COMPOSITIO MATHEMATICA

IVAN PAASCHE

Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 263-270
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__263_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1954-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes[1]

von

Ivan Paasche

München

Ausgehend von der natürlichen Folge 1, 2, 3, ... betrachten wir das sogleich näher zu erläuternde Streichungs- und Summationsschema

$$
(1)\qquad
\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|l}
\mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{6} & 7 & 8 & 9 & \mathbf{10} & 11\ldots. \\
 & \mathbf{2} & & 6 & \mathbf{11} & & 18 & 26 & \mathbf{35} & & 46\ldots \\
 & & & \mathbf{6} & & & 24 & \mathbf{50} & & & 96\,.. \\
 & & & & & & \mathbf{24} & & & & 120\,. \\
 & & & & & & & & & & \mathbf{120}
\end{array}
$$

und stellen uns die Frage, wie groß bei gegebenen Abschnittslängen[2] der natürlichen Ausgangsfolge die Zahl sein wird, die an einer bestimmten späteren Stelle des Schemas steht. Insbesondere interessieren wir uns für die durch das Schema „erzeugten" untersten Zahlen 1 2 6 24 120 ... der entstehenden Halbmatrizen. Dabei wurde das Schema (1) nach folgender Vorschrift hergestellt, die auch nach rechts hin beliebig weit gelten soll:

a. Die Länge der Abschnitte wächst nach rechts stets um 1.
b. Jede Zeile λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) ist die Summenfolge der vorangehenden Zeile $\lambda - 1$, mit der Einschränkung, daß in Zeile $\lambda - 1$ vor der Summation die letzte (fettgedruckte) Zahl jedes Abschnitts zu streichen ist.

Allgemeiner können wir in ganz ähnlicher Weise wie oben sagen: Bestehen zwischen den Elementen $A_{n\nu}^{\lambda}$ von höchstens abzählbar vielen Halbmatrizen

$$
(2)\qquad
\begin{array}{llllllll}
A_{11}^{0}\cdot\cdot A_{1,1+K_1}^{0} & A_{21}^{0}\cdots A_{2,1+K_2}^{0} & \cdots & A_{n1}^{0}\cdots A_{n,1+K_n}^{0} & \cdots \\
\vdots\ \ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots\ \ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots\ \ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
A_{11}^{K_1} & A_{21}^{K_2} & & A_{n1}^{K_n} &
\end{array}
$$

---

[1] Vgl. das Literaturverzeichnis [1] ... [6] am Ende des Aufsatzes, S. 270.

[2] Wir deuten die Abschnitte durch senkrechte Striche an.

mit

$$K_1 \leqq K_2 \leqq \ldots \leqq K_n \leqq \ldots$$

die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} (3) & A^{\lambda}_{n,\nu+1} = A^{\lambda}_{n\nu} \qquad + A^{\lambda-1}_{n,\nu+1} & \\ (4) & A^{\lambda}_{n+1,1} = A^{\lambda}_{n,1-\lambda+K_n} + A^{\lambda-1}_{n+1,1} & \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \ldots \\ \lambda,\ \nu = 1, 2, \ldots, K_n \\ \lambda + \nu \leqq 1 + K_n \end{array}\right), \\ (5) & A^{0}_{n\nu} = A_{n\nu}\ ^{3)} \qquad A^{\lambda}_{11} = A^{0}_{11} & \end{array}$$

