COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS SCHWERDTFEGER

Über mehrdeutige Matrixfunktionen

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 380-390
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__380_0>

Über mehrdeutige Matrixfunktionen

von

Hans Schwerdtfeger

Göttingen

---

1. Fragen des reinen Matrizenkalküls und seiner Anwendungen einerseits, und das Bestreben, gewisse allgemeine Eigenschaften von Funktionen $f(z)$ und von Matrizen A systematisch zu charakterisieren andererseits, führen dazu, für gewisse Klassen von quadratischen Matrizen A die Zuordnung von $f(A)$ zu A genauer zu untersuchen. Was den Matrizenkalkül angeht, ist es vor allem das Problem der Matrixgleichungen [1]), das eine präzise Fassung des Begriffs der Matrixfunktion voraussetzt; und schon mit Rücksicht auf den einfachsten Fall, die Gleichung $X^2 = A$, ist klar, daß es hier gerade die mehrdeutigen Funktionen $f(z)$ sind, auf die es besonders ankommt.

Ein typisches Beispiel für den an zweiter Stelle genannten Anlaß zum Studium der Matrixfunktionen bietet die Arbeit von K. Löwner [2]), in der auf Grund einer Ordnungsrelation im Bereich der reellen symmetrischen Matrizen A eine Einteilung der monotonen Funktionen einer reellen Variablen x in abzählbar viele Stufen gewonnen wird. (Die Funktion $f(x)$ heißt „von n-ter Stufe monoton", wenn die Matrixfunktion $f(A)$ im Bereich der n-reihigen symmetrischen Matricen A monoton ist.) Die einzelnen Stufen, deren jede alle folgenden umfaßt, lassen sich, wie Löwner zeigt, auch durch gewisse übersichtlich gebaute Ungleichungen charakterisieren.

Hier handelt es sich um ganz andersartige Eigenschaften analytischer Funktionen $f(z)$, nämlich solche, die bei der Bildung der Matrix $f(A)$ für eine beliebige, feste, n-reihige quadratische Matrix A zutagetreten. Eine sinngemäße Einteilung der Werte

---

1) Vgl. den Bericht von C. C. Mac Duffee, The Theory of Matrices [Ergebnisse 2 (1933), 5], Kap. VIII, sowie die dort zitierten Arbeiten. Außerdem A. Herrmann [Compositio 1 (1934), 284—302].

2) K. Löwner [Math. Z. 38 (1934), 177—216].

$f(A)$ einer mehrdeutigen Funktion $f(z)$ für eine quadratische Matrix A führt, wie sich im folgenden zeigt, zu einer Relation zwischen der Funktion $f(z)$ und gewissen Untergruppen der Gruppe G aller regulären, mit A vertauschbaren Matrizen T.

Die Voraussetzung, daß $f(z)$ analytisch ist, wird im folgenden nur insofern von Bedeutung sein, als sie zur expliziten Bildung der Matrix $f(A)$ notwendig ist. Hat A reelle Wurzeln, so kann man die Forderung der Analytizität durch gewisse Differenzierbarkeitsforderungen ersetzen; und sind alle Pole der Resolvente $(\lambda E - A)^{-1}$ einfach, so braucht man von $f(z)$ nur vorauszusetzen, daß sie in den Wurzeln α_j definiert ist.[2a])

2. Sei A eine beliebige quadratische n-reihige Matrix aus komplexen Zahlen, $n \geqq 2$. Wie bei vielen Gelegenheiten und in mancherlei Form ausgeführt worden ist[3]), kann man der Matrix A, deren Wurzeln die m untereinander verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sein mögen, in sinnvoller Weise eine andere Matrix $f(A)$ zuordnen, wenn $f(z)$ eine analytische Funktion ist, in deren Regularitätsgebiet Γ die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ liegen. Ist $f(z)$ eindeutig, so sind alle prinzipiellen Fragen, die sich an diese Zuordnung als solche anschließen, geklärt. Nicht so, falls $f(z)$ eine mehrdeutige Funktion ist; die Fragen, welche sich hier stellen lassen, sind wohl zum ersten Male in der Abhandlung von M. Cipolla[4]) behandelt worden.

