

COMPOSITIO MATHEMATICA

J. G. VAN DER CORPUT

**Zur Methode der stationären Phase. Zweite
Mitteilung Wiederum einfache Integrale**

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 328-372

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__328_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Zur Methode der stationären Phase

Zweite Mitteilung

Wiederum einfache Integrale

von

J. G. van der Corput

Groningen

§ 1. Einleitung.

Bekanntlich setzen verschiedene Methoden uns instand, unter gewissen Voraussetzungen für das Integral

$$(82) \quad I = \int_a^b g(u) e^{f(u)} du$$

einen Näherungswert I' zu bestimmen und außerdem eine für die Praxis bequeme obere Schranke für $|I - I'|$ abzuleiten. Genau wie die erste Mitteilung ¹⁾, die der Leser, um die vorstehende zu begreifen, nicht zu kennen braucht, ist auch diese Arbeit diesem Problem gewidmet. Von den bis jetzt bekannten Näherungsmethoden werde ich hier drei kurz besprechen.

Die Methode, die letzten Endes auf Laplace zurückgeht, beruht auf dem folgenden Gedanken. Bezeichnet $f(u)$ eine reelle Funktion, die in einem zwischen a und b liegenden Punkt v einen Höchstbetrag annimmt, zeigt die Kurve dieser Funktion in diesem Punkte einen schmalen hohen Berg, und ist die Funktion $g(u)$ im Intervalle (a, b) nicht zu unregelmäßig, so liefert die Umgebung von v zum betrachteten Integral den wesentlichsten Beitrag, d.h. I besitzt einen Näherungswert I' , der durch das Verhalten der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung von v eindeutig bestimmt wird.

Bei der Paßmethode, auch Methode der Sattelpunkte genannt, werden $f(u)$ und $g(u)$ analytisch vorausgesetzt und werden die Punkte a und b geeignet gewählt. Der Integrationsweg wird so

¹⁾ Compositio Mathematica 1 (1934), 15—38.

geändert, daß $\Re f(z)$ auf dem neuen Weg einen möglichst kleinen Höchstwert annimmt und von der Stelle an, wo dieses Maximum erreicht wird, nach beiden Seiten möglichst rasch abfällt. Auf dieser Kurve K schnellsten Falles hat $\Im f(z)$ einen konstanten Wert γ ; im Punkte v , wo $\Re f(z)$ den Höchstbetrag annimmt, verschwindet f' , d.h. dieser Punkt v ist ein Sattelpunkt der Funktion $f(z)$. Das Integral I ist so auf die Gestalt

$$J = e^{i\gamma} \int_K g(z) e^{\Re f(z)} dz$$

gebracht, und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen kann auf das letzte Integral die Laplacesche Methode angewendet werden, da $\Re f(z)$ in v ein Maximum besitzt.

Von ganz anderer Art ist die Methode, deren Prinzip schon 1856 durch Stokes angegeben, 1887 durch Kelvin ausdrücklich formuliert worden ist. Bei dieser Methode setzt man $g(u)$ reell, $f(u)$ rein imaginär voraus. Wird $f(u) = i\varphi(u)$ gesetzt, so heißt $\varphi(u)$ die Phase, und es brauchen nur die Integrale

$$\int_a^b g(u) \cos \varphi(u) du \quad \text{und} \quad \int_a^b g(u) \sin \varphi(u) du$$

untersucht zu werden. In einem Punkte mit $\varphi'(u) = 0$ heißt die Phase stationär; ausdrücklich sei hier bemerkt, daß in einem Punkte, wo die Phase stationär ist, der Integrand im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum besitzt. Zeigen nun die Funktionen $g(u) \cos \varphi(u)$ und $g(u) \sin \varphi(u)$ sehr viele regelmäßige Wellen, so werden die Beiträge dieser Wellen, wie die zwei genannten Verfasser beachtet haben, einander teilweise aufheben. Eine Ausnahme bilden die Wellen in der Umgebung von a , die in der Umgebung von b und die in der Umgebung der etwaigen zwischen a und b liegenden Punkte, wo die Phase stationär ist. Liegen zwischen a und b keine oder höchstens endlich viele Punkte $v, v', v'', \dots$, wo die Phase stationär ist, so liefert die Stokes-Kelvinsche Methode der stationären Phase, natürlich unter gewissen Voraussetzungen, für I einen Näherungswert der Gestalt $A + B + V + V' + \dots$; hierbei wird A eindeutig bestimmt durch das Verhalten der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung von a , B durch das in der Umgebung von b , ebenso V durch das in der Umgebung von v ; u.s.w.

Jede der drei hier besprochenen Methoden führt somit zum folgenden Resultat: unter gewissen Voraussetzungen besitzt I einen Näherungswert, der eindeutig bestimmt wird durch das

Verhalten der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung gewisser Punkte.

Obgleich die Stokes-Kelvinsche Methode den Vorteil hat, daß die Funktionen nicht analytisch zu sein brauchen, und daß die Endpunkte a und b beliebig gewählt werden können, ist sie, wie mir scheint, noch nicht genug gewürdigt worden; sie ist nur selten und dann nur für ganz spezielle Fälle mit sehr unscharfen Resultaten angewendet worden. Meine ursprüngliche Absicht war, in diesen Mitteilungen der Methode die Stelle zu geben, die ihr neben den zwei andern gebührt. Im Anfang hatte ich denn auch den Plan, in dieser und den folgenden Mitteilungen $f(u)$ rein imaginär vorauszusetzen. Nachträglich habe ich eingesehen, daß die Methode, wie sie hier entwickelt wird, fast ungeändert auf Funktionen, die nicht rein imaginär sind, übertragen werden kann. Statt die Stokes-Kelvinsche Methode zu verallgemeinern, wie meine ursprüngliche Absicht war, lege ich mir jetzt die viel weiter gehende Aufgabe vor, möglichst allgemeine hinreichende Bedingungen abzuleiten, damit I einen Näherungswert besitzt, der eindeutig bestimmt wird durch das Betragen der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung gewisser zum Intervall (a, b) gehörigen Punkte. Wie bilde ich die Menge dieser Punkte? Nach der Bemerkung über die Stokes-Kelvinsche Methode liegt es nahe, die Endpunkte a und b in diese Menge aufzunehmen. Wie die Methode in dieser Mitteilung entwickelt wird, enthält die Menge, außer den Endpunkten a und b , noch die etwaigen zwischen a und b liegenden Punkte v , wo $\frac{f'(v)}{\sqrt{f''(v)}}$ reell ist und gleichzeitig die Funktion $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ ihr Vorzeichen wechselt. Mit Rücksicht hierauf nenne ich die etwaigen zwischen a und b liegenden Punkte v , wo $\frac{f'(v)}{\sqrt{f''(v)}}$ reell ist und gleichzeitig $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ das Vorzeichen ändert, die *führenden Punkte* der Funktion $f(u)$ im Intervall (a, b) , so daß die Problemstellung wie folgt formuliert werden kann:

Gesucht werden allgemeine hinreichende Voraussetzungen, damit das in (82) genannte Integral einen Näherungswert I' besitzt, der eindeutig bestimmt wird durch das Verhalten der Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung von a und b und in der Umgebung der etwaigen zwischen a und b liegenden führenden Punkte von $f(u)$. Natürlich wird dabei außerdem eine obere Schranke für $|I - I'|$ verlangt.