so bedeutet (3) im Verein mit den Anfangswerten (5), daß jede Zeile λ des Schemas (2) die Summenfolge der vorangehenden Zeile $\lambda - 1$ ist, mit der Einschränkung (4), daß in Zeile $\lambda - 1$ vor der Summation die letzte Zahl jedes Abschnitts zu streichen ist. Die gestrichenen Zahlen bilden also schließlich die maximale Schräge $A^{K_n}_{n1} \ldots A^{0}_{n,1+K_n}$ jeder Halbmatrix. Bei vorgegebener Ausgangsfolge $(A_{n\nu})$ sind die $A^{\lambda}_{n\nu}$, d.h. sämtliche Zahlen des Schemas (2), durch die Formeln (3) (4) (5) eindeutig rekurrent festgelegt. Dabei wird offenbar jedes $A^{\lambda}_{n\nu}$ eine Linearverbindung der durch (5) gegebenen höchstens abzählbar vielen Zahlen $A_{11}\ A_{12} \ldots A_{n\nu} \ldots$, in der alle späteren Elemente als $A_{n\nu}$ den Koeffizienten Null erhalten. Es handelt sich also im folgenden um die Bestimmung der nichtverschwindenden Koeffizienten dieser Linearverbindung.

Indem wir bemerken, daß durch $\lambda + \nu = c = \text{const.}$ die einzelnen Schrägzeilen des Abschnitts n charakterisiert werden, behaupten wir die Gültigkeit von

Satz 1: *Die Zahlen*

$$A^{0}_{nc}\ A^{1}_{n,c-1} \ldots A^{c-1}_{n1}$$

stimmen bzw. überein mit den c Anfangskoeffizienten

$$B^{0}_{nc}\ B^{1}_{n,c-1} \ldots B^{c-1}_{n1}$$

der Nullpunktsentwicklung der erzeugenden rationalen Funktion

$$(6) \qquad F_{nc}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n,c-\mu} z^{\mu} \qquad (c = 1, 2, \ldots, 1 + K_n),$$

die durch die absteigende Rekursion

$$(7) \qquad F_{nc}(z) = \frac{F_{n,c+1}(z) - B^{0}_{n,c+1} + B^{0}_{nc}}{1 + z} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{alle } B^{0}_{n\nu} = A^{0}_{n\nu} \\ c = K_n, \ldots, 1 \end{array}\right)$$

definiert ist; der Rekursionsbeginn $F_{n,1+K_n}(z)$ *ist dabei aus*

---

[3]) Auf $\nu = 1 + K_n$ kommt es offenbar nicht an, da das betreffende Element gestrichen wird.

$$(8)\quad \frac{F_{n,1+K_n}(z)-B^0_{n,1+K_n}}{z}=\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{K_n} a_\mu z^\mu - B^0_{n,1+K_n}}{z}\qquad \begin{pmatrix} a_0 = B^0_{n,1+K_n} \\ K_\tau = k_1+\dots+k_\tau \\ \tau = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{n}\left[\left(\prod_{\varrho=0}^{\sigma-1}(1+\varrho z)^{k_{n+1-\varrho}}\right)\sum_{\varkappa=1}^{K_{n+1-\sigma}} B^0_{n+1-\sigma,\varkappa}(1+\overline{\sigma-1}\,z)^{\varkappa-1}(1+\sigma z)^{-\varkappa+K_{n+1-\sigma}}\right]$$

zu entnehmen. [4])

Die Funktion F in (8) ist offenbar eine ganze rationale Funktion von z. Ihr Grad ist K_n und ihre $1+K_n$ Koeffizienten

$$B^{K_n}_{n1}\dots B^0_{n,1+K_n}$$

bilden, so wird behauptet, die maximale Schräge

$$A^{K_n}_{n1}\dots A^0_{n,1+K_n}$$

der n-ten Halbmatrix in (2). Die unterste Zahl $A^{K_n}_{n1}$ jeder Halbmatrix, für die wir uns ja besonders interessieren wollten, ist nach Satz 1 der Koeffizient der höchsten Potenz in (8); indem wir nach (7)

$$B^0_{n+1-\sigma,\varkappa}=A^0_{n+1-\sigma,\varkappa}$$

setzen, gilt daher

$$(9)\quad A^{K_n}_{n1}=B^{K_n}_{n1}=\sum_{\sigma=1}^{n}\left[\left(\prod_{\varrho=1}^{\sigma-1}\varrho^{k_{n+1-\varrho}}\right)\sum_{\varkappa=1}^{K_{n+1-\sigma}} A_{n+1-\sigma,\varkappa}(\sigma-1)^{\varkappa-1}\sigma^{-\varkappa+K_{n+1-\sigma}}\right]$$

mit $\prod\limits_{\varrho=1}^{0}=1$ im ersten Summanden ($\sigma=1$).