Ist $f(z)$ eindeutig und kann man die Matrix $f(A)$ überhaupt bilden, so gibt es für diese den eindeutig bestimmten Ausdruck[5])

$$(*) \qquad f(A) = \sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha_j)(A - \alpha_j E)^{\nu}.$$

Hier sind $A_1, \ldots, A_m$ die Frobeniusschen Kovarianten der Matrix A, und n_j der Rang von A_j, d.i. die Multiplizität der zugehörigen Wurzel α_j von A. Auch wenn $f(z)$ mehrdeutig ist, liefert die Gleichung (*) einen richtigen Ausdruck für $f(A)$; jedoch kann man, wie die Untersuchungen von Cipolla zeigen, leicht Fälle konstruieren, in denen es noch mehr „Werte" für $f(A)$ gibt, als sich durch die Formel (*) darstellen lassen.

Dies beruht auf dem folgenden Umstand: Jede Definition von $f(A)$ setzt im Grunde eine Zerlegung von A in „einfachere"

[2a]) Über das folgende wurde schon kurz berichtet in einer Note in den C.R. **201** (1935), 414—416.

[3]) Vgl. l. c. [1]), Kap. IX.

[4]) M. Cipolla [Rendiconti Palermo **56** (1932), 144—154].

[5]) H. Schwerdtfeger [Enseignement Math. **32** (1934), 304—319].

Matrizen voraus. Die der Definition (*) zugrundeliegende Zerlegung von A erhält man, indem man diese Matrix der Reihe nach mit ihren Frobeniusschen Kovarianten $A_1, \ldots, A_m$ multipliziert. Denn setzt man

$$a_j = A_j A,$$

so ist von selbst

$$A = \sum_{j=1}^{m} a_j.$$

Hier sind die a_j zunächst insofern „einfacher", als sie außer der Null bzw. nur die eine Wurzel α_j besitzen. Und im wesentlichen genügt es nun (auf Grund der Orthogonalitätseigenschaften der A_j), die Werte $f(a_j)$ zu definieren. Im Gegensatz hierzu benutzt Cipolla (l.c.) im Anschluss an G. Giorgi die „feinere" Zerlegung von A, welche durch die Elementarteilertheorie geliefert wird. Den Matrizen a_j bei der erstgenannten „groben" Zerlegung von A entsprechen hier die Weyrschen kanonischen Bestandteile, bei Cipolla mit $(j_r C_r)$ bezeichnet, deren Anzahl $p \geqq m$ ist, wenn m die Anzahl der untereinander verschiedenen Wurzeln α_j von A ist. Der Fall $p > m$ tritt z.B. bei der Einheitsmatrix E ein, wo $p = n$, $m = 1$ ist. Ist $f(z)$ eine mehrdeutige Funktion, so liefert mithin die Cipollasche Definition von $f(A)$ im allgemeinen mehr verschiedene Werte $f(A)$ als die Definition (*).

Sei etwa $C = U^{-1}AU$ die Weyrsche kanonische Form der Matrix A, so ist nach dem vorangehenden zunächst eine Bestimmung von $f(C)$ fixiert, indem die Werte von $f(z)$ für die einzelnen Bestandteile von C definiert sind. (Vgl. dazu l.c. [1]), 100.) Als Wertebereich von $f(z)$ für A definiert Cipolla dann die Gesamtheit der möglichen Bestimmungen

$$f(A) = Uf(C)U^{-1}$$

nebst allen den Werten, die hieraus durch Transformation mit allen mit A vertauschbaren regulären Matrizen T hervorgehen. Diese Definition steht natürlich, wie man leicht sieht, mit der zuvor erwähnten in Einklang, zeichnet sich aber durch größere Allgemeinheit aus.

3. Eine wesentliche Eigenschaft der durch (*) dargestellten Werte $f(A)$ ist diese: Sie sind mit allen regulären Matrizen T vertauschbar, die die Matrix A in sich transformieren, für die also $T^{-1}AT = A$ ist. Schon das einfache, l.c. [4]), § 3, angeführte Beispiel zeigt, daß dies nicht für alle Matrizen $f(A)$ zutrifft. Es scheint demnach sinnvoll, für eine mehrdeutige Funktion $f(z)$ zwei Arten von Werten $f(A)$ zu unterscheiden:

1⁰. *Die „isolierten Werte" $f(A)$, welche mit allen T vertauschbar sind, die die Matrix A in sich transformieren.*