Aus diesem Grunde nenne ich das in dieser Mitteilung ent-

wickelte Verfahren die Methode der führenden Punkte. Im Spezialfall, daß $f(u)$ reell und $f''(u) < 0$ ist, besitzt ein führender Punkt v von $f(u)$ die Eigenschaft, daß $f'(v) = 0$ ist und $f(u)$ in v einen Höchstwert annimmt; im Spezialfall, daß $f(u) = i\varphi(u)$ rein imaginär ist, ist die Phase $\varphi(u)$ in einem führenden Punkt der Funktion $f(u)$ stationär. Die Laplacesche und auch die Stokes-Kelvinsche Methode ist somit nur ein Spezialfall des Verfahrens der führenden Punkte. Ich kann also den Titel dieser Mitteilungen aufrecht erhalten, um so mehr, da sich in dieser Mitteilung jede Verallgemeinerung der Stokes-Kelvinschen Methode vorfindet, die ich ursprünglich beabsichtigte zu entwickeln.

In dieser Einleitung werde ich nicht den Hauptsatz (Satz 10), dem § 2 dieser Mitteilung gewidmet ist, sondern nur einen sehr speziellen Fall des Hauptsatzes formulieren. Hier und in den folgenden Mitteilungen bezeichne ich mit ω stets eine Zahl, die von allen Parametern abhängen darf, deren Absolutwert aber eine obere Schranke besitzt, der höchstens von ausdrücklich angegebenen Parametern abhängt; schreibe ich $\omega = \omega(r_1, \dots, r_l)$, so meine ich, daß ω von $r_1, \dots, r_l$ und anderen Parametern abhängen darf, daß aber $|\omega|$ kleiner ist als eine geeignet gewählte, höchstens von $r_1, \dots, r_l$ abhängige Zahl. Der Buchstabe ω braucht nicht stets dieselbe Zahl zu bezeichnen, sogar nicht in derselben Formel. Z.B. für reelles x ist

$$\begin{aligned} e^r x^6 + r x^2 + \sin x &= \omega(r) x^6 + \omega(r)(1 + x^6) + \omega(r) \\ &= \omega(r)(x^6 + 1). \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist ein spezieller Fall des in § 4 behandelten Satzes 14, der selbst wieder ein Spezialfall des Hauptsatzes ist.

SATZ 6: *Voraussetzungen: 1. Im Intervall $a \leq u \leq b$ sei $f(u)$ eine mindestens m -mal ($m \geq 3$) stetig differenzierbare reelle oder nicht-reelle Funktion mit $f''(u) \neq 0$, so daß also*

$$(83) \quad y(u) = |f'(u)| + \sqrt{|f''(u)|} > 0$$

ist. Die Funktion $\sqrt{f''(u)}$ sei stetig, und das Intervall $a < u < b$ enthalte höchstens endlich viele Punkte u , wo $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ reell ist.

2. Im Intervall $a \leq u \leq b$ sei $g(u)$ eine mindestens k -mal ($1 \leq k \leq m$) stetig differenzierbare Funktion.

8. Es sei $r > 0$, $x \geq 1$, $G > 0$. Im Intervall $a \leq u \leq b$ sei

$$(84) \quad |f^{(\mu)}(u)| \leq r \frac{y^\mu(u)}{x^\mu} \quad (3 \leq \mu \leq m),$$

$$(85) \quad |g^{(\kappa)}(u)| \leq G y^\kappa(u) \quad (0 \leq \kappa < k)$$

und

$$(86) \quad |g^{(k)}(u)| \leq \frac{G}{x} y^k(u).$$

Unter diesen Voraussetzungen kann man dem Endpunkt a eine Zahl A , dem Endpunkt b eine Zahl B , und jedem etwaigen zwischen a und b liegenden führenden Punkt $v, v', \dots$ der Funktion $f(u)$ eine Zahl $V, V', \dots$ zuordnen, so daß das in (82) genannte Integral den Wert

$$A + B + V + V' + \dots + \omega(m, r) G x^{-1} \int_a^b |e^{f(u)}| du$$

besitzt.

Bei gegebenen m und k ist A eindeutig bestimmt durch $f^{(\mu)}(a)$ ($0 \leq \mu \leq m$) und $g^{(\kappa)}(a)$ ($0 \leq \kappa \leq k$); ebenso B durch $f^{(\mu)}(b)$ und $g^{(\kappa)}(b)$; V durch $f^{(\mu)}(v)$ und $g^{(\kappa)}(v)$; usw.

Wie schon bemerkt wurde, ist § 2 dem Hauptsatz dieser Mitteilung gewidmet. Auch in der Behauptung dieses Hauptsatzes treten die Beiträge $A, B, V, \dots$ der Endpunkte a und b und der etwaigen führenden Punkte $v, \dots$ von $f(u)$ auf. Wichtig für die Anwendungen ist es, diese Beiträge zu bestimmen. Das geschieht in § 3. Übrigens braucht man nicht immer die genauen Werte dieser Beiträge; oft ist man mit approximativen Werten zufrieden. Der folgende Satz fordert zwar etwas mehr als Satz 6, gibt aber für A und B Näherungswerte, die für viele Anwendungen sehr bequem sind.

Ist $C = -|C|e^{i\gamma} \neq 0$, so verstehe ich für jedes Polynom $p(h)$ unter

$$(87) \quad \int_0^\infty p(h) e^{Ch} dh$$

das konvergente Integral

$$(88) \quad e^{-i\gamma} \int_0^\infty p(He^{-i\gamma}) e^{-|C|H} dH.$$

Diese Definition ist erlaubt, denn konvergiert das in (87) genannte Integral, d.h. ist $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, so haben die zwei in (87) und (88) auftretenden Integrale denselben Wert.

Aus dieser Definition geht hervor: Ist

$$p(h) = \sum_{\kappa=0}^k P_{\kappa} h^{\kappa},$$

so ist

$$\int_0^{\infty} p(h) e^{ch} dh = \sum_{\kappa=0}^k \frac{(-1)^{\kappa+1} P_{\kappa} \kappa!}{C^{\kappa+1}}.$$

Ist eine Funktion $\varphi(h)$ im Nullpunkt mindestens $m-1$ mal differenzierbar (m ganz ≥ 1), so bedeute $[\varphi(h)]_m$ das Polynom

$$\varphi(0) + \frac{h}{1} \varphi'(0) + \dots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(0),$$

also den Abschnitt $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in der formellen Mac-Laurin-entwicklung der Funktion $\varphi(h)$; insbesondere ist $[\varphi(h)]_1 = \varphi(0)$. Außerdem setze ich noch $[\varphi(h)]_0 = 0$.