Wir betrachten zunächst 3 Spezialfälle und geben, wieder unter Annahme der Gültigkeit von Satz 1, jedesmal die zugehörige Spezialisierung der Formeln (8) und (9) an, die man unmittelbar verifiziert. Außer im Falle I, wo die Ausdrücke recht unübersichtlich werden, fügen wir auch noch die spezielle Funktion (6) bei, aus der sich sofort der Koeffizient $A^\lambda_{n\nu}$ von z^λ ablesen läßt:

I. $K_1=\dots=K_n=K$ d.h. $k_2=\dots=k_n=0$:

$$(8')\quad F_{n,1+K}(z)=B^0_{n,1+K}+z\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{K}B^0_{n+1-\sigma,\varkappa}(1+\overline{\sigma-1}\,z)^{\varkappa-1}(1+\sigma z)^{K-\varkappa}$$

$$(9')\qquad A^K_{n1}=\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{K}A_{n+1-\sigma,\varkappa}(\sigma-1)^{\varkappa-1}\sigma^{K-\varkappa}.$$

Dies ist die Saliésche Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes. [5])

---

[4]) Die Ueberstreichung in $\overline{\sigma-1}$ soll lediglich eine Klammer sparen, bedeutet also *nicht* den Uebergang zum Konjugiertkomplexen.

[5]) Vgl. Lit. [3].

II. Alle $A^0_{..} = 1$:

$$(6'') \qquad F_{nc}(z) = (1+z)^{c-1-K_n} \prod_{\varrho=1}^{n} (1+\varrho z)^{k_{n+1-\varrho}} \qquad (c = \lambda + \nu)$$

$$A^\lambda_{n\nu} = \sum_{\substack{\tau_1,\ldots,\tau_n=0\\ \tau_1+\ldots+\tau_n=\lambda}}^{\lambda} \binom{\lambda+\nu-1-K_{n-1}}{\tau_1} \cdot \binom{k_{n-1}}{\tau_2} 2^{\tau_2} \ldots \binom{k_1}{\tau_n} n^{\tau_n}$$

$$(8'') \qquad F_{n,1+K_n}(z) = \prod_{\varrho=1}^{n} (1+\varrho z)^{k_{n+1-\varrho}}$$

$$(9'') \qquad A^{K_n}_{n1} = \prod_{\varrho=1}^{n} \varrho^{k_{n+1-\varrho}} = 1^{k_n}\, 2^{k_{n-1}} \ldots n^{k_1}.$$

Setzt man hierin $k_1 = \ldots = k_n = 1$, so kommt $A^n_{n1} = n!$, also gerade das Beispiel (1), das man ja auch eine Zeile früher mit der Einheitsfolge 1, 1, 1, ... hätte beginnen können. Will man jedoch das Schema (1) selbst ohne diese neue Zeile haben, so setze man in (7) (8) $A^0_{n\nu} = \dfrac{n^2 - n}{2} + \nu$ und $k_1 = 0$, $k_2 = \ldots = k_n = 1$.

III. $K_1 = \ldots = K_n = K$ *und* alle $A^0_{..} = 1$, d.h. eine Verschmelzung der Fälle I und II:

$$(6''') \qquad F_{nc}(z) = (1+z)^{c-1-K}(1+nz)^K \qquad (c = \lambda + \nu)$$

$$A^\lambda_{n\nu} = \sum_{\tau=0}^{\lambda} \binom{\nu+\lambda-1-K}{\tau}\binom{K}{\lambda-\tau} n^{\lambda-\tau}$$

