COMPOSITIO MATHEMATICA

ALFRED HUBER

Zum Randverhalten subharmonischer Funktionen

Compositio Mathematica, tome 13 (1956-1958), p. 257-262
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1956-1958__13__257_0>

Zum Randverhalten subharmonischer Funktionen

von

Alfred Huber,

Zürich

Im Jahre 1928 veröffentlichte J. E. Littlewood [1] den folgenden *Satz*: *Sei* $v(z)$ *subharmonisch in* $|z| < 1$ *und sei*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |v(re^{i\Theta})|\, d\Theta = O(1) \qquad (r \to 1). \tag{1}$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \to 1} v(re^{i\Theta}) = V(\Theta) \tag{2}$$

für fast alle[1]) *Werte von* $\Theta(-\pi \leqq \Theta \leqq +\pi)$.

Nun hat kürzlich M. Tsuji [3] die nachstehende Vermutung ausgesprochen: *Für fast alle Werte von* Θ $(-\pi \leqq \Theta \leqq +\pi)$ *ist folgende Aussage erfüllt*: *Es ist*

$$\lim_{\tau \to 0} v(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}) = V(\Theta)^{2)} \qquad (\tau > 0) \tag{3}$$

für fast alle Werte von $\chi(|\chi| < \pi/2)$. Es gelang Tsuji, die Richtigkeit seiner Vermutung unter folgender Zusatzvoraussetzung zu verifizieren: Es existiere eine Zahl $\lambda < 1$ derart, dass $\mu(|z| < r) = O([1-r]^{-\lambda})$ für $r \to 1$, wobei μ die v zugeordnete Massenverteilung bezeichnet. Zum Beweise kombinierte Tsuji die Littlewoodsche Methode mit zusätzlichen, eigenen Abschätzungen.

In der vorliegenden Note soll eine Erweiterung des Littlewoodschen Satzes hergeleitet werden, welche die Tsujische Vermutung enthält. Dies geschieht unter ausschliesslicher Anwendung der ursprünglichen Beweismethode in [1], wobei freilich gewisse Details der allgemeinern Fragestellung angepasst werden müssen.

SATZ. *Es sei* $v(z)$ *subharmonisch in* $|z| < 1$ *und erfülle* (1). *Dann ist für jede Wahl von* $\chi(|\chi| < \pi/2)$ *die Beziehung* (3) *für fast alle Werte von* $\Theta(-\pi \leqq \Theta \leqq +\pi)$ *befriedigt.*

[1]) d.h. mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Mass 0.

[2]) $V(\Theta)$ bezeichnet stets die durch (2) für fast alle Werte von Θ definierte Funktion.

Um aus diesem Resultat die Gültigkeit der Tsujischen Vermutung abzuleiten, betrachten wir die charakteristische Funktion $\kappa(\Theta, \chi)$ der aus denjenigen Punkten (Θ, χ) des Rechtecks $[|\Theta| < \pi] \cap [|\chi| < \pi/2]$ bestehenden Menge, für welche (3) nicht erfüllt ist. Falls wir die Summierbarkeit von κ nachweisen können, dürfen wir unter Anwendung des Satzes von Fubini schliessen, dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\Theta \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \kappa(\Theta, \chi) d\chi = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\chi \int_{-\pi}^{+\pi} \kappa(\Theta, \chi) d\Theta = 0,$$

woraus sich die Richtigkeit der Tsujischen Vermutung sofort ergibt. [3])

Die Summierbarkeit von κ kann man z.B. wie folgt einsehen: v ist Limes einer monoton abnehmenden Folge $\{v_k\}$ stetiger, subharmonischer Funktionen. Die Funktionen [4])

$$f_{kn}(\Theta, \chi) = \sup_{\frac{1}{n+1} \leqq \tau \leqq \frac{1}{n}} v_k(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)})$$

$(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$ sind offenbar stetig. Also sind

$$g_n(\Theta, \chi) = \lim_{k\to\infty} f_{kn}(\Theta, \chi) = \sup_{\frac{1}{n+1} \leqq \tau \leqq \frac{1}{n}} v(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)})$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$, und damit auch

$$\limsup_{n\to\infty} g_n(\Theta, \chi) = \limsup_{\tau\to 0} v(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}),$$

messbar. Analog ergibt sich die Messbarkeit von

$$\liminf_{\tau\to 0} v(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}).$$

Unter Beiziehung des obigen Satzes schliessen wir, dass auch $V(\Theta)$ messbar ist. Aus (3) folgt, dass κ messbar und, da beschränkt, summierbar ist.