2⁰. *Die „kumulierten Werte" $f(A)$, welche nicht mit allen T der genannten Art vertauscht werden können und daher sicher nicht in der Form (*) geschrieben werden können. Diese Werte sind dadurch charakterisiert, daß es zu ihnen ähnliche $T^{-1}f(A)T \neq f(A)$ gibt, die ebenfalls eine mögliche Wertbestimmung von $f(A)$ repräsentieren.*

Bereits an dem einfachen Beispiel $f(z) = \sqrt{z}$, $n = 2$, $A = E$ kann man sich diesen Tatbestand klarmachen. Hier hat man die folgenden drei verschiedenen Wertbestimmungen für $f(E)$:

$$f_1(E) = E, \quad f_2(E) = -E, \quad f_3(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden ersten sind isolierte Werte und lassen sich auch durch die Formel (*) darstellen; $f_3(E)$ dagegen ist ein kumulierter Wert, und die unendlich vielen anderen, hier nicht angegebenen Werte gehen aus diesem durch Transformation mit einer beliebigen zweireihigen regulären Matrix T hervor.

Der einzige Wert $f(A)$ einer eindeutigen Funktion $f(z)$ für irgend eine Matrix A ist stets isoliert. Es kann auch bei einer mehrdeutigen Funktion $f(z)$ eintreten, daß alle Werte $f(A)$ isoliert sind. Ist wieder $f(z) = \sqrt{z}$ und $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so findet man als einzige — isolierte — Werte von $f(A_0)$ die beiden Matrizen $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ und $-B_0$, und beide lassen sich durch (*) darstellen; vgl. dazu Nr. 5.

4. Sei wieder $f(z)$ eine im Gebiet Γ der z-Ebene mehrdeutige analytische Funktion und A eine Matrix, deren Wurzeln α_j in Γ liegen. Die Werte $f(A)$ von $f(z)$ für A kann man mit einer gewissen Gruppe $\mathbf{G}(A) = \mathbf{G}$ in Beziehung setzen: Es sei $\mathbf{G}(A)$ die Gruppe aller regulären Matrizen T, die die Matrix A in sich transformieren, für die also

$$T^{-1}AT = A$$

ist. Ferner wird mit $f_1(A)$ irgend ein bestimmter Wert von $f(z)$ für die Matrix A bezeichnet; diesem Wert wird die Gruppe $\mathbf{G}_{f_1}(A) = \mathbf{G}_{f_1}$ aller derjenigen Matrizen S aus $\mathbf{G}$ zugeordnet [6]), für die

[6]) Es braucht nicht $\mathbf{G}_{f_1}(A)$ mit der Gruppe $\mathbf{G}(f_1(A))$ übereinzustimmen.

$$S^{-1}f_1(A)S = f_1(A)$$

gilt. Ist $f_1(A)$ ein isolierter Wert, so ist $\mathbf{G}_{f_1} = \mathbf{G}$; ist dagegen $f_1(A)$ ein kumulierter Wert, so ist sicher $\mathbf{G}_{f_1}$ eine echte Untergruppe von $\mathbf{G}$, die man als den Normalisator von $f_1(A)$ in $\mathbf{G}$ bezeichnen kann.

Mit $f_1(A)$ ist stets auch

$$\bar{f}_1(A) = T^{-1}f_1(A)T, \qquad \text{falls } T \text{ in } \mathbf{G}(A),$$

ein Wert von $f(z)$ für A; zwei in dieser Weise verbundene Werte $\bar{f}_1(A)$ und $f_1(A)$ heißen zueinander konjugiert. Durchläuft T ein vollständiges Repräsentantensystem der rechten Restklassen von $\mathbf{G}$ (mod $\mathbf{G}_{f_1}$), d.h. ein Matrizensystem, das in jedem der untereinander verschiedenen Komplexe $\mathbf{G}_{f_1}T^*$ (mit T^* in $\mathbf{G}$) genau einen Vertreter hat, so durchläuft $\bar{f}_1(A)$ die Klasse der zu $f_1(A)$ konjugierten Werte. (Vgl. l. c. [4]), § 4.)