$$(8''') \qquad F_{n,1+K}(z) = (1+nz)^K$$

$$(9''') \qquad A^K_{n1} = n^K \qquad \text{(Satz von Moessner).}$$

Um Satz 1 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die durch (6) (7) (8) definierten B den gleichen Rekursionsformeln (3) (4) (5) gehorchen wie die entsprechenden A, d.h. daß

$$(3^*) \qquad B^\lambda_{n,\nu+1} = B^\lambda_{n\nu} + B^{\lambda-1}_{n,\nu+1}$$

$$(4^*) \qquad B^\lambda_{n+1,1} = B^\lambda_{n,1-\lambda+K_n} + B^{\lambda-1}_{n+1,1}$$

$$(5^*) \qquad B^0_{n\nu} = A_{n\nu} \qquad B^\lambda_{11} = B^0_{11}$$

für die in (3) (4) (5) angegebenen Indexsysteme n, ν, λ ist. Da jedoch bis auf die Funktion F in (8) alle Funktionen $F(z)$ von Satz 1 unendliche Reihen in z sind, gibt es in Wahrheit sehr viel mehr Koeffizienten B als Zahlen A des Schemas (2), und wir werden beweisen, daß sogar *alle* Koeffizienten B aus Satz 1 den Formeln (3*) (4*) genügen. M.a.W.: (3*) und (4*) gelten für

$$n = 1, 2, \ldots$$
$$\lambda = 1, \ldots, K_n$$
$$\nu = K_n, \ldots, 1, 0, -1, -2, \ldots.$$

Die erste Formel (5*) ist nach dem Zusatz in (7) trivial. Um die zweite Formel (5*) zu beweisen, setzen wir in (6) $n = 1$ und $c = \lambda + 1$ und berechnen, von (8) mit $n = 1$ ausgehend, nacheinander für $c = K_1, \ldots, 2, 1$ alle Funktionen (7); auf diese Weise finden wir

$$(10)\qquad \begin{aligned} F_{1,\lambda+1}(z) &= B^0_{1,\lambda+1} + z \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} B^0_{1\varkappa}(1+z)^{\lambda-\varkappa} \quad (\lambda+1 = K_1, \ldots, 2) \\ F_{11}(z) &= B^0_{11}, \end{aligned}$$

also lauter ganze rationale Funktionen mit dem höchsten Koeffizienten B^0_{11}. Nach (6) ist andererseits, unter Beachtung des soeben gefundenen endlichen Grades λ,

$$F_{1,\lambda+1}(z) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} B^{\mu}_{1,\lambda+1-\mu} z^{\mu} \quad (\lambda + 1 = K_1, \ldots, 1).$$

Der Vergleich mit (10) lehrt $B^{\lambda}_{11} = B^0_{11}$, also gerade die zweite Formel (5*).

Um (3*) zu beweisen, setzen wir (6) für $c + 1$ statt c und (6) selbst in (7) ein. Das liefert nach beiderseitiger Multiplikation mit $1 + z$

$$(1 + z) \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n,c-\mu} z^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{\mu}_{n,c+1-\mu} z^{\mu} - B^0_{n,c+1} + B^0_{nc}.$$

Multipliziert man links aus und setzt sodann beiderseits die Koeffizienten von z^{λ} einander gleich, so kommt

$$B^{\lambda}_{n,c-\lambda} + B^{\lambda-1}_{n,c+1-\lambda} = B^{\lambda}_{n,c+1-\lambda},$$

d.i. nach der Substitution $c - \lambda = \nu$ gerade Formel (3*).

Um schließlich die Gültigkeit von (4*) zu erkennen, beweisen wir zuvor den folgenden

Hilfssatz: Zwischen den Koeffizienten α_{μ} *der Potenzreihe*

$$(11)\qquad f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu} z^{\mu}$$

und den von der beliebigen Zahl q abhängigen Koeffizienten

$$(12)\qquad \beta_{\mu} = \beta_{\mu}(q)$$

der Potenzreihe

$$(13)\qquad (1 + \zeta)^q f\left(\frac{\zeta}{1 + \zeta}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_{\mu} \zeta^{\mu}$$

besteht der Zusammenhang

$$\beta_\lambda(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \alpha_\mu \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Beweis: Setzt man (11) für $z = \frac{\zeta}{1+\zeta}$ in (13) für $q = \lambda$ ein, so ergibt die linke Seite von (13)