SATZ 7: *Es seien die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt; es sei $\xi > 0$,*

$$(89) \quad |f''(a)| \leq r |f'(a)|^2$$

und

$$(90) \quad |f^{(\mu)}(a)| \leq r \xi^{-\mu} \quad (2 \leq \mu < m).$$

BEHAUPTUNGEN: 1. *Der in der Behauptung von Satz 6 vorkommende Beitrag A hat den Wert*

$$A = \int_0^{\infty} [g(a+h)]_k [e^{f(a+h)-hf'(a)}]_m e^{\frac{h}{4} f'(a)} dh + \frac{\omega(m, k, r) G e^{f(a)}}{\xi^m (f'(a))^{1+m}}.$$

2. *Wird*

$$[e^{f(a+h)-hf'(a)}]_m = e^{f(a)} \sum_{\mu=0}^{m-1} Q_{\mu} h^{\mu}$$

gesetzt, so ist

$$A = e^{f(a)} \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-1)^{\kappa+\mu+1} (\kappa+\mu)!}{(f'(a))^{\kappa+\mu+1}} \frac{g^{(\kappa)}(a)}{\kappa!} Q_{\mu} + \frac{\omega(m, k, r) G e^{f(a)}}{\xi^m (f'(a))^{1+m}}$$

und

$$Q_{\mu} = \omega(m, r) \xi^{-\mu} \quad (0 \leq \mu < m).$$

BEMERKUNG: Der Satz bleibt gültig, wenn a durch b , und A durch $-B$ ersetzt wird.

Um den Wert der Beiträge $V, V', \dots$ anzugeben, setze ich,

falls $C = -|C|e^{i\gamma} \neq 0$ mit $-\pi < \gamma < \pi$ ist, für jedes Polynom $p(h)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(h) e^{Nh + \frac{1}{2}Ch^2} dh = e^{-\frac{1}{2}i\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} p(He^{-\frac{1}{2}i\gamma}) e^{Ne^{-\frac{1}{2}i\gamma} H - \frac{1}{2}|C|H^2} dH.$$

Das rechterhand auftretende Integral konvergiert; konvergiert das linkerhand vorkommende Integral, so hat es denselben Wert.

SATZ 8: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6 ist*

$$V = \pm \int_{-\infty}^{\infty} [g(v+h)]_k [e^{f(v+h) - hf'(v) - \frac{1}{2}h^2 f''(v)}]_m e^{hf'(v) + \frac{1}{2}h^2 f''(v)} dh;$$

hierin wird das obere oder untere Zeichen benutzt, je nachdem $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v rechts von v positiv oder negativ ist.

Ersetzt man v durch v' , so geht V in V' über, usw.

BEMERKUNG: Zwar steht V hier als endliche Summe elementarer Glieder, aber doch kann man V oft approximativ auf eine andere, für die Anwendungen bequemere Gestalt bringen. Ist $f(z)$ auf einer in der komplexen z -Ebene liegenden Kurve $\mathfrak{B}$ analytisch, und enthält $\mathfrak{B}$ einen Sattelpunkt q von $f(z)$, d.h. einen Punkt q mit $f'(q) = 0$, so wird die Paßmethode unter gewissen Voraussetzungen einen approximativen Wert liefern für das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} (z-v)^{\varkappa} e^{f(z)} dz,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl ≥ 0 bezeichnet. Liegt v nahe genug bei q , so kann man diesen Näherungswert in vielen Fällen auf die Gestalt

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^{\varkappa} [e^{f(v+h) - hf'(v) - \frac{1}{2}h^2 f''(v)}]_m e^{hf'(v) + \frac{1}{2}h^2 f''(v)} dh$$

bringen, so daß V dann approximativ gleich

$$\pm \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{g^{(\varkappa)}(v)}{\varkappa!} \int_{\mathfrak{B}} (z-v)^{\varkappa} e^{f(z)} dz$$

ist. Ich führe das in Satz 15 aus für den Spezialfall, daß v und q zusammenfallen, d.h. $f'(v) = 0$ ist. Der so gefundene Näherungswert ist oft bequemer als der in Satz 8 gegebene Ausdruck.

Jetzt noch eine Bemerkung über die Beiträge A und B .

SATZ 9: 1. *Ist unter den Voraussetzungen von Satz 6*

$$(91) \quad g^{(\kappa)}(a) = 0 \quad (0 \leq \kappa < k),$$

so ist der Beitrag A gleich Null.

2. Ist unter den Voraussetzungen von Satz 6

$$(92) \quad g^{(\kappa)}(b) = 0 \quad (0 \leq \kappa < k),$$

so ist der Beitrag B gleich Null.

Eine Funktion $g(u)$ mit den Eigenschaften (91) und (92) neutralisiert somit den Einfluß der Endpunkte a und b . Eine solche Funktion $g(u)$ nenne ich deshalb einen Neutralisator und zwar k^{ter} Ordnung, und ich kann nun Satz 9 wie folgt formulieren: Ist $g(u)$ unter den Voraussetzungen von Satz 6 ein Neutralisator k^{ter} Ordnung, so verschwinden die Beiträge A und B .

Ich glaube, daß es für die Integralrechnung und für die analytische Zahlentheorie von Bedeutung sein wird, Neutralisatoren einzuführen. Zwar kann diese Einführung bei einfachen Integralen vermieden werden, weil dabei der Rand des Integrationsgebietes aus nur zwei Punkten besteht, aber der Hauptzweck dieser Mitteilungen ist nicht für einfache, sondern für mehrfache Integrale eine Näherungsmethode zu entwickeln. Die Problemstellung der dritten Mitteilung lautet denn auch:

Gesucht werden allgemeine hinreichende Bedingungen, damit das Integral

$$\int \dots \int_{\mathfrak{G}} g(u_1, \dots, u_n) e^{f(u_1, \dots, u_n)} du_1 \dots du_n$$

einen Näherungswert besitzt, der eindeutig bestimmt wird durch das Verhalten der Funktionen $f(u_1, \dots, u_n)$ und $g(u_1, \dots, u_n)$ in der Umgebung höchstens endlich vieler zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkte.