Um unnötige Längen zu vermeiden, beziehen wir uns im Folgenden wiederholt auf den Littlewoodschen Artikel [1]. In dieser Note und in [1] gleichzeitig auftretende Bezeichnungen besitzen

[3]) Es ist andrerseits klar, dass die Tsjujische Aussage den obigen Satz nicht impliziert.

[4]) Die Funktionen $v_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ sind i.A. nicht im ganzen Bereich $|z| < 1$ definierbar, sondern nur in Teilgebieten $|z| < r_k < 1$, wobei allerdings angenommen werden darf, dass $r_k \to 1$ für $k \to \infty$. Bei vorgegebenem (Θ, χ) ist also f_{kn} nur für genügend grosse k und n definiert. Dies tut der nachstehenden Schlussweise aber keinen Abbruch.

dieselbe Bedeutung. Insbesondere soll unter dem Symbol A eine positive Konstante verstanden werden, deren Grösse von Formel zu Formel variieren darf.

Wir übernehmen aus [1] den folgenden Darstellungssatz: Die (superharmonische) Funktion $w = -v$ zerfällt in eine Summe

$$w = u^* + v^*. \tag{4}$$

Dabei ist u^* harmonisch in $|z| < 1$ und erfüllt

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |u^*(re^{i\Theta})|\, d\Theta = O(1) \qquad (r \to 1). \tag{5}$$

Ferner gilt

$$w^*(P) = \iint g(P, Q) d\mu(Q), \tag{6}$$

wobei μ die v zugeordnete (in [1] mit F bezeichnete) Massenbelegung bedeutet.

Bekanntlich (vgl. R. Nevanlinna [2, pp. 190—193]) besitzt u^* für fast alle Werte von Θ Winkelgrenzwerte. Diese bezeichnen wir mit $V(\Theta)$. Wir haben noch Folgendes zu beweisen:

Lemma.[5]) *Für jede Wahl von* $\chi(|\chi| < \pi/2)$ *ist Folgendes erfüllt*:

$$\lim_{\tau \to 0} w^*(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}) = 0 \tag{7}$$

für fast alle Werte von $\Theta(-\pi \leqq \Theta \leqq +\pi)$.

Sie nun χ gewählt und fest. Littlewood beschreibt in seiner Abschätzung den Punkt $re^{i\Theta}$ (bzw. $\rho e^{i\Phi}$) durch (s, Θ) (bzw. (σ, Φ)), wobei $s = 1 - r$ (bzw. $\sigma = 1 - \rho$). Wir finden es zweckmässig, die Koordinaten

$$s_0 = \cos\chi - \sqrt{\cos^2\chi - 2s + s^2} \tag{8}$$

und

$$\Theta_0 = \Theta + \operatorname{arc\,tg} \frac{s_0 \sin\chi}{1 - s_0 \cos\chi} \tag{9}$$

einzuführen. Dann ist

$$(1 - s)e^{i\Theta} = e^{i\Theta_0} - s_0 e^{i(\Theta_0+\chi)} \tag{10}$$

und — bei entsprechender Definition von σ_0 und Φ_0 —

$$(1 - \sigma)e^{i\Phi} = e^{i\Phi_0} - \sigma_0 e^{i(\Phi_0+\chi)}. \tag{11}$$

Die geometrische Deutung der soeben definierten Grössen ist aus (10) und (11) leicht ersichtlich. Sie sind stets reell, falls wir verlangen, dass

[5]) Verallgemeinert Lemma 4 in [1].

