) \subset G^{-1}(J) = J'. \blacksquare$$

DEFINITION 4.2. La structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène définie sur $C' \bullet$ à partir de s par F d'après la prop. 4.4 est appelée la structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène image de s par F , et on la désigne par $Fs = s'$.

PROPOSITION 4.5. Soient $F = (C' \bullet, \underline{F}, C \bullet)$, $F' = (C'' \bullet, \underline{F}', C' \bullet) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) et $s = (C \bullet, J)$ une structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène sur $C \bullet$. Alors on a $(F' \bullet F)s = F'(Fs)$ (voir [9], prop. 4.9).

PROPOSITION 4.6. Soit $(s_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de structures pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogènes sur $C \bullet$. On a

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} s_\gamma\right) &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F(s_\gamma) \quad \text{et} \quad F\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} s_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F(s_\gamma) \\ (\text{resp. } F\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} s_\gamma\right) &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F(s_\gamma)) \end{aligned}$$

(voir [9], prop. 4.10).

PROPOSITION 4.7. Soient $F = (C' \bullet, \underline{F}, C \bullet) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$), $s = (C \bullet, J)$ et $s' = (C' \bullet, J')$ des structures pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogènes respectivement sur $C \bullet$ et sur $C' \bullet$. Alors on a $(Fs)F = s$ et $F(s'F) \supset s'$.

DEMONSTRATION. Montrons que $(FJ)F = J$ et $F(J'F) \supset J'$. Or,

$$(FJ)F = (G^{-1}(J))F = G(G^{-1}(J)) = C \cdot G G^{-1}(J) \cdot C \subset C \cdot J \cdot C \subset J.$$

De plus, si $a \in J$, alors $G^{-1}(a) \subset G^{-1}(J)$; donc

$$a \in G(G^{-1}(a)) \subset G(G^{-1}(J)) \subset \overline{G(G^{-1}(J))} = (FJ)F.$$

Ceci démontre que $J \subset (FJ)F$. D'où l'égalité. Par ailleurs

$$F(J'F) = F(\overline{G(J')}) = G^{-1}(\overline{G(J')}) \supset G^{-1}(G(J')) \supset J'. \blacksquare$$

PROPOSITION 4.8. Soit \mathcal{F}_γ le groupoïde des éléments inversibles de \mathcal{F} . Soient $\dot{F} = (C^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_\gamma$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_\gamma$) et $s = (C^*, J)$ et $s' = (C'^*, J')$ des structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes respectivement sur C^* et C'^* . On a alors $F(s'F) = s'$ et $(F^{-1})^{-1}s = F(s)$, où $F(s) = (C'^*, F(J))$. (Voir [9], prop. 4.12).

5. Foncteurs pré-topogènes et $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -topogènes.

Soient $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$), s et s' des structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes respectivement sur C^* et sur C'^* .

DEFINITION 5.1. On dit que F est un foncteur pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène, ou bien est un morphisme entre les structures s et s' ou bien est un foncteur (s, s') -continu, si on a $s'FCs$ (voir déf. 4.1).

THEOREME 5.1. Sous les hypothèses précédentes :

1) $s'F$ est la moins fine parmi les structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes s sur C^* qui rendent (s, s') -continu le foncteur F .

2) Fs est la plus fine parmi les structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes s' sur C'^* qui rendent (s, s') -continu le foncteur F .

DEMONSTRATION. F est $(s'F, s')$ -continu et, si s est une structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène sur C^* telle que F soit (s, s') -continu, on a $s'FCs$. D'autre part, si $s' = (C'^*, J')$ est une structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène sur C'^* telle que F soit (s, s') -continu, on a $s'FCs$, donc $\overline{G(J')} = J'F \subset J$. Ceci implique

$$J' \subset G^{-1}(G(J')) \subset G^{-1}(\overline{G(J')}) \subset G^{-1}(J) = FJ.$$

D'où $s' \subset Fs$. \blacksquare

Soient $F = (C'^*, \underline{F}, C^*) \in \mathcal{F}_\gamma$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_\gamma$) et $s = (C^*, J)$, $s' = (C'^*, J')$ des structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes respectivement sur C^* et sur C'^* .

DEFINITION 5.2. On dit que F est un isomorphisme entre les structures

pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogènes s et s' si F est à la fois (s, s') - et (s', s) -continu.

On voit, d'après la prop. 4.8, que F est un isomorphisme entre les structures s et s' si, et seulement si,

$$s'F \subset s \text{ et } F(s) = (C' \cdot, F(J)) = (F^{-1})^{-1} s \subset s.$$

Il s'ensuit que $s'F = s$.

Soit \mathcal{J} (resp. $\tilde{\mathcal{J}}$) la catégorie des morphismes entre les structures pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogènes.

PROPOSITION 5.1. Soit q (resp. \tilde{q}) le foncteur projection de \mathcal{J} (resp. de $\tilde{\mathcal{J}}$) vers \mathcal{F}_a (resp. vers $\tilde{\mathcal{F}}_a$). Alors q (resp. \tilde{q}) est un foncteur d'homomorphismes. (Voir [9], prop. 5.2).

SOUS-STRUCTURES DANS \mathcal{J} ET DANS $\tilde{\mathcal{J}}$.

Soit $p\mathcal{F}$ (resp. $p\tilde{\mathcal{F}}$) le foncteur d'homomorphismes de \mathcal{F}_a (resp. de $\tilde{\mathcal{F}}_a$) vers \mathfrak{M}^a considéré à la fin du §1. Soient $C \cdot \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) et C_1 une sous-catégorie pleine (resp. une sous-catégorie pleine $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -stable) de $C \cdot$; on peut voir alors que C_1 est une $p\mathcal{F}$ (resp. $p\tilde{\mathcal{F}}$)-sous-structure de $C \cdot$ (voir [9], prop. 1.9). Ceci dit, soit \mathcal{F}_a^ι (resp. $\tilde{\mathcal{F}}_a^\iota$) la sous-catégorie de \mathcal{F}_a (resp. de $\tilde{\mathcal{F}}_a$) formée des $p\mathcal{F}$ - (resp. de $p\tilde{\mathcal{F}}$)-injections (voir [9], corol. prop. 1.9). Posons $\tilde{\mathcal{F}}_a^\iota = \tilde{\mathcal{F}}_a \cap \tilde{\mathcal{F}}_a^\iota$. Ainsi un élément de $\tilde{\mathcal{F}}_a^\iota$ est une $p\tilde{\mathcal{F}}$ -injection $\iota = (C \cdot, \underline{\iota}, C_1)$ telle que, de plus, son adjoint à gauche $(C_1, \underline{\iota}^*, C \cdot)$ soit compatible avec les \mathcal{J} -produits.

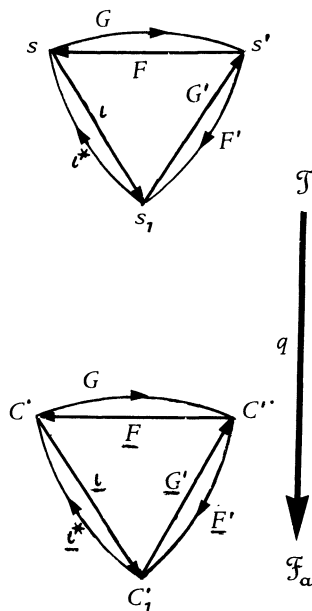
PROPOSITION 5.2. Soit $(C \cdot, J) \in \mathcal{J}_o$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{J}}_o$). Soient $\iota = (C \cdot, \underline{\iota}, C_1) \in \mathcal{F}_a^\iota$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a^\iota$) et ι^* le foncteur adjoint à gauche de ι ; posons $J_1 = J\iota = \overline{\iota^*(J)}$. Alors la structure pré-(resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$)-topogène $(C_1, J_1) = s_1$ est une (\mathcal{F}_a^ι, q) (resp. une $(\tilde{\mathcal{F}}_a^\iota, \tilde{q})$)-sous-structure de s .