Um den Einfluß des Randes von $\mathfrak{G}$ zu neutralisieren, setze ich alsdann voraus, daß $g(u_1, \dots, u_n)$ auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ mit sämtlichen Derivierten bis zu einer gewissen Ordnung verschwindet. Unter dieser Einschränkung ist es, wie ich in der dritten Mitteilung beweisen werde, möglich, die hier für einfache Integrale entwickelte Methode sinngemäß auf mehrfache zu verallgemeinern, was um so erfreulicher ist, da für mehrfache Integrale noch keine nicht-triviale Näherungsmethode bekannt ist.

§ 2. Hauptsatz.

Im folgenden darf das Intervall (a, b) die Endpunkte a und b nach Belieben enthalten oder nicht; ein im Unendlichen liegender Endpunkt gehört nicht zum Intervall.

Der Hauptsatz dieser Mitteilung lautet folgendermaßen:

SATZ 10: VORAUSSETZUNGEN: 1. Im Intervall (a, b) sei $f(u)$ eine mindestens m -mal ($m \geq 3$) stetig differenzierbare Funktion mit $f''(u) \neq 0$, so daß

$$y(u) = |f'(u)| + \sqrt{|f''(u)|} > 0$$

ist. Die Funktion $\sqrt{|f''(u)|}$ sei stetig, und zwischen a und b mögen nur höchstens endlich viele Punkte u liegen, wo $\frac{f'(u)}{\sqrt{|f''(u)|}}$ reell ist.

2. Es sei l ganz ≥ 0 ; k_λ ganz ≥ 1 ($1 \leq \lambda \leq l$). Im Intervall (a, b) sei $g_\lambda(u)$ ($1 \leq \lambda \leq l$) eine mindestens k_λ mal stetig differenzierbare reelle oder nicht-reelle Funktion.

3. Es sei $\varepsilon > 0$, M ganz ≥ 1 , und die Ungleichung

$$(93) \quad \int_a^b \left| g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f^{(\prime\prime\prime) \varrho_3} \dots f^{(m) \varrho_m} e^f y^{-\eta'}(u) \right| du \leq \varepsilon, \quad (1)$$

wo

$$(94) \quad \eta' = \kappa_1' + \dots + \kappa_l' + 3\varrho_3' + \dots + m\varrho_m'$$

ist, gelte für jedes System von ganzen Zahlen $\kappa_\lambda' \geq 0$ ($1 \leq \lambda \leq l$), $\varrho_\mu' \geq 0$ ($3 \leq \mu \leq m$), für das wenigstens einer der drei folgenden Fälle eintritt:

α) Es sei $\kappa_\lambda' \leq k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$), wobei in genau einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt; $\varrho_m' = 0$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu' < M$.

β) Es sei $\kappa_\lambda' < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$); $\varrho_m' = 0$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu' = M$ oder $= M + 1$ oder $= M + 2$.

γ) Es sei $\kappa_\lambda' < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$); $\varrho_m' = 1$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu' \leq M$ oder $\leq M + 2$, je nachdem $m > 3$ oder $= 3$ ist.

4. Gehört a nicht zum Intervall (a, b) , so besitze jedes System von ganzen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ mit

$$(95) \quad 0 \leq \kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \varrho_\mu \geq 0 \quad (3 \leq \mu < m), \quad \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu < M,$$

wo

$$(96) \quad \eta = \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 3\varrho_3 + \dots + (m-1)\varrho_{m-1}$$

ist, die Eigenschaft

$$g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f^{(\prime\prime\prime) \varrho_3} \dots f^{(m-1) \varrho_{m-1}} e^f y^{-(1+\eta)}(u) \rightarrow 0$$

¹⁾ Das (u) bezeichnet hier und im folgenden, daß $g_1^{(\kappa_1')}(u)$, $g_l^{(\kappa_l')}(u)$, $f^{(\prime\prime\prime)}(u)$, $f^{(m)}(u)$ und $e^{f(u)}$ statt $g_1^{(\kappa_1')}$, $g_l^{(\kappa_l')}$, $f^{(\prime\prime\prime)}$, $f^{(m)}$ und e^f gemeint wird.

für $u \rightarrow a$. Gehört b nicht zum Intervall (a, b) , so gelte entsprechendes mit b statt a .

BEHAUPTUNG: Unter diesen Voraussetzungen kann man dem Endpunkt a eine Zahl A , dem Endpunkt b eine Zahl B , jedem etwaigen zwischen a und b liegenden führenden Punkt $v, v', \dots$ von $f(u)$ eine Zahl $V, V', \dots$ mit

$$\int_a^b g_1(u) \dots g_l(u) e^{f(u)} du = A + B + V + V' + \dots + \omega(m, l, M) \varepsilon$$

zuordnen. Hierbei ist A bei gegebenen $m, l, k_1, \dots, k_l, M$ durch die Zahlen $f^{(\mu)}(a)$ ($3 \leq \mu < m$) und $g_\lambda^{(\kappa)}(a)$ ($1 \leq \lambda \leq l; 0 \leq \kappa < k_\lambda$) eindeutig bestimmt. Analoges gilt für B (mit b statt a), für V (mit v statt a), usw.

HILFSSATZ 1: Es sei Voraussetzung 1 des Hauptsatzes erfüllt.

BEHAUPTUNGEN: 1. Bezeichnet $W(u)$ für jeden zum Intervall (a, b) gehörigen Punkt u , in dem $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ nicht reell ist, den in u anfangenden Hyperbelbogen, gebildet durch Punkte z der komplexen Ebene mit

$$(97) \quad -p = f'(u)(z-u) + \frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2 \text{ reell und } \leq 0,$$

so ist für jedes z auf $W(u)$

$$f'(u) + f''(u)(z-u) \neq 0,$$

so daß $W(u)$ durch $u, f'(u)$ und $f''(u)$ eindeutig bestimmt ist²⁾.

2. Ein etwa zum Intervall (a, b) gehöriger Punkt v , in dem $\frac{f'(v)}{\sqrt{f''(v)}}$ reell ist, besitzt die folgende Eigenschaft:

Strebt ein zum Intervall (a, b) gehöriger Punkt u nach v , wobei entweder stets $u > v$ oder stets $u < v$ ist, so strebt $W(u)$ nach einem aus einer oder zwei geraden Strecken bestehenden Weg, den ich $W(v+)$ oder $W(v-)$ nenne. $W(v+)$ verbindet die Punkte $v, v - \frac{f'(v)}{f''(v)}, v - \frac{f'(v)}{f''(v)} \pm \frac{i\infty}{\sqrt{f''(v)}}$, wobei das obere oder untere Zeichen gemeint wird, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v rechts von v positiv oder negativ ist. $W(v-)$ verbindet die Punkte $v, v - \frac{f'(v)}{f''(v)}, v - \frac{f'(v)}{f''(v)} \pm \frac{i\infty}{\sqrt{f''(v)}}$, wobei das obere oder untere Zeichen

²⁾ Die Kurve $W(u)$ in der z -Ebene und die positive reelle Achse der p -Ebene sind nämlich durch (97) konform aufeinander abgebildet.

gemeint wird, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v links von v positiv oder negativ ist.