Konjugierten Werten $f_1(A)$ und $\bar{f}_1(A)$ entsprechen konjugierte Untergruppen $\mathbf{G}_{f_1}$ und $\mathbf{G}_{\bar{f}_1} = T^{-1}\mathbf{G}_{f_1}T$. Denn ist S das allgemeine Element aus $\mathbf{G}_{f_1}$ und

$$\bar{S} = T^{-1}ST,$$

so ist

$$\bar{S}^{-1}\bar{f}_1(A)\bar{S} = T^{-1}S^{-1}TT^{-1}f_1(A)TT^{-1}ST = T^{-1}f_1(A)T$$
$$= \bar{f}_1(A).$$

Hat man dagegen zwei nicht zueinander konjugierte Werte $f_1(A)$ und $f_2(A)$, so kann es doch sein, daß beiden gleiche, oder wenigstens konjugierte Untergruppen $\mathbf{G}_{f_1}$, $\mathbf{G}_{f_2}$ entsprechen; ersteres ist z.B. der Fall, wenn $f_1(A)$ und $f_2(A)$ beide isoliert sind; die Gruppe ist dann immer $\mathbf{G}$. Dieser Umstand gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

Zwei Werte $f_1(A)$, $f_2(A)$ heißen „nicht wesentlich verschieden", wenn die ihnen entsprechenden Gruppen $\mathbf{G}_{f_1}$, $\mathbf{G}_{f_2}$ konjugierte (oder gleiche) Untergruppen von $\mathbf{G}$ sind, „wesentlich verschieden", wenn dies nicht der Fall ist.

Sind $f_1(A)$, $f_2(A)$ zwei nicht wesentlich verschiedene Werte von $f(z)$ für A, so soll dies durch die Relation

$$f_1(A) \sim f_2(A)$$

ausgedrückt werden. Es ist dies eine Äquivalenzrelation, welche eine Klasseneinteilung aller möglichen Werte $f(A)$ nach sich zieht. Denn von je zwei Werten steht auf Grund der Definition stets eindeutig fest, ob sie wesentlich verschieden sind oder nicht;

es ist stets $f(A) \backsim f(A)$; aus $f_1(A) \backsim f_2(A)$ folgt $f_2(A) \backsim f_1(A)$; und aus $f_1(A) \backsim f_2(A)$ und $f_2(A) \backsim f_3(A)$ folgt $f_1(A) \backsim f_3(A)$.

Eine Klasse nicht wesentlich verschiedener Werte von $f(z)$ für A bilden in jedem Falle die sämtlichen isolierten Werte; dagegen sind alle isolierten Werte von jedem kumulierten Wert wesentlich verschieden. Ferner ergibt sich ohne weiteres:

Die Anzahl k_f der Klassen wesentlich verschiedener Werte $f(A)$ von $f(z)$ für A ist höchstens so groß wie die Anzahl g der nicht zu einander konjugierten Untergruppen $\mathbf{G}_f$ in $\mathbf{G}$:

$$k_f \leqq g.$$

Speziell weiß man so, daß es nur isolierte Werte $f(A)$ gibt, wenn in $\mathbf{G}$ keine echte Untergruppe $\mathbf{G}_f$ vorhanden ist. Jede hier in Frage kommende Untergruppe $\mathbf{G}_f$ ist kontinuierlich.

Beispiel: $f(z) = \sqrt{z}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Matrix A_0 ist mit allen Matrizen $T = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ c & \varepsilon \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon^2 = 1$ und willkürlichen c vertauschbar. Die Gruppe $\mathbf{G}$ dieser Matrizen T hat keine in Frage kommende echte Untergruppe und demnach gibt es im wesentlichen einen und nur einen Wert $f(A_0)$, was man auch leicht direkt bestätigt. Die beiden einzigen — isolierten — Werte B_0 und $-B_0$ wurden oben (Nr. 3.) schon angegeben.

Eine obere Schranke für die Anzahl k_f der wesentlich verschiedenen Werte von $f(z)$ für A ist nach dem vorangehenden allein durch die Matrix A bestimmt und von $f(z)$ unabhängig. Der genaue Wert von k_f hängt natürlich noch von $f(z)$ ab.