DEMONSTRATION. Soient $F' = (s, \underline{F}', s') \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{J}}$) et $F = (C_1, \underline{F}, C' \cdot) \in \mathcal{F}$ tels que $\iota \cdot F = F'$. Alors on peut facilement vérifier que $F \in \mathcal{F}_a$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{F}}_a$) (voir [9], prop. 1.9). Montrons que $(s_1, \underline{F}, s') \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \tilde{\mathcal{J}}$). Pour cela il faut montrer que $J_1 F \subseteq J'$. Soit $(C \cdot, J) \in \mathcal{J}_o$; si $b' \in J_1 F = \overline{G(J_1)}$, il existe $g', f' \in C' \cdot$ et $a' \in G(J_1)$ tels que

$b' = g' \cdot a' \cdot f'$. Donc il existe $\bar{a} \in J_1 = \iota^*(J)$ tel que $a' = G(\bar{a})$. Ceci implique qu'il existe $f_1, g_1 \in C_1$ et $a_1 \in \iota^*(J)$ tels que $\bar{a} = g_1 \cdot a_1 \cdot f_1$. Il s'ensuit qu'il existe $a \in J$ tel que $a_1 = \iota^*(a)$, donc

$$\begin{aligned} a' &= G(\bar{a}) = G(g_1 \cdot a_1 \cdot f_1) = \\ &= G(g_1) \cdot G(a_1) \cdot G(f_1) = \\ &= G(g_1) \cdot G(\iota^*(a)) \cdot G(f_1) = \\ &= G(g_1) \cdot G'(a) \cdot G(f_1), \end{aligned}$$

avec $G'(a) \in J'$, où $G' = G \cdot \iota^*$ est un adjoint de F' . Donc $a' \in J'$. Par conséquent $b' = g' \cdot a' \cdot f' \in J'$. On fait une démonstration analogue dans le cas des $(\tilde{\mathcal{F}}_a, \tilde{q})$ -sous-structures (voir [9], prop. 5.4). ■



DEFINITION 5.3. La structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène $(C_1^*, J_1) = s_1$ définie par la prop. 5.2 est appelée structure induite par s sur C_1^* .

PRODUITS DE STRUCTURES PRE-TOPOGENES ET $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -TOPOGENES.

Soit $\hat{\mathcal{F}}$ la sous-catégorie de \mathcal{F} considérée dans le §1. Posons

$$\hat{\mathcal{F}}_a = \hat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F}_a, \quad \hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{F}}_a = \hat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F}_a.$$

Soit $\hat{\mathcal{J}}_o = q^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_o)$ (resp. $\hat{\mathcal{J}} = q^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_o)$). Soient $s_k = (C_k^*, J_k) \in \hat{\mathcal{J}}_o$ (resp. $\in \hat{\mathcal{J}}_o$) pour $k = 1, 2$ et $C_1^* \times C_2^*$ le produit de C_1^* et de C_2^* ; on peut facilement voir que les projections canoniques $p_k = (C_k^*, p_k, C_1^* \times C_2^*)$ appartiennent à $\hat{\mathcal{F}}_a$ (resp. $\in \mathcal{F}_a$) pour $k = 1, 2$ (voir [9], prop. 1.10).

PROPOSITION 5.3. Parmi les structures pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogènes s sur $C_1^* \times C_2^*$ telles que p_k soit (s, s_k) -continu pour $k = 1, 2$, il en existe une qui est la moins fine. (Voir [9], prop. 5.6).

DEFINITION 5.4. La structure pré-(resp. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$)-topogène $(C_1^* \times C_2^*, J)$,

définie à partir de (C_k^\bullet, J_k) pour $k = 1, 2$ par la prop. 5.3, est appelée structure pré-(resp. $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$)-topogène produit de (C_1^\bullet, J_1) et (C_2^\bullet, J_2) .

PROPOSITION 5.4. Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, \mathcal{I})$ (resp. $\bar{p} = (\mathfrak{M}, \bar{p}, \bar{\mathcal{I}})$, resp. $\tilde{p} = (\mathfrak{M}, \tilde{p}, \tilde{\mathcal{I}})$). Alors p (resp. \bar{p} , resp. \tilde{p}) est un foncteur d'homomorphismes saturé au-dessus de \mathfrak{M} . (Voir [9], prop. 5.10).

CHAPITRE II

RELATIONS PRE-TOPOGENES ET TOPOGENES

6. Propriétés de quelques sous-catégories de Ω .

Soit (C, \leq) une classe ordonnée. Si $A \subset C$, la borne supérieure (resp. inférieure) de A dans C est appelée *agrégat* (resp. *intersection*) de A dans C et est notée $\bigvee A$ (resp. $\bigwedge A$). Un élément de C noté 1 (resp. 0) est appelé élément universel (resp. nul) de (C, \leq) si $a \leq 1$ (resp. $0 \leq a$) pour tout $a \in C$.

DEFINITION 6.1. Une classe ordonnée (C, \leq) est appelée *classe complète* si toute sous-classe admet un agrégat dans C .

PROPOSITION 6.1. Dans une classe complète (C, \leq) il existe un élément universel (resp. nul). Pour qu'une classe ordonnée (C, \leq) soit complète, il faut et il suffit que toute sous-classe de C admette une intersection. (Voir [9], prop. 6.1).

DEFINITION 6.2. Une classe complète (C, \leq) est appelée *classe locale* si l'axiome de distributivité (D) est vérifié :

$$(D) a \wedge (\bigvee B) = \bigwedge_{b \in B} (a \wedge b) \text{ pour tout } a \in C \text{ et } B \subset C.$$

DEFINITION 6.3. Une sous-classe (C_1, \leq) d'une classe complète (C, \leq) est appelée *sous-classe inductive* si la condition suivante est vérifiée : Si $A \subset C_1$ alors $\bigvee A \in C_1$.

DEFINITION 6.4. Une sous-classe ordonnée (C_1, \leq) d'une classe complète (C, \leq) est appelée *sous-classe inductive complète* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) (C_1, \leq) est une sous-classe inductive de (C, \leq) .
- 2) Si $a, b \in C_1$, alors $a \wedge b \in C_1$.

3) *L'élément universel 1 appartient à C_1 .*

Soit Ω_0 la classe des classes ordonnées et Ω la catégorie des applications croissantes $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq))$ entre classes ordonnées. Si $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega$, on appelle *morphisme adjoint à gauche* de f une application croissante $g = ((C, \leq), \underline{g}, (C', \leq))$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(ad)_1. fg(a') \leq a' \text{ pour tout } a' \in C'.$$

$$(ad)_2. gf(a) \geq a \text{ pour tout } a \in C.$$

Dans la suite nous considérerons les sous-catégories suivantes de la catégorie Ω :

- $\hat{\Omega}$ ayant pour unités les classes ordonnées admettant un élément universel 1.

- $\bar{\Omega}$ ayant pour unités les classes complètes.

- Ω_a formée de morphismes f admettant un morphisme adjoint à gauche g .