BEMERKUNG: Hat $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v ein festes Vorzeichen, so ist $W(v+) = W(v-)$. Diesen Weg bezeichne ich einfach mit $W(v)$.

BEWEIS: 1. Gäbe es einen Punkt z mit (97) und

$$f'(u) + f''(u)(z-u) = 0,$$

so wäre

$$z - u = -\frac{f'(u)}{f''(u)}, \text{ also } -\frac{(f'(u))^2}{2f''(u)} \text{ reell und } \leq 0,$$

in Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ nicht reell ist.

2. Ich brauche die zweite Behauptung nur für $W(v+)$ zu beweisen, da der Beweis für $W(v-)$ gerade ebenso geht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich annehmen, daß $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v , rechts von v , positiv ist; denn sonst brauche ich nur $\sqrt{f''(u)}$ durch $-\sqrt{f''(u)}$ zu ersetzen.

Für jeden Punkt z von $W(u)$ ist wegen (97)

$$(98) \quad f'(u)(z-u) + \frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2 = -p,$$

wo $p \geq 0$. Bei gegebenen u und p ist der durch (98) definierte Punkt z von $W(u)$, den ich $z_p(u)$ nennen werde, eindeutig bestimmt. Folglich ist

$$(99) \quad z_p(u) = u + \frac{1}{\sqrt{f''(u)}} \left\{ \Omega_p(u) - \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}} \right\},$$

wo $\Omega_p(u)$ eine stetige Funktion von p ($p \geq 0$) bezeichnet, die für $p = 0$ den Wert $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ besitzt, und für $p \geq 0$ gleich einer

der zwei Zahlen $\pm \sqrt{-2p + \frac{f'^2(u)}{f''(u)}}$ ist. Da $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ nicht reell,

also $\frac{f'^2(u)}{f''(u)}$ nicht ≥ 0 ist, nimmt $-2p + \frac{f'^2(u)}{f''(u)}$ für kein einziges $p \geq 0$ einen Wert ≥ 0 an, so daß $\arg \Omega_p(u)$ niemals gleich einem Vielfachen von π ist. Das Argument von $\Omega_p(u)$, das eine stetige Funktion von p ist und wegen

$$\Omega_0(u) = \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}; \quad \Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}} > 0$$

für $p = 0$ zwischen 0 und π liegt, liegt somit für jedes $p \geq 0$ zwischen 0 und π .

Ist $p > \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}$, so strebt $\Omega_p(u)$ für $u \rightarrow v$ bei festem p nach der rein imaginären Zahl $\sqrt{-2p + \frac{f'^2(v)}{f''(v)}}$, deren Argument also gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Wird dieser Grenzwert ih_p genannt, so ist also $h_p > 0$. Aus (99) geht nun hervor

$$z_p(u) \rightarrow v - \frac{f'(v)}{f''(v)} + \frac{ih_p}{\sqrt{f''(v)}},$$

so daß der Teil von $W(u)$, der den Werten $p > \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}$ entspricht, nach der Halbgeraden strebt, die die Punkte $v - \frac{f'(v)}{f''(v)}$ und $v - \frac{f'(v)}{f''(v)} + \frac{i\infty}{\sqrt{f''(v)}}$ verbindet.

Für $0 \leq p \leq \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}$ strebt die in (99) genannte Zahl $z_p(u)$ nach der in p stetigen Funktion $v - \frac{f'(v)}{f''(v)} \pm \frac{1}{\sqrt{f''(v)}} \sqrt{-2p + \frac{f'^2(v)}{f''(v)}}$, die für $p = 0$ den Wert v und für $p = \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}$ den Wert $v - \frac{f'(v)}{f''(v)}$ annimmt. Folglich strebt der Teil von $W(u)$, der den Werten von p mit $0 \leq p \leq \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}$ entspricht, nach der Strecke, die die Punkte v und $v - \frac{f'(v)}{f''(v)}$ verbindet.

Hiermit ist die zweite Behauptung bewiesen.

HILFSSATZ 2: *Unter Voraussetzung 1 des Hauptsatzes ist für jedes u des Intervalles (a, b) und für jedes z auf dem im vorigen Hilfssatz eingeführten Weg $W(u)$*

$$f'(u)(z-u) + \frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2 \leq -\frac{1}{8}|f'(u)|\sigma \text{ und } \leq -\frac{1}{24}|f''(u)|\sigma^2,$$

wo σ die Länge von $W(u)$ zwischen u und z bezeichnet. Ist $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ reell, so wird mit $W(u)$ nach Belieben $W(u+)$ oder $W(u-)$ gemeint.

BEWEIS: Ich darf $z \neq u$ voraussetzen, da sonst die Behauptung evident ist. Ich ordne dem auf $W(u)$ liegenden Punkt z einen auf $W(u)$ zwischen u und z liegenden Punkt x mit $|u-x| = |x-z|$ zu. $W(u)$ ist Teil einer Hyperbel, deren Asymptoten senkrecht aufeinander stehen, und die also gleichseitig ist.

Folglich gilt für die Länge σ des zwischen u und z liegenden Bogens von $W(u)$ die Ungleichung $\sigma \leq \sqrt{2} |u - z|$, also

$$(100) \quad \frac{1}{|u - x|} = \frac{1}{|x - z|} \leq \frac{2}{|u - z|} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sigma}.$$

Für jedes quadratische Polynom $p(z)$ mit $p(u) = 0$ gelten die Identitäten

$$(101) \quad p'(u) = \frac{(u-x)p(z)}{(u-z)(x-z)} + \frac{(u-z)p(x)}{(x-u)(x-z)}$$

und

$$(102) \quad \frac{1}{2} p''(u) = \frac{p(z)}{(u-z)(x-z)} + \frac{p(x)}{(x-u)(x-z)}.$$

Das spezielle quadratische Polynom

$$p(z) = -f'(u)(z-u) - \frac{1}{2} f''(u)(z-u)^2$$

besitzt außerdem noch die Eigenschaften

$$(103) \quad p(z) > p(x) > 0; \quad p'(u) = -f'(u); \quad p''(u) = -f''(u).$$

Aus (103), (101), (103), (100) und

$$|u - x| = |x - z| \quad \text{und} \quad |u - z| \leq |u - x| + |x - z|$$

folgt

$$(104) \quad |f'(u)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma} p(z) + \frac{4\sqrt{2}}{\sigma} p(z) = \frac{5\sqrt{2}}{\sigma} p(z) < \frac{8}{\sigma} p(z).$$

Aus (103), (102), (103) und (100) geht ferner hervor:

$$(105) \quad \frac{1}{2} |f''(u)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} p(z) + \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} p(z) = \frac{12}{\sigma^2} p(z).$$

Die Beziehungen (104) und (105) liefern die Behauptung von Hilfssatz 2.