5. Eine weitere Frage ist nun, wie man aus einem Wert $f_1(A)$ alle von ihm nicht wesentlich verschiedenen Werte von $f(z)$ für A bekommen kann. Diese Frage läßt sich natürlich nur durch unmittelbare Anwendung der hier zugrundegelegten Cipollaschen Definition entscheiden, wenn man von dem schon erledigten Fall der konjugierten Werte absieht; diese sind natürlich alle in der Klasse der nicht wesentlich verschiedenen Werte enthalten.

Mit Rücksicht hierauf genügt es offenbar, alle diejenigen Werte $f_h(A)$ zu ermitteln, welche mit $f_1(A)$ zu derselben Gruppe $\mathbf{G}_f$ gehören. Wendet man auf diese (nicht konjugierten) Werte einzeln der Reihe nach wieder die Transformationen T eines vollen rechten Restsystems von $\mathbf{G}$ (mod $\mathbf{G}_{f_1}$) an, so erhält man alle weiteren Werte der durch $f_1(A)$ bestimmten Klasse untereinander nicht wesentlich verschiedener Werte.

Am einfachsten löst sich die aufgeworfene Frage in der Klasse der isolierten Werte, und zwar durch den folgenden Satz von Turnbull und Dirac [7]), der hier gleich in der anfangs erklärten Terminologie angegeben wird:

Ein Wert $f_1(A)$ von $f(z)$ für A ist (dann und) nur dann ein isolierter Wert, wenn er in der Gestalt (*), d.h. als Polynom in A geschrieben werden kann.

Es ist klar, daß stets, wenn der Wert $f_1(A)$ als irgend ein Polynom in A gegeben ist, dies auf die Gestalt (*) reduziert werden kann, welche ja einen polynomischen Ausdruck für $f(A)$ im Falle jeder beliebigen eindeutigen Funktion $f(z)$ liefert, für die $f(A)$ definiert ist.

Hiernach kann man weiter folgendermaßen schließen. Das Polynom auf der rechten Seite von (*) werde zur Abkürzung mit $p_f(A)$ bezeichnet. Zu je zwei isolierten Werten $f_1(A)$, $f_2(A)$ von $f(z)$ für A gibt es also zwei Polynome $p_{f_1}(z)$, $p_{f_2}(z)$, so daß

$$f_1(A) = p_{f_1}(A), \quad f_2(A) = p_{f_2}(A).$$

Weiter werde $f_1(A) = B$ gesetzt, und damit betrachte man die Matrixgleichung

$$p_{f_1}(X) = B,$$

welche offenbar die Lösung $X = A$ hat. Es ist also

$$A = \varphi(B)$$

ein Wert einer wohldefinierten algebraischen Funktionen $\varphi(z)$ für B. Ist speziell A ein isolierter Wert von $\varphi(z)$ für B, was man nach dem vorangehenden allein der Matrix B ansieht, ohne explizite Kenntnis von $\varphi(z)$ zu haben, so kann man nach dem Turnbull-Diracschen Satz diese Funktion $\varphi(z)$ durch ein Polynom $p_\varphi(z)$ ersetzen, und in diesem Falle ist es möglich, jeden weiteren isolierten Wert $f_h(A)$ von $f(z)$ für A in der Gestalt

$$f_h(A) = p_{f_h}(\varphi(B)) = \psi_h(f_1(A))$$

darzustellen, unter $\psi_h(z)$ ein gewisses Polynom in z verstanden. Im allgemeinen jedoch kann man $f_h(A)$, $(h = 2, 3, \ldots)$, nur als Wert einer gewissen algebraischen Funktion $\chi_h(z)$ für $f_1(A)$ schreiben.

Durch Anwendung eines kleinen Hilfssatzes kann man auf

---

[7]) H. W. Turnbull and A. C. Aitken, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices [London and Glasgow, 1932], Kap. X, Theorem I, 150—151.

wesentlich dieselbe Weise nun auch die oben aufgeworfene Frage in voller Allgemeinheit entscheiden:

Sind $f_1(A)$, $f_h(A)$ zwei nicht-konjugierte, nicht wesentliche verschiedene Werte von $f(z)$ für A, denen dieselbe Gruppe $\mathbf{G}_{f_1}$ zugeordnet ist, so kann men stets $f_h(A)$ als Wert einer gewissen algebraischen Funktion $\chi_h(z)$ für $f_1(A)$ darstellen, welche in ein Polynom ausartet, wenn $\mathbf{G}_{f_1}$ Normalisator von $f_1(A)$ in der Gruppe aller regulären Matrizen ist.