(12) $$R \leqq r,\ \rho \leqq 1, \quad \text{wobei} \quad R > \frac{1 + \sin|\chi|}{2}.$$

Offenbar gilt dann

(13) $$s_0 \geqq s \quad \text{und} \quad \sigma_0 \geqq \sigma.$$

Ferner behaupten wir, dass

(14) $$(\Theta_0 - \Phi_0)^2 + (s_0 - \sigma_0)^2 \leqq A[(\Theta - \Phi)^2 + (s - \sigma)^2].$$

In der Tat findet man unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$|s_0 - \sigma_0| = |s - \sigma| \left|\frac{ds_0(s^*)}{ds}\right| \leqq \frac{|s - \sigma|}{\sqrt{R^2 + \cos^2\chi - 1}}$$

$(0 \leqq s^* \leqq 1 - R)$ und

$$|\Theta_0 - \Phi_0| \leqq |\Theta - \Phi| + |s - \sigma| \left|\frac{d}{ds} \operatorname{arc\,tg} \frac{s_0(s)\sin\chi}{1 - s_0(s)\cos\chi}\right|_{s = \tilde{s}}$$

$$\leqq |\Theta - \Phi| + \frac{|s - \sigma| \sin|\chi|}{R\sqrt{R^2 + \cos^2\chi - 1}}$$

$(0 \leqq \tilde{s} \leqq 1 - R)$,

woraus sich (14) sofort ergibt. Indem wir (13) und (14) mit (2.2) und (2.3) in [1] kombinieren, erhalten wir die unter der Einschränkung (12) gültigen Ungleichungen

(15) $$0 \leqq g(P, Q) \leqq \frac{A s_0 \sigma_0}{(s_0 - \sigma_0)^2 + (\Theta_0 - \Phi_0)^2} \quad \text{und}$$

(16) $$0 \leqq g(P, Q) \leqq \log\left(1 + \frac{A s_0 \sigma_0}{(s_0 - \sigma_0)^2 + (\Theta_0 - \Phi_0)^2}\right).$$

Da — wie man leicht verifiziert — stets $\sigma_0 \leqq \sigma/\cos\chi$ ist, schliessen wir aus (6.5) in [1], dass

(17) $$\iint \sigma_0 \, d\mu(Q) < +\infty.$$

Nach diesen Vorbereitungen folgen wir dem Littlewoodschen Beweis von Lemma 4 in [1]: Sei

$$\varepsilon(R) = \iint_{\rho > R} \sigma_0 \, d\mu(Q), \quad \text{wobei} \quad R > \frac{1 + \sin|\chi|}{2}.$$

Es ist $\lim_{R \to 1} \varepsilon(R) = 0$. Wir definieren $\eta(R) = \sqrt{\varepsilon(R)}$. Es wird gezeigt werden, dass

$$\limsup_{\tau\to 0} \iint\limits_{\rho>R} g(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}, Q)d\mu(Q) \leqq A\eta(R) \tag{18}$$

für alle einer Menge $E(R)$ vom Mass $\geqq 2\pi - \eta(R)$ angehörenden Werte von Θ. Da gleichmässig in Θ

$$\limsup_{\tau\to 0} \iint\limits_{\rho\leqq R} g(e^{i\Theta} - \tau e^{i(\Theta+\chi)}, Q)d\mu(Q) = 0,$$

können wir dann schliessen, dass (18) gültig bleibt, falls das Integral über das ganze Innere des Einheitskreises erstreckt wird. Nun lassen wir $R \to 1$ streben. Dann folgt (7) aus (6) und (18).

Es bezeichne $M(\Theta)$ den Wert des über die Menge $[-\pi \leqq \Phi_0 \leqq \leqq \Theta] \cap [R < \rho < 1]$ erstreckten Integrals $\iint \sigma_0\, d\mu(Q)$ $(-\pi \leqq \leqq \Theta \leqq +\pi)$. $M(\Theta)$ ist eine monoton wachsende Funktion, also fast überall differenzierbar. Ferner gilt [6])

$$0 \leqq M'(\Theta) \leqq 2\eta(R) \tag{20}$$

auf einer Menge $E(R)$ vom Mass $\geqq 2\pi - \eta(R)$. Es soll nun bewiesen werden, dass (18) für alle $\Theta \,\varepsilon\, E(R)$ befriedigt ist.