- Ω_a^s ayant pour éléments les $f \in \Omega_a$ qui sont surjectifs.

$$-\bar{\Omega}_a = \bar{\Omega} \cap \Omega_a, \bar{\Omega}_a^s = \bar{\Omega} \cap \Omega_a^s.$$

- $\bar{\Omega}_a^l$ la sous-catégorie pleine de $\bar{\Omega}_a$ ayant pour unités les classes locales.

- $\tilde{\Omega}_a$ ayant pour éléments les $f \in \bar{\Omega}_a$ tels que les adjoints à gauche de f soient compatibles avec les agrégats.

PROPOSITION 6.2. *Soient $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_a$ et $g = ((C, \leq), \underline{g}, (C', \leq))$ son morphisme adjoint à gauche; alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$i. fg(a') = a' \text{ pour tout } a' \in f(C).$$

$$ii. gf(a) = a \text{ pour tout } a \in g(C').$$

$$iii. g(\bigwedge A') = \bigwedge g(A') \text{ pour tout } A' \subset C' \text{ pourvu que } f \in \bar{\Omega}_a.$$

$$iv. f(\bigvee A) = \bigvee f(A) \text{ pour tout } A \subset C \text{ pourvu que } f \in \bar{\Omega}_a.$$

v. Si g est surjectif, $g(\bigvee A') = \bigvee g(A')$ pour tout $A' \subset f(C)$ pourvu que $f \in \bar{\Omega}_a$.

$$vi. Si $f \in \Omega_a^s$, $f(\bigwedge A) = \bigwedge f(A)$ pour tout $A \subset g(C')$.$$

$$vii. f(0) = 0.$$

vii. $f(1) = \bigvee f(C)$ si $f \in \overline{\Omega}_a$.

(Voir [9], prop. 6.3).

THEOREME 6.1. *Supposons $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega$ et, pour tout $a' \in C'$, posons $C_{a'} = \{a \in C : f(a) \leq a'\}$. Alors f appartient à Ω_a si, et seulement si, $C_{a'}$ admet un plus grand élément $\overline{a'}$ pour tout $a' \in C'$. Dans ce cas, l'adjoint à gauche g de f est tel que $g(a') = \overline{a'}$.*

DEMONSTRATION. Supposons $f \in \Omega_a$ et désignons par g l'adjoint à gauche de f . Soit $a' \in C'$; on a $fg(a') \leq a'$ d'après $(ad)_1$, d'où $g(a') \in C_{a'}$. Si $a \in C_{a'}$, la relation $f(a) \leq a'$ entraîne $gf(a) \leq g(a')$; comme $a \leq gf(a)$ d'après $(ad)_2$, on trouve $a \leq g(a')$. Ainsi $g(a')$ est le plus grand élément $\overline{a'}$ de $C_{a'}$.

- Inversement, supposons que cette condition soit vérifiée. Si $a' \leq a''$, on a $C_{a'} \subset C_{a''}$, et par suite $\overline{a'} \leq \overline{a''}$. Il s'ensuit $g = ((C, \leq), \underline{g}, (C', \leq)) \in \Omega$ en désignant par g la surjection $a' \rightarrow \overline{a'}$. Comme $g(a') \in C_{a'}$, on obtient $fg(a') \leq a'$, donc $(ad)_1$ est vérifiée. Par ailleurs, $a \in C_{f(a)}$ pour tout $a \in C$, de sorte que $a \leq gf(a)$; donc $(ad)_2$ est vérifié. Ceci prouve que g est un adjoint à gauche de f , c'est-à-dire $f \in \Omega_a$. ■

PROPOSITION 6.3. *Supposons $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \overline{\Omega}$. On a $f \in \overline{\Omega}_a$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :*

(a) $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$ pour tout $A \subset C$. (Voir [9], prop. 6.4).

Soit \mathfrak{M} la catégorie des applications. Soit $\omega = (\mathfrak{M}, \underline{\omega}, \Omega)$ la projection de Ω vers \mathfrak{M} . Soit ω_a (resp. $\overline{\omega}_a$) la restriction de ω à Ω_a (resp. à $\overline{\Omega}_a$). On peut voir que ω_a (resp. $\overline{\omega}_a$) est un foncteur d'homomorphismes saturé au-dessus de \mathfrak{M} . (Voir [9], prop. 6.5).

Soient (C, \leq) une classe ordonnée et (C_1, \leq) une sous-classe ordonnée de (C, \leq) telle que la condition suivante soit vérifiée :

En posant $C_{1a} = \{a_1 \in C_1 : a_1 \leq a\}$ pour tout $a \in C$, alors C_{1a} admet un plus grand élément.

PROPOSITION 6.4. *Soit $(C, \leq) \in \Omega_{a_0}$ (resp. $\in \overline{\Omega}_{a_0}$) et (C_1, \leq) une sous-classe ordonnée de (C, \leq) telle que la condition ci-dessus soit vérifiée (resp. une sous-classe inductive de (C, \leq)). Alors (C_1, \leq) est une ω_a*

(resp. $\bar{\omega}_a$)-sous-structure de (C, \leq) et toute ω_a (resp. $\bar{\omega}_a$)-sous-structure est de cette forme. (Voir [9], prop. 6.6).

COROLLAIRE. Soit Ω_a^l (resp. $\bar{\Omega}_a^l$) la classe des ω_a (resp. de $\bar{\omega}_a$)-injections $\iota = ((C, \leq), \iota, (C_1, \leq))$; alors $\Omega_a^l \subset R_g(\Omega_a)$ (resp. $\bar{\Omega}_a^l \subset R_g(\bar{\Omega}_a)$) et de plus c'est une sous-catégorie de Ω_a (resp. de $\bar{\Omega}_a$).

7. Relations pré-topogènes.

DEFINITION 7.1. Soit (C, \leq) une classe ordonnée. On dit que α est une relation pré-topogène sur (C, \leq) si les conditions suivantes sont vérifiées:

- (P₁) $a \alpha b, a, b \in C$ implique $a \leq b$.
- (P₂) $a_1 \leq a \alpha b \leq b_1$ implique $a_1 \alpha b_1$.

REMARQUE. On peut voir facilement qu'une relation pré-topogène est une relation antisymétrique et transitive moins fine que la relation d'ordre sur (C, \leq) . (Voir [9], p. 43).

Soient (C, \leq) une classe ordonnée, $(C \times C)^+$ le groupoïde des couples et M^* la sous-catégorie de $(C \times C)^+$ associés respectivement à C et à (C, \leq) . (Voir [9], prop. 6.10).

PROPOSITION 7.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) α est une relation pré-topogène sur (C, \leq) .
- (2) La sous-classe $J = \{(a, b) \in C \times C : a \alpha b\}$ est un idéal de M^* .

DEMONSTRATION. Montrons que (1) entraîne (2). Si $b \in M \cdot J \cdot M$, il existe $g_k, f_k \in M$ pour $k = 1, 2$, tels que

$$b = (g_1, f_1) \cdot (a, b) \cdot (g_2, f_2) \text{ et } g_1 \leq f_1 = a \alpha b = g_2 \leq f_2.$$

Donc $g_1 \alpha f_2$ d'après (P₂). Par conséquent

$$b = (g_1, f_1) \cdot (a, b) \cdot (g_2, f_2) = (g_1, f_2) \in J.$$

Ce qui démontre que J est un idéal de M^* . Montrons que (2) entraîne (1). Si $a \alpha b, a, b \in C$, alors $(a, b) \in J \subset M$, donc $a \leq b$. De même si $a_1 \leq a \alpha b \leq b_1$ on a $(a_1, b_1) = (a_1, a) \cdot (a, b) \cdot (b, b_1)$, avec $(a, b) \in J$. D'où $(a_1, b_1) \in J$, puisque J est un idéal de M^* . Ce qui démontre $a_1 \alpha b_1$. ■

PROPOSITION 7.2. Soit $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de relations pré-topogènes sur (C, \leq) ; alors $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$ et $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$ sont des relations pré-topogènes

sur (C, \leq) .