HILFSSATZ 3: *Ist Voraussetzung 1 des Hauptsatzes erfüllt, und wird für jedes zum Intervall (a, b) gehörige u , wo $\frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ nicht reell ist,*

$$(106) \quad \psi_0(u) = e^{f(u)},$$

bzw. für jedes ganze $\zeta \geq 1$

$$(107) \quad \psi_\zeta(u) = \frac{1}{(\zeta-1)!} \int_{W(u)} (z-u)^{\zeta-1} e^{f(u)+f'(u)(z-u)+\frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2} dz$$

gesetzt, wo $W(u)$ den in Hilfssatz 1 eingeführten Weg bezeichnet, so ist für jedes ganze $\zeta \geq 0$

$$(108) \quad \psi_{\zeta}(u) = \omega(\zeta) e^{f(u)} y^{-\zeta}(u)$$

und

$$(109) \quad \psi_{\zeta}(u) = -\psi'_{\zeta+1}(u) + \frac{1}{2}(\zeta+1)(\zeta+2)f'''(u)\psi_{\zeta+3}(u).$$

BEWEIS: Der Spezialfall von (108) mit $\zeta = 0$ ist wegen (106) evident. Für $\zeta \geq 1$ folgt aus dem vorigen Hilfssatz wegen (107) und $|z - u| \leq \sigma$

$$\psi_{\zeta}(u) = \omega(\zeta) e^{f(u)} \int_0^{\infty} \sigma^{\zeta-1} e^{-\frac{1}{8}|f'(u)|\sigma} d\sigma = \frac{\omega(\zeta) e^{f(u)}}{|f'(u)|^{\zeta}}$$

und

$$\psi_{\zeta}(u) = \omega(\zeta) e^{f(u)} \int_0^{\infty} \sigma^{\zeta-1} e^{-\frac{1}{24}|f''(u)|\sigma^2} d\sigma = \frac{\omega(\zeta) e^{f(u)}}{|f''(u)|^{\frac{1}{2}\zeta}},$$

woraus (108) hervorgeht.

Wird für ganzes $\zeta \geq 0$

$$(110) \quad F_{\zeta}(u, z) = \frac{1}{\zeta!} (z-u)^{\zeta} e^{f(u)+f'(u)(z-u)+\frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2}$$

gesetzt, so ist für hinreichend kleines $h \geq 0$ nach dem Cauchy-schen Integralsatz und der Definition des Weges W

$$\int_{W(u+h)} F_{\zeta}(u+h, z) dz - \int_{W(u)} F_{\zeta}(u+h, z) dz = - \int_u^{u+h} F_{\zeta}(u+h, z) dz;$$

hierin wird h so gewählt, daß $u + h$ noch zum Intervall (a, b) gehört. Wegen

$$F_0(u, u) = e^{f(u)} = \psi_0(u) \text{ und } F_{\zeta}(u, u) = 0 \quad \text{für } \zeta \geq 1$$

ist also für $h \rightarrow 0$

$$(111) \quad \frac{1}{h} \int_{W(u+h)} F_{\zeta}(u+h, z) dz - \frac{1}{h} \int_{W(u)} F_{\zeta}(u+h, z) dz \rightarrow -\psi_0(u) \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\zeta = 0$ oder $\zeta > 0$ ist.

Wegen (110) ist

$$\frac{\partial F_{\zeta}(u, z)}{\partial u} = \left\{ \frac{1}{\zeta!} (z-u)^{\zeta+2} \frac{f'''(u)}{2} - \frac{1}{(\zeta-1)!} (z-u)^{\zeta-1} \right\} e^{f(u)+f'(u)(z-u)+\frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2};$$

für $\zeta = 0$ fällt das zweite Glied zwischen den geschweiften Klammern fort. Folglich ist bei nach Null strebendem h

$$(112) \left\{ \begin{aligned} & \int_{W(u)} \frac{F_0(u+h, z) - F_0(u, z)}{h} dz \\ & \rightarrow \frac{1}{2} f'''(u) \int_{W(u)} (z-u)^2 e^{f(u)+f'(u)(z-u)+\frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2} dz \\ & = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 f'''(u) \psi_3(u) \end{aligned} \right.$$

wegen (107), und für $\zeta \geq 1$

$$(113) \left\{ \begin{aligned} & \int_{W(u)} \frac{F_\zeta(u+h, z) - F_\zeta(u, z)}{h} dz \\ & \rightarrow \int_{W(u)} \left\{ \frac{1}{\zeta!} (z-u)^{\zeta+2} \frac{f'''(u)}{2} - \frac{1}{(\zeta-1)!} (z-u)^{\zeta-1} \right\} e^{f(u)+f'(u)(z-u)+\frac{1}{2}f''(u)(z-u)^2} dz \\ & = \frac{1}{2} (\zeta+1)(\zeta+2) f'''(u) \psi_{\zeta+3}(u) - \psi_\zeta(u) \end{aligned} \right.$$

wegen (107). Schließlich ist

$$\frac{\psi_{\zeta+1}(u+h) - \psi_{\zeta+1}(u)}{h} = \frac{1}{h} \int_{W(u+h)} F_\zeta(u+h, z) dz - \frac{1}{h} \int_{W(u)} F_\zeta(u+h, z) dz + \int_{W(u)} \frac{F_\zeta(u+h, z) - F_\zeta(u, z)}{h} dz;$$

so daß (109) aus (111), (112) und (113) folgt.

HILFSSATZ 4: VORAUSSETZUNGEN: 1 und 2. *Es seien die Voraussetzungen 1 und 2 des Hauptsatzes erfüllt.*

3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine endliche nicht leere Menge von Systemen $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$, die aus ganzen nicht-negativen Zahlen mit $\kappa_\lambda < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$) und $\varrho_m = 0$ bestehen. Enthält $\mathfrak{M}$ ein System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$, so enthalte $\mathfrak{M}$ auch alle Systeme $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_m)$ von ganzen nicht-negativen Zahlen mit*

$$\kappa'_\lambda \leq \kappa_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \varrho'_m = 0 \text{ und } \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu \leq \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu.$$

Die Anzahl der zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Systeme werde mit q bezeichnet.

4. *Es sei $\varepsilon > 0$. Für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_m)$ gelte die Ungleichung*

$$(114) \quad \int_a^b \left| g_1^{(\kappa'_1)} \dots g_l^{(\kappa'_l)} f^{(\varrho'_3)} \dots f^{(\varrho'_m)} e^{f y^{-\eta'}}(u) \right| du \leq \varepsilon$$

mit

$$\eta' = \kappa'_1 + \dots + \kappa'_l + 3\varrho'_3 + \dots + m\varrho'_m,$$

falls wenigstens einer der drei folgenden Fälle auftritt:

$\alpha)$ Bei geeignet gewähltem λ' ($1 \leq \lambda' \leq l$) gehört das System $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_{\lambda'-1}, \kappa'_{\lambda'} - 1, \kappa'_{\lambda'+1}, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_m)$ zu $\mathfrak{M}$.