Mit Rücksicht auf das vorangehende kann man $\mathbf{G}_{f_1}$ schon als echte Untergruppe von $\mathbf{G}$ voraussetzen. Und um nun die dort verwendete Schlußweise übertragen zu können, suche man eine Matrix A_{f_1}, für die

$$\mathbf{G}(A_{f_1}) = \mathbf{G}_{f_1}(A)$$

ist; d.h. es soll $\mathbf{G}_{f_1}$ die Gesamtheit der mit A_{f_1} vertauschbaren regulären Matrizen sein. Dann sind $f_1(A)$ und $f_2(A)$ nach dem Turnbull-Diracschen Satz gewiß wieder Polynome in A_{f_1}:

$$f_1(A) = p_{f_1}(A_{f_1}), \quad f_2(A) = p_{f_2}(A_{f_1}),$$

und daher kann man in der gleichen Weise weiter schließen wie eben.

Ist umgekehrt auch A_{f_1} mit allen Matrizen vertauschbar, die in dem Normalisator $\mathbf{G}(f_1(A))$ liegen, d. s. alle mit $f_1(A)$ vertauschbaren regulären Matrizen (nicht nur, soweit sie in $\mathbf{G}$ liegen), ist also

$$\mathbf{G}(A_{f_1}) = \mathbf{G}_{f_1}(A) = \mathbf{G}(f_1(A)),$$

so tritt der Sonderfall ein, daß A_{f_1} isolierter Wert für $f_1(A)$ ist. Dann sind die Übergangsfunktionen von $f_1(A)$ zu den übrigen $f_h(A)$ der Klasse Polynome in $f_1(A)$.

6. Zu beweisen bleibt nur noch der folgende Hilfssatz:

Zu jeder echten Untergruppe $\mathbf{G}_f$ von $\mathbf{G}$ kann man eine Matrix A_f finden, so daß $\mathbf{G}_f$ Normalisator von A_f (nicht nur in $\mathbf{G}$, sondern auch) in der Gruppe $\mathbf{L}$ aller regulären Matrizen ist.

Beweis: Die Untergruppe $\mathbf{G}_f$ ist Normalisator von $f(A) = B$ in der Gruppe $\mathbf{G} = \mathbf{G}(A)$. Der Normalisator von B in der $\mathbf{G}$ umfassenden Gruppe $\mathbf{L}$ wird im allgemeinen eine Gruppe $\mathbf{G}(B)$ sein, welche $\mathbf{G}_f = \mathbf{G}_f(A)$ als echten Teil enthält, und zwar genauer so, daß der Durchschnitt

$$\mathbf{G}(A) \cap \mathbf{G}(B) = \mathbf{G}_f(A)$$

ist.

Sind nun etwa A und B Matrizen mit verschwindender Determinante, so wird man sie stets durch reguläre Matrizen A^*, bzw. B^* (aus $\mathbf{L}$) ersetzen können, so daß immer noch

$$\mathbf{G}(A^*) = \mathbf{G}(A), \quad \mathbf{G}(B^*) = \mathbf{G}(B)$$

gilt. D.h. es ist

$$T^{-1}A^*T = A^* \text{ für alle } T \text{ aus } \mathbf{G}(A), \text{ spez. } T = S \text{ in } \mathbf{G}_f$$
$$V^{-1}B^*V = B^* \text{ für alle } V \text{ aus } \mathbf{G}(B), \text{ spez. } V = S \text{ in } \mathbf{G}_f.$$

Bildet man nun das Produkt

$$A_f = A^*B^*,$$

so hat diese Matrix in der Tat die Eigenschaft, daß der Normalisator

$$\mathbf{G}(A_f) = \mathbf{G}_f(A)$$

ist. Denn es ist

$$V^{-1}A_fV = V^{-1}A^*VV^{-1}B^*V = V^{-1}A^*VB^* \neq A^*B^* = A_f$$

für alle V außerhalb $\mathbf{G}_f$, aber [8])

$$S^{-1}A_fS = S^{-1}A^*SS^{-1}B^*S = A_f \quad \text{für alle } S \text{ in } \mathbf{G}_f.$$