C'est la conséquence des props. 7.1 et 2.1.

PROPOSITION 7.3. Soient (C, \leq) une classe ordonnée et α une relation pré-topogène sur (C, \leq) . Alors, la relation α^2 est une relation pré-topogène sur (C, \leq) .

C'est la conséquence des props. 6.1 et 1.3.

DEFINITION 7.2. Soient (C, \leq) une classe ordonnée et C_1 une sous-classe de (C, \leq) . On dit que α est la relation pré-topogène engendrée par C_1 si la sous-classe correspondante J dans M^* (voir prop. 7.1) est l'idéal engendré par $(C_1 \times C_1) \cap M$ dans M^* (voir déf. 2.2).

PROPOSITION 7.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) α est une relation pré-topogène engendrée par C_1 sur (C, \leq) .
 - 2) $a \alpha b$, $a, b \in C$ veut dire qu'il existe $c \in C_1$ tel que $a \leq c \leq b$.
- On a alors $c \in (C_1, \leq)$ si, et seulement si, $c \alpha c$.

DEMONSTRATION. Montrons que 1) entraîne 2). Si $a \alpha b$, $a, b \in C$, alors $(a, b) \in J = M \cdot ((C_1 \times C_1) \cap M) \cdot M$. Donc il existe $(c, d) \in M \cap ((C_1 \times C_1)$ tel que $(a, b) = (a, c) \cdot (c, d) \cdot (d, b)$. Ce qui est équivalent à $a \leq c \leq d \leq b$. Donc $a \leq c \leq b$ avec $c \in C_1$.

- Réciproquement supposons que 2) est vérifiée. Si $a \alpha b$, $a, b \in C$, il existe $c \in C_1$ tel que $a \leq c \leq b$. Donc

$$(a, b) = (a, c) \cdot (c, c) \cdot (c, b) \text{ avec } (c, c) \in C_1 \times C_1 \cap M \text{ et} \\ (a, c), (c, b) \in M.$$

D'où J est un idéal engendré par $C_1 \times C_1 \cap M$. D'autre part soit $c \in C_1$; alors $c \leq c \leq c$. Donc $c \alpha c$ d'après 2). De même si $c \alpha c$, $c \in C$, il existe $c_1 \in C_1$ tel que $c \leq c_1 \leq c$ d'après 2). Ce qui implique $c = c_1$. ■

PROPOSITION 7.5. Soient $(C_\gamma, \leq)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de sous-classes de (C, \leq) et α_γ , $\gamma \in \Gamma$, la relation pré-topogène engendrée par (C_γ, \leq) . Alors les relations $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$ et $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$ sont engendrées respectivement par $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$ et $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$.

C'est la conséquence des props. 7.1 et 2.2.

8. Relations topogènes.

DEFINITION 8.1. Soient (C, \leq) une classe complète (déf. 6.1) et α une relation pré-topogène sur (C, \leq) . On dit que α est une relation topogène sur (C, \leq) si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(T_1) 0 \alpha 0 \text{ et } 1 \alpha 1.$$

$$(T_2) \text{ Si } a_i \alpha b_i, a_i, b_i \in C \text{ pour tout } i \in I, \text{ alors } \bigvee_{i \in I} a_i \alpha \bigvee_{i \in I} b_i.$$

$$(T_3) \text{ Si } a_1 \alpha b_1 \text{ et } a_2 \alpha b_2, \text{ alors } a_1 \wedge a_2 \alpha b_1 \wedge b_2.$$

REMARQUE. On vérifie facilement que la condition (T_3) est valable pour un nombre fini d'éléments de (C, \leq) .

Soit (C, \leq) une classe complète. Soit $(C \times C)^+$ (resp. M^*) la catégorie (resp. la catégorie à $\mathcal{P}(C)$ -produits et à \mathcal{F} -sommés, où \mathcal{F} a pour seuls éléments \emptyset et $\{1, 2\}$) correspondante à C (resp. à (C, \leq)). (Voir [9], prop. 6.11).

PROPOSITION 8.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \alpha \text{ est une relation topogène sur } (C, \leq).$$

(2) L'idéal $J = \{(a, b) \in C \times C : a \alpha b\}$ est un idéal $(\mathcal{P}(M), \mathcal{F})$ -stable de M^* .

DEMONSTRATION. Montrons que (1) entraîne (2). On a évidemment $0 \alpha 0$ et $1 \alpha 1$, donc le \emptyset -produit $(0, 0)$ et la \emptyset -somme $(1, 1)$ appartiennent à J . Si $(a_i, b_i) \in J$ pour tout $i \in I$, alors $a_i \alpha b_i$ pour tout $i \in I$. Donc

$$\bigvee_{i \in I} a_i \alpha \bigvee_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad a_i \wedge a_j \alpha b_i \wedge b_j.$$

- Réciproquement, supposons (2) vérifié; comme $\emptyset \subset J$, on a $(0, 0) = 0 = \bigvee \emptyset \in J$; de même $(1, 1) \in J$, ce qui implique $0 \alpha 0$ et $1 \alpha 1$. Si $a_i \alpha b_i, a_i, b_i \in C$ pour tout $i \in I$, alors $(a_i, b_i) \in J$ pour tout $i \in I$. Donc

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i, \bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a_i, b_i) \in J \quad \text{et}$$

$$(a_i \wedge a_j, b_i \wedge b_j) = (a_i, b_i) \wedge (a_j, b_j) \in J.$$

Ce qui implique

$$\bigvee_{i \in I} a_i \alpha \bigvee_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad a_i \wedge a_j \alpha b_i \wedge b_j$$

pour tout $(i, j) \in I \times I$. ■

PROPOSITION 8.2. Soient (C, \leq) une classe complète et α une relation topogène sur (C, \leq) . Alors la relation α^2 (prop. 7.3) est topogène.

C'est la conséquence des propositions 8.1 et 3.1.

PROPOSITION 8.3. Soient (C, \leq) une classe complète et $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de relations topogènes sur (C, \leq) . Alors $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$ est une relation topogène sur (C, \leq) .

C'est la conséquence des propositions 8.1 et 3.2.

Soient (C, \leq) une classe complète et (C_1, \leq) une sous-classe de (C, \leq) . Soit α la relation pré-topogène engendrée par (C_1, \leq) (déf. 7.2).

PROPOSITION 8.4. Pour que α , défini ci-dessus, soit une relation topogène, il faut et il suffit que (C_1, \leq) soit une sous-classe inductive complète de (C, \leq) (déf. 6.4). (voir [9], prop. 8.4).

TOPOGENISATION.

Soient (C, \leq) une classe complète, et soit α une relation pré-topogène sur (C, \leq) .

THEOREME 8.1. Il existe une relation topogène sur (C, \leq) , notée α^t , plus fine que α et moins fine que toute relation topogène plus fine que α .

DEFINITION 8.2. La relation α^t associée à la relation pré-topogène α par le théorème 8.1 est appelée la topogénisée de α . (Voir remarque page 30).