$\beta)$ Das System $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3 - 1, \varrho'_4, \dots, \varrho'_m)$ gehört zu $\mathfrak{M}$.

$\gamma)$ Bei geeignet gewähltem μ' ($3 \leq \mu' \leq m-1$) gehört das System $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_{\mu'-1}, \varrho'_{\mu'} - 1, \varrho'_{\mu'+1} + 1, \varrho'_{\mu'+2}, \dots, \varrho'_m)$ zu $\mathfrak{M}$.

5. Gehört a nicht zum Intervall (a, b) , so besitze jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ die Eigenschaft

$$(115) \quad g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f''^{\varrho_3} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}} e^f y^{-(1+\eta)}(u) \rightarrow 0$$

für $u \rightarrow a$; hierin ist

$$\eta = \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 3\varrho_3 + \dots + (m-1)\varrho_{m-1}.$$

Gehört b nicht zum Intervall (a, b) , so gelte analoges mit b statt a .

BEHAUPTUNGEN: 1. Für jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau_3, \dots, \tau_m)$ kann man das Integral

$$I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = \int_a^b g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f''^{\tau_3} \dots f^{(m)\tau_m} \psi_\zeta(u) du,$$

wo

$$\zeta = \sigma_1 + \dots + \sigma_l + 3\tau_3 + \dots + m\tau_m$$

ist und $\psi_\zeta(u)$ durch (106) und (107) definiert wird, auf die Gestalt

$$A + B + V + V' + \dots + \omega(m, l, q)\varepsilon$$

bringen.

2. Es gibt ein Polynom $p_u(h)$ in h , dessen Koeffizienten von der im Intervall (a, b) liegenden Zahl u abhängen, mit

$$(116) \quad A = \int_{W(a+)} p_a(h-a) e^{f(a) + (h-a)f'(a) + \frac{1}{2}(h-a)^2 f''(a)} dh,$$

$$(117) \quad -B = \int_{W(b-)} p_b(h-b) e^{f(b) + (h-b)f'(b) + \frac{1}{2}(h-b)^2 f''(b)} dh$$

und

$$(118) \quad V = \pm \int_{-\infty}^{\infty} p_v(h) e^{f(v) + hf'(v) + \frac{1}{2}h^2 f''(v)} dh;$$

dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v , rechts von v , positiv oder negativ ist. Ersetzt man in (118) v durch v' , so geht V in V' über, usw.

Man hat

$$(119) \quad \begin{cases} p_a(h) = 0 \text{ und } A = 0, \text{ falls } a \text{ nicht zu } (a, b) \text{ gehört;} \\ p_b(h) = 0 \text{ und } B = 0, \text{ falls } b \text{ nicht zu } (a, b) \text{ gehört.} \end{cases}$$

Für jedes u des Intervalles (a, b) kann $p_u(h)$ auf die Gestalt

$$(120) \quad p_u(h) = \sum_1 C g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''\varrho_3 \dots f^{(m)}\varrho_m(u) h^\eta$$

mit

$$(121) \quad \eta = \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 3\varrho_3 + \dots + (m-1)\varrho_{m-1}$$

gebracht werden, wo die Summe $\sum_1$ über alle zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Systeme $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ erstreckt wird. Dabei ist der Koeffizient

$$C = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = C_{\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau_3, \dots, \tau_m}$$

eindeutig bestimmt durch $l, m, \kappa_\lambda, \varrho_\mu, \sigma_\lambda, \tau_\mu$, also unabhängig von der Wahl der Menge $\mathfrak{M}$ und der Funktionen $f(u)$ und $g_\lambda(u)$.

BEMERKUNG: Der erste Schritt des Beweises liefert rekurrente Beziehungen zwischen den Koeffizienten C , durch die sie berechnet werden können. Aber die so gefundenen Ausdrücke sind für beliebige Werte von σ_λ und τ_μ sehr kompliziert, und ich brauche die Koeffizienten C nur in einem sehr speziellen Fall zu kennen. Die Bestimmung der Koeffizienten in diesem Spezialfall wird in Satz 13 geschehen, und zwar auf viel einfachere Weise.

BEWEIS von Hilfssatz 4.

Erster Schritt: Für jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ und für jedes System von ganzen nicht-negativen Zahlen $(\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau_3, \dots, \tau_m)$ definiere ich die Zahlen $C = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu}$ (daß diese Zahlen auch von l, m, κ_λ und ϱ_μ abhängen, brauche ich nicht in der Bezeichnung anzugeben) folgendermaßen: Gelten die Beziehungen

$$(122) \quad \sigma_\lambda \leq \kappa_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \zeta = \sum_{\lambda=1}^l \sigma_\lambda + \sum_{\mu=3}^m \mu \tau_\mu \leq \eta; \quad \tau_m = 0$$

nicht alle, so sei $C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = 0$; sonst darf ich annehmen, daß die Zahlen $C_{\sigma'_\lambda, \tau'_\mu}$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^l \sigma'_\lambda + \sum_{\mu=3}^m \mu \tau'_\mu > \zeta$$

schon definiert sind, und dann setze ich

$$(123) \quad \begin{cases} C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = \frac{1}{2}(\zeta+1)(\zeta+2) C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} + \sum_{\varphi=1}^l C_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} \\ + \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_\varphi C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} + \frac{\Theta}{\zeta!} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)}\tau_{m-1}(u) \end{cases}$$

hierin ist

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 = 1; \quad \Delta_\mu = 0 \quad (\mu > 3); \quad \delta_{ij} = 1 \quad (i=j); \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \\ \Theta = 1, \text{ falls } \kappa_\lambda = \sigma_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l) \text{ und } \varrho_\mu = \tau_\mu \quad (3 \leq \mu \leq m-1); \\ \Theta = 0 \text{ sonst.} \end{array} \right.$$

Ich behaupte, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$

$$C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = 0$$

ist.