7. Endlich noch einige einfache Bemerkungen. Man sieht sofort, daß $p = n$ ist, wenn $m = n$, d.h. wenn alle Wurzeln von A untereinander verschieden sind. Dann sind alle Werte von $f(A)$ isoliert, also durch die Formel (*) gegeben. Jedoch ist diese Bedingung zwar hinreichend, aber nicht notwendig. Notwendig und hinreichend dafür, daß alle Werte für eine Matrix A isoliert sind, ist

$$p = m.$$

Sodann noch ein Beispiel, welches auch die zuvor beschriebenen, etwas komplizierteren Verhältnisse zu übersehen gestattet, wo also $p > m$ ist. Es sei wieder $f(z) = \sqrt{z}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

[8]) Da die Vertauschbarkeitseigenschaften von Matrizen durch ihre Weyrschen Charakteristiken bestimmt werden, kann man A^*, B^* stets so wählen, daß es keine außerhalb $\mathbf{G}(A)$ und $\mathbf{G}(B)$ gelegene Matrix gibt, welche das Produkt A^*B^* in sich überführt.

Für diese kann man mit Hilfe der Formel (*) (oder auf Grund des vorher behandelten Beispiels der Matrix A_0) sofort die beiden einzigen isolierten Werte angeben:

$$f_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2(A) = -f_1(A).$$

Die Gruppe $\mathbf{G}(A)$ besteht aus allen Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} \tau & t_1 & t_2 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & t_3 & \tau' \end{pmatrix}, \qquad \tau\tau' \neq 0,$$

mit willkürlichen komplexen Parametern τ, τ', t_1, t_2, t_3.

Außer den isolierten Werten gibt es hier aber noch kumulierte Werte, die alle konjugiert sind zu den beiden Werten

$$f_3(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f_4(A) = -f_3(A).$$

Es ist

$$T^{-1} f_3(A) T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + 2\vartheta\vartheta' & 2\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\vartheta' & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vartheta = \frac{t_2}{\tau}, \ \vartheta' = \frac{t_3}{\tau'}.$$

Demnach ist $\mathbf{G}_{f_3}(A)$ die Untergruppe der Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma' \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \sigma\sigma' \neq 0).$$

Das Funktionensystem, das von $f_1(A)$ zu $f_2(A)$ und von $f_3(A)$ zu $f_4(A)$ überführt, ist hier denkbar einfach, in beiden Fällen die Funktion $\psi(z) = -z$.

(Eingegangen den 25. Januar 1935.)

Zum Schluß möge noch auf einen allgemeinen Umstand hingewiesen werden, der wesentlich auf dem oben bewiesenen Satz beruht. Es sei $f_h(A)$ irgend ein Wert von $f(z)$ für A, und $f_k(A)$ ein zweiter, von dem ersten nicht wesentlich verschiedener, aber auch nicht zu ihm konjugierter Wert. Dann gibt es eine *algebraische* Funktion $\chi_{kh}(z)$ derart, daß

$$\chi_{kh}(f_h(A)) = f_k(A)$$

gilt.

Man betrachte nun das Schema aller der verschiedenen Übergangsfunktionen $\chi_{kh}(z)$. Wählt man als ihren Wirkungsbereich ein System nicht konjugierter Repräsentanten $f_h(A)$ einer festen

Klasse, so bilden sie in ihrer Gesamtheit offenbar ein Gruppoid, das mit Γ bezeichnet werden soll. Einheiten sind die Funktionen $\chi_{kk}(z)$, und das symbolische Produkt $\chi_{kh} \circ \chi_{ji}$ zweier Funktionen $\chi_{kh}(z)$, $\chi_{ji}(z)$ kann man stets dann bilden, wenn $h = j$ ist, und es ist dann

$$\chi_{kh} \circ \chi_{hi} = \chi_{ki}.$$

Bei festem Repräsentantensystem der Klasse ist das Gruppoid Γ in abstracto eindeutig bestimmt, wenn natürlich auch die Unbestimmtheit in der Wahl der Funktionen selbst dann noch sehr groß ist. Es wäre von Interesse festzustellen, wie Γ sich ändert, wenn man in der Klasse zu einem neuen Repräsentantensystem übergeht.

(Eingegangen den 15. Juli 1935.)