REMARQUE. Soient (C, \leq) une classe locale, α une relation pré-topogène sur (C, \leq) et α^t la topogénisée de α . Soient J l'idéal (resp. J' l'idéal $(\mathcal{P}(M), \mathcal{F}')$ -stable) associé à α (resp. à α^t). Soit J^t le topogénisé de J (déf. 3.3). On peut vérifier que $J^t = J'$. (Voir [9], prop. 8.6).

PROPOSITION 8.5. Soient (C, \leq) une classe complète, α une relation pré-topogène sur (C, \leq) et α^t sa topogénisée sur (C, \leq) . Alors α est topogène si, et seulement si, $\alpha = \alpha^t$.

Soient (C, \leq) une classe locale et α_j , $1 \leq j \leq n$, une famille finie de relations topogènes définie sur (C, \leq) . Posons $\alpha = (\bigcup_{j=1}^n \alpha_j)^t$.

PROPOSITION 8.6. La relation topogène α est définie de la façon suivante :

(U) $a \propto b$, $a, b \in C$, veut dire qu'il existe un ensemble d'indices I , des éléments a_i, b_i, a_{ij} et $b_{ij} \in C$ tels que

$$a = \bigvee_{i \in I} a_i, \quad b = \bigvee_{i \in I} b_i, \quad a_i = \bigwedge_{j=1}^n a_{ij}, \quad b_i = \bigwedge_{j=1}^n b_{ij} \text{ et } a_{ij} \propto_j b_{ij}$$

pour tout $i \in I$ et $1 \leq j \leq n$. (Voir [9], prop. 8.10).

PROPOSITION 8.7. Soient (C, \leq) une classe locale et $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de relations pré-topogènes sur (C, \leq) . On a

$$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma^t \right)^t = \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \right)^t \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma^t \right)^t = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \right)^t.$$

(Voir [9], prop. 8.12).

RELATIONS TOPOLOGIQUES.

DEFINITION 8.3. Soient (C, \leq) une classe complète et α une relation topogène sur (C, \leq) . On dit que α est une relation topologique sur (C, \leq) si la condition suivante est vérifiée :

$$(T_4) \quad \alpha C \alpha^2.$$

Il résulte de (T_4) , puisqu'on a toujours $\alpha^2 C \alpha$, qu'une relation topogène est topologique si, et seulement si, $\alpha = \alpha^2$.

REMARQUE. On peut voir que la condition (T_4) est équivalente à la suivante : L'idéal associé J dans la catégorie M^\bullet (prop. 8.1) est topologique (voir déf. 3.4).

PROPOSITION 8.8. Soient (C, \leq) une classe complète et (C_1, \leq) une sous-classe inductive complète de (C, \leq) (déf. 6.4). Soit α la relation topogène engendrée par (C_1, \leq) sur (C, \leq) (prop. 8.4). Alors α est une relation topologique sur (C, \leq) . (Voir [9], prop. 8.13).

DEFINITION 8.4. Soient (C, \leq) une classe complète et α une relation topologique sur (C, \leq) . Un élément $g \in C$ est appelé élément ouvert si, et seulement si, $g \propto g$.

REMARQUE. Soit \mathcal{O} la famille des éléments ouverts de (C, \leq) ; les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(O_1) \quad 0 \text{ et } 1 \text{ sont ouverts.}$$

$$(O_2) \quad \text{Si } (a_i)_{i \in I} \text{ est une famille d'éléments ouverts, alors } \bigvee_{i \in I} a_i \text{ est ouvert.}$$

(0_3) Si a, b sont des éléments ouverts, $a \wedge b$ est ouvert.

DEFINITION 8.5. On dit que \mathfrak{G} définit une paratopologie sur (C, \leq) si cette famille satisfait aux conditions (0_1) à (0_3). Alors les éléments de \mathfrak{G} s'appellent des ouverts de (C, \leq) et (C, \leq, \mathfrak{G}) s'appelle espace paratopologique.

THEOREME 8.2. Soient (C, \leq) une classe complète et α une relation topogène sur (C, \leq) . Soit \mathfrak{G} une famille d'éléments de (C, \leq) . Alors \mathfrak{G} est une paratopologie sur (C, \leq) si, et seulement si, α est une relation topologique sur (C, \leq) et \mathfrak{G} l'ensemble de ses ouverts.

DEMONSTRATION. Si \mathfrak{G} est une paratopologie sur (C, \leq) , définissons une relation α sur C de la façon suivante :

(R) $a \alpha b$, $a, b \in C$, si, et seulement si, il existe $g \in \mathfrak{G}$ tel que $a \leq g \leq b$. Alors on voit que α est une relation topologique sur (C, \leq) . En effet, \mathfrak{G} est une sous-classe inductive complète de (C, \leq) (déf. 5.4) d'après (0_1) à (0_3). Donc α est une relation topologique d'après la prop. 8.8. D'autre part, soit \mathfrak{G}' la famille des éléments $g' \in C$ tels que $g' \alpha g'$, où α est défini par (R); alors $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$. En effet, si $g' \in \mathfrak{G}'$ il existe $g \in \mathfrak{G}$ tel que $g' \leq g \leq g'$, d'où $g = g'$ et $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}'$. Par ailleurs on voit facilement que $g \alpha g$ pour tout $g \in \mathfrak{G}$. Ce qui implique $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$.

- Réciproquement, soit α une relation topologique sur (C, \leq) . Soit \mathfrak{G} la paratopologie sur (C, \leq) dont les éléments sont caractérisés par $g \alpha g$. L'inégalité $a \leq g \leq b$ avec $g \alpha g$ entraîne $a \alpha b$. Inversement, si $a \alpha b$, $a, b \in C$, posons

$$C_b = \{x \in C \mid x \alpha b\} \quad \text{et} \quad g = \bigvee C_b.$$

Alors $x \alpha b$ pour tout $x \in C_b$, donc $g = \bigvee_{x \in C_b} x \alpha b$. D'après (T_4), il existe $c \in C$ tel que $g \alpha c \alpha b$ de sorte que $g \leq c$, et $c \leq g$ d'après la définition de g . Ce qui implique $g = c$, d'où $g \alpha g$. De plus d'après (P_1) $g \leq b$, et, d'après la définition de g , $a \leq g$; par suite $a \leq g \leq b$. Ceci montre que (R) est vérifié. ■

DEFINITION 8.6. Une relation topologique α et la paratopologie \mathfrak{G} que l'on en déduit d'après le théorème 8.2 sont dites associées.

9. Relations pré-topogènes et topogènes associées par une application.

Soit Ω_a (resp. $\bar{\Omega}_a$, resp. $\tilde{\Omega}_a$) la sous-catégorie de Ω définie au début du § 6. Soit $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \subset \Omega_a$. Posons $F(b, a) = (f(b), f(a))$ pour tout $(b, a) \in (\bar{C} \times C)^+$. Si g est son morphisme adjoint à gauche, posons $G(b', a') = (g(b'), g(a'))$. On peut facilement voir que G , étant foncteur adjoint à gauche de F , est unique (voir [9], prop. 6.14). Soient M^*, M'^* les sous-catégories correspondantes respectivement à (C, \leq) et à (C', \leq) d'après ce qu'on a vu au début du § 7. Si $(C, \leq), (C', \leq) \in \bar{\Omega}$, on peut voir que M^* et M'^* sont à $\mathcal{P}(M)$ -produits et à $\mathcal{P}(M)$ -sommés (voir [9], prop. 6.11).