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda} (1+\zeta)^{\lambda-\mu} \alpha_\mu \zeta^\mu + \zeta^\lambda \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\lambda+\mu} \left(\frac{\zeta}{1+\zeta}\right)^\mu. \tag{15}$$

Für die Potenz ζ^λ der rechten Seite von (13) liefert nur die endliche Summe in (15) einen Beitrag, nämlich $(\alpha_0 + \ldots + \alpha_\lambda)\zeta^\lambda$. Nach (12) ist dieses Glied aber gleich dem Glied $\beta_\lambda(\lambda)\zeta^\lambda$ der rechten Seite von (13), womit (14) bewiesen ist.

(4*) beweisen wir nunmehr wie folgt: Für $n+1$ statt n ergibt sich aus (7) durch eine hinreichende Anzahl von Rekursionsschritten

$$\begin{aligned} &F_{n+1,c}(z) \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu(c-1) z^\mu \\ &= \frac{F_{n+1,1+K_{n+1}}(z)}{(1+z)^{1-c+K_{n+1}}} - \frac{B^0_{n+1,1+K_{n+1}} - B^0_{n+1,K_{n+1}}}{(1+z)^{1-c+K_{n+1}}} - \cdots - \frac{B^0_{n+1,c+1} - B^0_{n+1,c}}{(1+z)^1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Der Anfang $F_{n+1,1+K_{n+1}}(z)$ dieser Rekursion folgt aus (8) für $n+1$ statt n, was sich nach Division durch $(1+z)^{-1+K_{n+1}}$

$$\frac{F_{n+1,1+K_{n+1}}(z) - B^0_{n+1,1+K_{n+1}}}{z(1+z)^{-1+K_{n+1}}} \equiv \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu z^\mu - B^0_{n+1,1+K_{n+1}}}{z(1+z)^{-1+K_{n+1}}} \ {}^{6)} \tag{17}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{n} \left[\left(\prod_{\varrho=0}^{\sigma-1} \left(1 + \frac{\varrho z}{1+z}\right)^{k_{n+1-\varrho}} \right) \sum_{\varkappa=1}^{K_{n+1-\sigma}} B^0_{n+1-\sigma,\varkappa} \left(1 + \frac{\sigma-1}{1+z} z\right)^{\varkappa-1} \left(1 + \frac{\sigma}{1+z} z\right)^{-\varkappa+K_{n+1-\sigma}} \right] \left(\prod_{\varrho=0}^{-1}\right.$$

schreibt. Der Vergleich von (17) mit (8) zeigt, daß auf der rechten Seite das neue Argument $\frac{z}{1+z}$ statt z erscheint, so daß zwischen (16) und (8) der obige Hilfssatz über Potenzreihen in Kraft tritt. Wie nämlich eine kurze elementare Rechnung lehrt, stört der in (17) hinzugekommene Summand ($\sigma = 0$) nicht, da die Elemente $B^0_{n+1,\varkappa}$ aus (17) gemäß (16) kompensiert werden. Im Gegensatz zu (14) ist hier im allgemeinen $b_0(0) \neq a_0$, nämlich $B^0_{n+1,1} \neq B^0_{n,1+K_n}$, so daß (14) in der modifizierten Gestalt