Ohne Verlust an Allgemeinheit dürfen wir $\Theta = 0$ setzen. Unter $K(t)$ soll das über die Menge $[0 \leqq \Phi_0 \leqq t] \cap [R < \rho < 1]$ erstreckte Integral $\iint \sigma_0\, d\mu(Q)$ verstanden werden. Sei $K^*(t) = = K(t) + K(-t)$. Aus (20) folgt

$$\limsup_{t\to 0} \frac{K^*(t)}{t} \leqq 4\eta(R). \tag{21}$$

Sei nun

$$S(\tau) = \iint\limits_{\rho>R} g(1 - \tau e^{i\chi}, Q)\, d\mu(Q) = S_1 + S_2 + S_3,$$

wobei S_1, S_2, S_3 der Reihe nach die Teilintegrale über

$$B_1 = [R < \rho < 1] \cap [\tau \leqq |\Phi_0| \leqq \pi],$$

$$B_2 = [R < \rho < 1] \cap [|\Phi_0| < \tau] \cap \left[|\sigma_0 - \tau| \geqq \frac{\tau}{2}\right],$$

$$B_3 = [R < \rho < 1] \cap [|\Phi_0| < \tau] \cap \left[|\sigma_0 - \tau| \leqq \frac{\tau}{2}\right]$$

darstellen.

Nach (15) $(\Theta_0 = 0,\ s_0 = \tau)$ ist $g \leqq A\ \sigma_0\tau/\Phi_0^2$ in B_1. Also gilt

[6]) Für eine detaillierte Begründung sei der Leser auf den Beweis von Lemma 4 in [1] verwiesen.

$$S_1 \leqq A\tau \iint\limits_{B_1} \Phi_0^{-2} \sigma_0 \, d\mu(Q) = A\tau \int_\tau^\pi \Phi_0^{-2} dK^*(\Phi_0),$$

woraus unter Benützung von (21) und Lemma 1 in [1] folgt, dass

$$\limsup_{\tau \to 0} S_1 \leqq A\eta(R). \tag{22}$$

In B_2 ist $g \leqq \dfrac{A\sigma_0 \tau}{\tau^2 + \Phi_0^2}$. Daraus ergibt sich

$$S_2 \leqq A\tau \iint\limits_{B_2} \frac{\sigma_0 \, d\mu(Q)}{\tau^2 + \Phi_0^2} \leqq A\tau \int_0^\tau \frac{dK^*(\Phi_0)}{\tau^2 + \Phi_0^2}$$

und, unter Anwendung von (21) und Lemma 1 in [1],

$$\limsup_{\tau \to 0} S_2 \leqq A\eta(R). \tag{23}$$

Für B_3 liefert (16) die Ungleichung

$$g \leqq \log\left(\frac{A\sigma_0 \tau}{\Phi_0^2}\right) \leqq \frac{2\sigma_0}{\tau} \log\left(\frac{A\tau^2}{\Phi_0^2}\right),$$

woraus man

$$S_3 \leqq \frac{2}{\tau} \iint\limits_{B_3} \log\left(\frac{A\tau^2}{\Phi_0^2}\right) \sigma_0 \, d\mu(Q) \leqq \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \log\left(\frac{A\tau^2}{\Phi_0^2}\right) dK^*(\Phi_0)$$

und schliesslich

$$\limsup_{\tau \to 0} S_3 \leqq A\eta(R) \tag{24}$$

erhält. (18) folgt aus (22), (23) und (24). Damit ist alles bewiesen.

(Oblatum 14-1-57)

J. E. LITTLEWOOD,

[1] *On functions subharmonic in a circle* (II), Proc. London Math. Soc., series 2, 28 (1928) 383—394.

R. NEVANLINNA:

[2] *Eindeutige analytische Funktionen*, Springer, Berlin 1936.

M. TSUJI,

[3] *Littlewood's theorem on subharmonic functions in a unit circle*, Comment. Math. Univ. St. Paul. 5 (1956) 3—16.