Ceci dit, soient α, α' des relations pré-topogènes (resp. topogènes) respectivement sur (C, \leq) et (C', \leq) . Soient J, J' les idéaux (resp. les idéaux $(\mathcal{P}(M), \mathcal{I}')$ -stables, où \mathcal{I}' a pour seuls éléments \emptyset et $\{1, 2\}$) associés respectivement à α et à α' dans M^* et M'^* , d'après la prop. 7.1 (resp. prop. 8.1). Si $f \in \tilde{\Omega}_a$, on peut vérifier que $G(J')$ et $F(J)$ sont des sous-classes $(\mathcal{P}(M), \mathcal{I}')$ -stables respectivement dans M^* et dans M'^* (voir [9], prop. 4.2).

DEFINITION 9.1. Soit $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$). Soit α' une relation pré-topogène (resp. topogène) sur (C', \leq) . On dit que α est la relation pré-topogène (resp. topogène) associée à α' par f sur (C, \leq) si $J = J'F = \hat{G}(J') = M.G(J').M$. On pose alors $\alpha = \alpha'f$.

PROPOSITION 9.1. Sous les hypothèses précédentes les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \alpha = \alpha'f.$$

(2) $(A) a \alpha b, a, b \in C$, équivaut à l'existence de $a', b' \in C'$ tels que $a \leq g(a'), g(b') \leq b$ et $a' \alpha' b'$.

DEMONSTRATION. Montrons que (1) entraîne (2). Si $a \alpha b, a, b \in C$ d'après la prop. 7.1, $(a, b) \in J = M.G(J').M$. Ce qui entraîne l'existence de $(c, d) \in G(J')$ tel que $(a, b) = (a, c)_\bullet (c, d)_\bullet (d, b)$. Il s'ensuit qu'il existe $(c', d') \in J'$ tel que $(c, d) = G(c', d') = (g(c'), g(d'))$. Ce qui implique

$$a \leq c = g(c') \quad \text{et} \quad g(d') = d \leq b, \quad \text{où } c' \alpha' d'.$$

Montrons que (2) entraîne (1). Si $(a, b) \in J$, d'après la prop. 6.1, $a \alpha b$, $a, b \in C$ et d'après (A) il existe $(a', b') \in C'$ tel que $a \leq g(a')$, $g(b') \leq b$ et $a' \alpha' b'$. Ceci équivaut à dire que

$$(a, b) = (a, g(a')) \cdot (g(a'), g(b')) \cdot (g(b'), b),$$

avec $(g(a'), g(b')) = G(a', b')$ et $(a', b') \in J'$, ce qui signifie $(a, b) \in G(J')$. Donc $J = G(J')$. ■

PROPOSITION 9.2. Soient $f = ((C', \underline{\leq}), f, (C, \underline{\leq})) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$) et α' une relation pré-topogène (resp. topogène) sur $(C', \underline{\leq})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \alpha = \alpha' f.$$

(2) $(B) a \alpha b$, $a, b \in C$ équivaut à l'existence d'un élément $b' \in C'$ tel que $g(b') \leq b$ et $f(a) \alpha' b'$ (voir [9], prop. 9.2).

Comme on a vu plus haut, pour définir une relation topogène associée à une relation topogène par une application, on a supposé que $f \in \tilde{\Omega}_a$. Supposons maintenant que $f = ((C', \underline{\leq}), \underline{f}, (C, \underline{\leq})) \in \bar{\Omega}_a$. Soit α' une relation topogène sur $(C', \underline{\leq})$ et $\alpha' f$ la relation définie sur $(C, \underline{\leq})$ par la prop. 9.2-(2). C'est seulement une relation pré-topogène sur $(C, \underline{\leq})$. Ceci implique la définition suivante :

DEFINITION 9.1'. Avec les hypothèses ci-dessus, on dit que α est la relation topogène associée à α' par f si $\alpha = (\alpha' f)^t$ (déf. 8.2).

PROPOSITION 9.3. Si $f = ((C', \underline{\leq}), \underline{f}, (C, \underline{\leq})) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$, resp. $\in \bar{\Omega}_a^l$), alors $a' \alpha' b'$, $a', b' \in C'$ entraîne $g(a') \alpha g(b')$ dans $(C, \underline{\leq})$.

Si $f \in \Omega_a^s$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a^s$, resp. $\in \bar{\Omega}_a^{ls}$), alors $a' \alpha' b'$, $a', b' \in C'$ équivaut à $g(a') \alpha g(b')$ dans $(C, \underline{\leq})$ (voir [9], prop. 9.4).

Soit $f = ((C', \underline{\leq}), \underline{f}, (C, \underline{\leq})) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$). Soit $(C'_1, \underline{\leq})$ une sous-classe (resp. une sous-classe inductive complète (déf. 6.4)) de $(C', \underline{\leq})$. Soient α' la relation pré-topogène (resp. topogène) engendrée par $(C'_1, \underline{\leq})$ sur $(C', \underline{\leq})$ (déf. 6.2 et prop. 7.4) et $\alpha = \alpha' f$.

PROPOSITION 9.4. Sous l'hypothèse précédente, α est engendrée par $g(C'_1)$ sur $(C, \underline{\leq})$. (Voir [9], prop. 9.7).

PROPOSITION 9.5. Soient $f = ((C', \leq), f, (C, \leq)) \in \tilde{\Omega}_a$ et α' une relation pré-topogène sur (C', \leq) . On a alors $\alpha' \bar{f} = (\alpha' f)^t$. (Voir [9], prop. 9.9).

IMAGES DES RELATIONS PRE-TOPOGENES ET TOPOGENES.

Soient $f = ((C', \leq), f, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$) et g son adjoint à gauche. Soient M' et M'' les catégories associées à (C, \leq) et (C', \leq) et F, G les foncteurs associés à f, g respectivement d'après ce qu'on a vu au début de ce paragraphe. Soient α, α' des relations pré-topogènes (resp. topogènes) respectivement sur (C, \leq) et (C', \leq) . Soient J, J' les idéaux correspondants (prop. 7.1 et 8.1).

DEFINITION 9.2. Sous les hypothèses ci-dessus, on dit que α' est la relation pré-topogène (resp. topogène) image de α par f si $J' = FJ = G^{-1}(J)$ (prop. 4.4); on écrit alors $\alpha' = f\alpha$.

DEFINITION 9.6. La relation $f\alpha$ définie par la déf. 9.2 est la plus fine parmi les relations pré-topogènes (resp. topogènes) α' sur (C', \leq) telles que $\alpha' f \subset \alpha$.

C'est la conséquence de la déf. 9.2 et de la prop. 4.4.

PROPOSITION 9.7. Sous les hypothèses de la déf. 9.2, les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \alpha' = f\alpha.$$

(2) $a' \alpha' b', a', b' \in C'$, équivaut à $g(a') \alpha g(b')$. (Voir [9], prop. 9.11).

PROPOSITION 9.8. Avec les hypothèses de la déf. 9.2, on a $f(\alpha' f) = \alpha'$. Si de plus $f \in \Omega_a^S$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a^S$) (voir début du §6), on a $(f\alpha) f = \alpha$. (Voir [9], prop. 9.15).

10. Morphismes entre relations pré-topogènes ou topogènes.

DEFINITION 10.1. Soit $f = ((C', \leq), f, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$, resp. $\in \bar{\Omega}_a^l$). Soient α, α' des relations pré-topogènes (resp. topogènes) respectivement sur (C, \leq) et (C', \leq) . On dit que f est une application (α, α') -continue ou bien un morphisme entre α et α' si on a $\alpha' f \subset \alpha$ (resp. $(\alpha' f)^t \subset \alpha$) (voir défs. 9.1 et 9.1').