[6]) Die hierdurch definierten Koeffizienten d_μ sind nach (8) Linearkombinationen gewisser B^0

$$(18) \qquad b_\lambda(\lambda) - B^0_{n+1,1} = \sum_{\mu=0} a_\mu - B^0_{n,1+K_n}$$

gilt. Da nun aber die Zahlen a_λ und $b_\lambda(\lambda)$ in [7])

$$\begin{array}{r|l} a_0 & b_0(0) \\ a_1 & b_1(1) \\ a_2 & b_2(2) \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \end{array}$$

gemäß den definierenden Formeln (6) (8) (16) identisch sind mit den Zahlen

$$\begin{array}{r|l} B^0_{n,1+K_n} & B^0_{n+1,1} \\ B^1_{nK_n} & B^1_{n+1,1} \\ B^2_{n,-1+K_n} & B^2_{n+1,1} \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \end{array}$$

ist durch (18) die Formel (4*) bereits bewiesen: Man subtrahiere nur von (18) die analoge Formel für $\lambda - 1$ statt λ; dann kommt

$$b_\lambda(\lambda) - b_{\lambda-1}(\lambda - 1) = a_\lambda,$$

also

$$B^\lambda_{n+1,1} - B^{\lambda-1}_{n+1,1} = B^\lambda_{n,1-\lambda+K_n}.$$

Das ist aber gerade Formel (4*), qed.

Der Beweis von Satz 1 ließe sich allenfalls auch ohne den Hilfssatz führen, und zwar wie folgt: Schreibt man (16) für $c = \lambda + 1$ an und vergleicht die Koeffizienten von z^λ, so ergibt das

$$(19) \qquad B^\lambda_{n+1,1} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} d_\mu \binom{\lambda - K_{n+1}}{\lambda - \mu} - \sum_{\mu=1}^{-\lambda+K_{n+1}} B^0_{n+1,\lambda+\mu} \binom{-\mu}{\lambda - 1},$$

wo die d_μ gemäß (17) die Koeffizienten von $F_{n+1,1+K_{n+1}}(z)$ sind. Zieht man nun von (19) die analoge Formel für $\lambda - 1$ statt λ ab, so kommt

$$(20) \quad B^\lambda_{n+1,1} - B^{\lambda-1}_{n+1,1} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} d_\mu \binom{\lambda - 1 - K_{n+1}}{\lambda - \mu} - \sum_{\mu=0}^{-\lambda+K_{n+1}} B^0_{n+1,\lambda+\mu} \binom{-\mu - 1}{\lambda - 1},$$

und es wird behauptet, daß hierin die rechte Seite gleich $B^\lambda_{n,1-\lambda+K_n}$, d.h. gleich dem Koeffizienten a_λ von z^λ in (8) ist. Offenbar genügt es, den Beitrag von $B^0_{n+1-\sigma,\varkappa}$ zu dieser Behauptung (4*) zu betrachten. Das liefert den

[7]) Wir schreiben — vorgreifend — in gleicher Anordnung wie in (2).

Satz 2: Der Koeffizient von $z^{\lambda-1}$ *in*

$$(1+\overline{\sigma-1}\,z)^{\varkappa-1}(1+\sigma z)^{-\varkappa+K_{n+1-\sigma}}\prod^{\sigma-1}(1+\varrho z)^{k_{n+1-\varrho}} \qquad \left(\prod_{\varrho=0}^{-1}=1\right)$$

ist gleich dem Koeffizienten von $B^0_{n+1-\sigma,\varkappa}$ *in der rechten Seite von* (20).

Da dieser Satz für sich jedoch wesentlich umständlicher zu beweisen sein dürfte als der Hilfssatz, wollen wir den skizzierten zweiten Beweis von (4*) nicht weiter verfolgen, sondern umgekehrt Satz 2 als durch den Hilfssatz mitbewiesen ansehen.

LITERATUR

In den Sitzgsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., sämtlich vorgelegt von

O. Perron

A. Moessner
[1] 1951 Nr. 3 S. 29,

O. Perron
[2] 1951 Nr. 4 S. 31—34,

H. Salié
[3] 1952 Nr. 2 S. 7—11,

I. Paasche
[4] 1952 Nr. 1 S. 1—5.

Ferner

I. Paasche
[5] 1953 in Der math. u. natw. Unterr. VI S. 26—28 u. 142,

I. Paasche
[6] 1955 in Arch. d. Math. VI S. 194—199.

(Oblatum 5-10-54).