THEOREME 10.1. Soient α, α' des relations pré-topogènes (resp. topogènes) respectivement sur (C, \leq) et (C', \leq) .

1) Soit $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$, resp. $\in \overline{\Omega}_a^I$); alors $\alpha'f$ (resp. $(\alpha'f)^t$) est la moins fine parmi les relations pré-topogènes (resp. topogènes) α sur (C, \leq) qui rendent (α, α') -continue l'application f .

2) Soit $f \in \Omega_a$ (resp. $\in \tilde{\Omega}_a$); alors $f\alpha$ est la plus fine parmi les relations pré-topogènes (resp. topogènes) α' sur (C', \leq) qui rendent (α, α') -continue l'application f .

C'est la conséquence de la déf. 10.1 et du théo. 5.1.

Soit Ω_γ (resp. $\overline{\Omega}_\gamma$) la classe des éléments inversibles de Ω (resp. de $\overline{\Omega}$).

DEFINITION 10.2. Soient $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_\gamma$ (resp. $\in \overline{\Omega}_\gamma$) et α, α' des relations pré-topogènes (resp. topogènes) respectivement sur (C, \leq) et (C', \leq) . On dit que f est un isomorphisme entre les relations α et α' si f est (α, α') -continu et si f^{-1} est (α', α) -continu.

On peut facilement vérifier que f est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha'f\alpha$ et $f\alpha\alpha'$.

Soit \mathcal{F} (resp. $\overline{\mathcal{F}}$, resp. $\tilde{\mathcal{F}}$) la catégorie des morphismes $f = ((C', \leq, \alpha'), \underline{f}, (C, \leq, \alpha))$ entre les relations pré-topogènes (resp. topogènes, resp. topogènes) telles que $f = ((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\overline{\Omega}_a^I$, resp. $\tilde{\Omega}_a$). Soit λ (resp. $\overline{\lambda}$, resp. $\tilde{\lambda}$) le foncteur projection de \mathcal{F} (resp. de $\overline{\mathcal{F}}$, resp. de $\tilde{\mathcal{F}}$) vers Ω_a (resp. vers $\overline{\Omega}_a^I$, resp. vers $\tilde{\Omega}_a$); on peut voir facilement que ce sont des foncteurs d'homomorphismes saturés.

SOUS-STRUCTURES DANS \mathcal{F} ET DANS $\overline{\mathcal{F}}$.

Soit Ω_a^t (resp. $\overline{\Omega}_a^t$) la sous-catégorie de Ω_a (resp. de $\overline{\Omega}_a^I$) formée des ω_a (resp. de $\overline{\omega}_a$)-injections (voir corol. de la prop. 6.4). Soient $(C, \leq, \alpha) \in \mathcal{F}_o$ (resp. $\in \overline{\mathcal{F}}_o$) et $\iota = ((C, \leq), \underline{\iota}, (C_1, \leq)) \in \Omega_a^t$ (resp. $\in \overline{\Omega}_a^t$). Posons $\alpha_1 = (\alpha)\iota$ (resp. $= ((\alpha)\iota)^t$).

PROPOSITION 10.1. (C_1, \leq, α_1) est une (Ω_a^t, λ) (resp. $(\overline{\Omega}_a^t, \overline{\lambda})$)-sous-structure de (C, \leq, α) . (Voir prop. 10.3 [9]).

DEFINITION 10.3. La relation pré-topogène (resp. topogène) α_1 sur (C_1, \leq) définie par la prop. 10.3 est appelée relation pré-topogène (resp. topogène) induite sur (C_1, \leq) .

PRODUITS DE RELATIONS PRE-TOPOGENES ET TOPOGENES.

Soit $\hat{\Omega}$ (resp. $\bar{\Omega}^l$) la sous-catégorie de Ω considérée au §6. Posons $\hat{\mathcal{J}}_o = \hat{\lambda}^{-1}(\hat{\Omega}_o)$. Soit $(C_k, \leq, \alpha_k) \in \hat{\mathcal{J}}_o$ (resp. $\in \bar{\mathcal{J}}_o$) pour $k=1, 2$. Soient $(C_1 \times C_2, \leq)$ le produit de (C_1, \leq) et (C_2, \leq) et $p_k = ((C_k, \leq), \underline{p}_k, (C_1 \times C_2, \leq))$ les projections correspondantes pour $k=1, 2$. On peut facilement voir que $p_k \in \hat{\Omega}_a$ (resp. $\in \bar{\Omega}_a^l$) pour $k=1, 2$ (voir [9], prop. 6.7). Posons

$$\alpha = (\alpha_1 p_1) \cup (\alpha_2 p_2) \text{ (resp. } ((\alpha_1 p_1) \cup (\alpha_2 p_2))^t).$$

PROPOSITION 10.2. La relation pré-topogène (resp. topogène) α ainsi définie sur $(C_1 \times C_2, \leq)$ est la moins fine des relations pré-topogènes (resp. topogènes) sur $(C_1 \times C_2, \leq)$ qui rendent (α, α_k) -continues les les projections p_k pour $k=1, 2$.

C'est la conséquence des props. 8.1 et 5.3.

DEFINITION 10.4. La relation pré-topogène (resp. topogène) α définie sur $(C_1 \times C_2, \leq)$ par la prop. 10.2, est appelée produit de α_1 et α_2 .

PROPOSITION 10.3. Soit $\bar{\lambda}$ le foncteur projection de $\bar{\mathcal{J}}$ vers $\bar{\Omega}_a^l$ (voir début de ce §). Alors $\bar{\lambda}$ est un foncteur d'homomorphismes à produits finis et résolvant à droite. (Voir [9], props. 10.5 et 10.6).

Soit

$$p = (\mathfrak{M}, \underline{\omega}_a, \Omega_a) \cdot (\Omega_a, \underline{\lambda}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{M}, \underline{p}, \mathcal{J}) \text{ (resp. } \bar{p} = (\mathfrak{M}, \bar{p}, \bar{\mathcal{J}}))$$

le foncteur projection de \mathcal{J} (resp. de $\bar{\mathcal{J}}$) vers \mathfrak{M} (voir fin du §6 et début du §10).

THEOREME 10.2. Le foncteur p (resp. \bar{p}) ainsi défini est un foncteur d'homomorphismes saturé au-dessus de \mathfrak{M} . \bar{p} est un foncteur à produits finis et résolvant à droite.

11. Applications.

Soit C^* une catégorie. On désigne par C_o^* la classe des unités

de C^\bullet , par $C^\bullet * C^\bullet$ la sous-classe de $C \times C$ formée des couples composables et par α, β et κ les applications source, but et loi de composition respectivement.

Soit (C^\bullet, \leq) une catégorie munie d'une relation d'ordre telle que (C, \leq) soit une classe ordonnée. Posons :

$$\begin{aligned} C_{of}^\bullet &= \{e \in C_o^\bullet : e \leq f\}, \text{ pour tout } f \in C^\bullet, \\ C_{e,\alpha}^\bullet &= \{f \in C^\bullet : \alpha(f) \leq e\}, \text{ pour tout } e \in C_o^\bullet, \\ C_{e,\beta}^\bullet &= \{f \in C^\bullet : \beta(f) \leq e\}, \text{ pour tout } e \in C_o^\bullet, \\ (C^\bullet * C^\bullet)_{f,\kappa} &= \{(g, b) \in C^\bullet * C^\bullet : b \cdot g \leq f\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 11.1. Pour que (C^\bullet, \leq) soit une catégorie Ω_a (resp. $\overline{\Omega}_a$)-structurée (voir [4], p. 35), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) C^\bullet est une catégorie et (C, \leq) est une classe ordonnée (resp. une classe complète).

2) Les applications $\iota = ((C, \leq), \underline{\iota}, (C_o^\bullet, \leq))$, $\alpha = ((C, \leq), \underline{\alpha}, (C, \leq))$, $\beta = ((C, \leq), \underline{\beta}, (C, \leq))$ et $\kappa = ((C, \leq), \underline{\kappa}, (C^\bullet * C^\bullet, \leq))$ sont croissantes et les sous-classes C_{of}^\bullet , $C_{e,\alpha}^\bullet$, $C_{e,\beta}^\bullet$ et $(C^\bullet * C^\bullet)_{f,\kappa}$ citées ci-dessus, admettent un plus grand élément (resp. la condition (C) est vérifiée :

$$\begin{aligned} (C) \alpha(\bigvee A) &= \bigvee \alpha(A), \beta(\bigvee A) = \bigvee \beta(A) \text{ pour tout } A \subset C \text{ et} \\ \kappa(\bigvee B) &= \bigvee \kappa(B) \text{ pour tout } B \subset C^\bullet * C^\bullet. \end{aligned} \text{ (Voir [9], prop. 11.2).}$$

CATEGORIES PRE-TOPOGENES ET TOPOGENES.

Soit \mathcal{J} (resp. $\overline{\mathcal{J}}$) la catégorie des morphismes $f = ((C', \leq, \alpha'), \underline{f}, (C, \leq, \alpha))$ entre les relations pré-topogènes (resp. topogènes) tels que $((C', \leq), \underline{f}, (C, \leq)) \in \Omega_a$ (resp. $\in \overline{\Omega}_a^l$) (voir début du § 10). Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, \overline{\mathcal{J}})$ (resp. $\overline{p} = (\mathfrak{M}, \underline{\overline{p}}, \overline{\mathcal{J}})$) le foncteur projection vers \mathfrak{M} (voir théo. 10.2).

DEFINITION 11.1. Soit α une relation pré-topogène (resp. topogène) sur (C^\bullet, \leq) . On dit que $(C^\bullet, \leq, \alpha)$ est une catégorie pré-topogène (resp. topogène) si $(C^\bullet, \leq, \alpha)$ est une catégorie (\mathcal{J}, p) (resp. $(\overline{\mathcal{J}}, \overline{p})$)-structurée.

THEOREME 11.1. Pour que $(C^\bullet, \leq, \alpha)$ soit une catégorie (\mathcal{J}, p) (resp. $(\overline{\mathcal{J}}, \overline{p})$)-structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées : Les applications

$\iota = ((C, \leq, \alpha), \underline{\iota}, (C_0^*, \leq, \alpha_1)), \quad \alpha = ((C_0^*, \leq, \alpha_1), \underline{\alpha}, (C, \leq, \alpha)),$
 $\beta = ((C_0^*, \leq, \alpha_1), \underline{\beta}, (C, \leq, \alpha)) \quad \text{et} \quad \kappa = ((C, \leq, \alpha), \underline{\kappa}, (C^* * C^*, \leq, \alpha'))$
 appartiennent à \mathcal{T} (resp.

$$\begin{aligned}
 & ((C_0^*, \leq, \alpha_1), \underline{\alpha}, (C, \leq, \alpha)), ((C_0^*, \leq, \alpha_1), \underline{\beta}, (C, \leq, \alpha)) \quad \text{et} \\
 & ((C, \leq, \alpha), \underline{\kappa}, (C^* * C^*, \leq, \alpha'))
 \end{aligned}$$

à $\overline{\mathcal{T}}$, où α_1 et α' sont les relations induites respectivement par α et par la relation produit de α par α sur (C, \leq) et sur $(C^* * C^*, \leq)$ (voir défs. 10.3 et 10.4). (Voir [9], théo. 11.1).

REMARQUE. Soit $\overline{\mathcal{T}}$ la catégorie des morphismes $f = ((C', \leq, \alpha'), \underline{f}, (C, \leq, \alpha))$ entre relations topogènes considérée au § 10. Alors cette catégorie contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $\overline{\mathcal{T}}'$ ayant pour unités les triplets (C, \leq, α) , où α est une relation topologique sur (C, \leq) (voir déf. 8.3) et où (C, \leq) est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(D)$ de D muni de la relation d'inclusion. Soit T la catégorie des applications continues entre topologies usuelles; alors cette catégorie est isomorphe à $\overline{\mathcal{T}}'$. En effet, l'isomorphisme provient du fait qu'à chaque relation topologique α correspond d'une façon biunivoque une paratopologie (C, \leq, σ) (voir théo. 8.2). Ceci dit, considérons maintenant une catégorie topologique au sens de C. Ehresmann, c'est-à-dire une catégorie (T, p) -structurée, où $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, T)$. Cette catégorie s'identifie à une catégorie topogène (voir déf. 11.1) particulière, à savoir à une catégorie topogène (C^*, \leq, α) telle que $(C, \leq, \alpha) \in \overline{\mathcal{T}}'$.

REMARQUE. Soit (C, \leq) une classe locale munie d'une relation pré-topogène α . On montre que la relation α^t topogénisée de α est définie par $(T') a \alpha^t b$ si, et seulement si, $a = \bigvee_{i \in I} a_i$, $b = \bigvee_{i \in I} b_i$, où, pour tout $i \in I$, on a $b_i = \bigwedge_{j=1}^{n_i} b_j^i$ et $a_i \alpha b_j^i$ pour tout $1 \leq j \leq n_i$.

Ceci rectifie le théorème 8.1 [9]; la démonstration se modifie aisément en y remplaçant (T) par (T') . Bien que la construction de α^t soit utilisée dans la démonstration de la proposition 10.1, cette proposition reste vraie, la démonstration étant analogue à celle de la proposition 10.3 [9] après substitution de (T') à (T) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIRKHOFF, Lattice Theory, *Am. Math. Soc.* 1964, (pp. 65 et 146).
- [2] A. CSASZAR, Fondements de la Topologie Générale, *Gauthier-Villars*, Paris, 1960, (pp. 21 à 38, 63 à 65, 102 à 103 et 114 à 115).
- [3] C. EHRESMANN, Catégories et Structures, *Dunod* Paris, 1965, (pp. 4, 9, 10, 12, 14, 24, 26, 70, 113, 125, 127, 135, 142, 189, 191, 202 et 327).
- [4] C. EHRESMANN, Catégories Structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, 1963, pp. 349 à 426.
- [5] C. EHRESMANN, Groupoïdes Inductifs et Structures locales, *Soc. Math. du Canada* (multigraphié), Sémin. 1961, (pp. 1 à 3).
- [6] C. EHRESMANN, Structures Quasi-Quotient, *Math. Ann.* 171, 1967, pp. 193 à 263.
- [7] NÖBELING, Grundlanger der Analytischen Topologie, Berlin, 1954, (p. 44).
- [8] G. POITOU et P. JAFFARD, Introduction à la Théorie des Catégories, *Cours polycopié de 1963 - 64, Fac. des Sci. de Lille*, (pp. 49 et 148 à 149).
- [9] M.T. SADR, Structures topogènes sur une catégorie (multigraphié), *Thèse d'université*, Paris, 1967.

Mohammad T. SADR

1244 Broadway 4 -

Fargo ND 58 102 - U.S.A -