Beweis: Ich darf annehmen, daß die Beziehungen (122) alle erfüllt sind, da sonst die Behauptung evident ist. Aus der dritten Voraussetzung des Hilfssatzes geht hervor, daß ein beliebiges ganzzahliges System $(\sigma'_\lambda, \tau'_\mu)$ mit

$$\sigma'_\lambda \geq \sigma_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \sum_{\mu=3}^m \mu \tau'_\mu \geq \sum_{\mu=3}^m \mu \tau_\mu; \quad \sum_{\lambda=1}^l \sigma'_\lambda + \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu > \zeta$$

nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, da $\mathfrak{M}$ mit $(\sigma'_\lambda, \tau'_\mu)$ auch $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ enthalten würde. Ich darf voraussetzen, daß die Behauptung des ersten Schrittes schon bewiesen ist, wenn $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ durch ein derartiges System $(\sigma'_\lambda, \tau'_\mu)$ ersetzt wird, d.h. ich darf für jedes solche System $(\sigma'_\lambda, \tau'_\mu)$

$$C_{\sigma'_\lambda, \tau'_\mu} = 0$$

annehmen. Dann verschwinden alle auf der rechten Seite von (123) auftretenden Glieder (man beachte, daß dabei $\Theta = 0$ ist), woraus die Behauptung des ersten Schrittes folgt.

Zweiter Schritt. Um Hilfssatz 4 für das System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ zu beweisen, darf ich annehmen, daß er schon bewiesen ist, wenn $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ durch jedes in $\mathfrak{M}$ vorkommende System $(\sigma'_\lambda, \tau'_\mu)$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^l \sigma'_\lambda + \sum_{\mu=3}^m \mu \tau'_\mu > \zeta$$

ersetzt wird.

Beweis: Klar.

Dritter Schritt: Für jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ kann $I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu}$, wobei Δ_μ durch (124) festgelegt wird, auf die Gestalt

$$(125) \quad I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} = A^* + B^* + V^* + \dots + \omega(m, l, q)\varepsilon$$

gebracht werden; dabei bleiben die Beziehungen (116), (117), (118), (119) und (120) gültig, wenn $C, p_u(h), A, B, V, \dots$ durch $C^* = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu}, p_u^*(h), A^*, B^*, V^*, \dots$ ersetzt werden.

Beweis: Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Das System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu)$ kommt nicht in der Menge $\mathfrak{M}$ vor. Hier tritt der in Voraussetzung 4 genannte Fall β ein mit $\kappa'_\lambda = \sigma_\lambda$ und $\varrho'_\mu = \tau_\mu + \Delta_\mu$, so daß (114) gilt. Diese Relation verwandelt sich wegen (108) in

$$(126) \quad I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} = \omega(\zeta + 3)\varepsilon = \omega(m, l, q)\varepsilon.$$

Da $(\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu)$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist nach der Behauptung des ersten Schrittes

$$C^* = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} = 0.$$

Die Formeln (116), (117), (118), (119) und (120) bleiben also gültig, wenn A durch $A^* = 0$, B durch $B^* = 0$, $p_u(h)$ durch $p_u^*(h) = 0$ und C durch $C^* = 0$ ersetzt werden; Beziehung (126) verwandelt sich dann in (125).

2. Das System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu)$ kommt in der Menge $\mathfrak{M}$ vor. Nach dem zweiten Schritt darf der zu beweisende Hilfssatz nun mit $\tau_\mu + \Delta_\mu$ statt τ_μ , und mit $\zeta + 3$ statt ζ angewendet werden. Das Resultat ist die Behauptung des dritten Schrittes.

Vierter Schritt: Wird δ_{ij} durch (124) festgelegt, so kann für jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ und für $\varphi = 1, \dots, l$ das Integral $I_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu}$ auf die Gestalt

$$(127) \quad I_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} = A_\varphi + B_\varphi + V_\varphi + \dots + \omega(m, l, q)\varepsilon$$

gebracht werden; dabei bleiben die Beziehungen (116), (117), (118), (119) und (120) gültig, wenn C , $p_u(h)$, A , B , V , ... durch

$$C_\varphi = C_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu}, p_{u, \varphi}(h), A_\varphi, B_\varphi, V_\varphi, \dots$$

ersetzt werden.

Beweis: Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Das System $(\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu)$ kommt nicht in der Menge $\mathfrak{M}$ vor. Hier tritt der in Voraussetzung 4 genannte Fall α mit $\kappa'_\lambda = \sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}$, $\varrho'_\mu = \tau_\mu$, $\lambda' = \varphi$ ein, so daß die Relation (114) gilt. Diese Relation verwandelt sich wegen (108) in

$$(128) \quad I_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} = \omega(\zeta + 1)\varepsilon = \omega(m, l, q)\varepsilon.$$

Da $(\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu)$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist nach der Behauptung des ersten Schrittes

$$C_\varphi = C_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} = 0.$$

Die Formeln (116), (117), (118), (119) und (120) bleiben also gültig wenn A durch $A_\varphi = 0$, B durch $B_\varphi = 0$, $p_u(h)$ durch $p_{u,\varphi}(h) = 0$ und C durch $C_\varphi = 0$ ersetzt werden; Beziehung (128) verwandelt sich dann in (127).

2. Das System $(\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu)$ kommt in der Menge $\mathfrak{M}$ vor. Nach dem zweiten Schritt darf der zu beweisende Hilfssatz nun mit $\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}$ statt σ_λ und mit $\zeta + 1$ statt ζ angewendet werden. Das Resultat ist die Behauptung des vierten Schrittes.

Fünfter Schritt: Für jedes zu $\mathfrak{M}$ gehörige System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu)$ und für jedes ganze φ mit $3 \leq \varphi \leq m - 1$ und $\tau_\varphi > 0$ kann das Integral $I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}}$ auf die Gestalt

$$(129) \quad I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} = A_\varphi^* + B_\varphi^* + V_\varphi^* + \dots + \omega(m, l, q)\varepsilon$$

gebracht werden; dabei bleiben die Beziehungen (116), (117), (118), (119) und (120) gültig, wenn A durch A_φ^* , B durch B_φ^* , V durch V_φ^* , $p_u(h)$ durch $p_{u,\varphi}^*(h)$ und C durch

$$C_\varphi^* = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}}$$

ersetzt werden.

Beweis: Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Das System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi})$ kommt nicht in $\mathfrak{M}$ vor. Hier tritt der in Voraussetzung 4 genannte Fall γ mit $\kappa'_\lambda = \sigma_\lambda$, $\varrho'_\mu = \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}$, $\mu' = \varphi$ ein, so daß die Relation (114) gilt. Diese Relation verwandelt sich wegen (108) in

$$I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} = \omega(\zeta + 1)\varepsilon = \omega(m, l, q)\varepsilon.$$

Da $(\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi})$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist nach der Behauptung des ersten Schrittes

$$(130) \quad C_\varphi^* = C_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} = 0.$$

Die Formeln (116), (117), (118), (119) und (120) bleiben also gültig, wenn A durch $A_\varphi^* = 0$, B durch $B_\varphi^* = 0$, $p_u(h)$ durch $p_{u,\varphi}^*(h) = 0$ und C durch $C_\varphi^* = 0$ ersetzt werden; Beziehung (130) verwandelt sich dann in (129).

2. Das System $(\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi})$ kommt in $\mathfrak{M}$ vor. Nach dem zweiten Schritt darf der zu beweisende Hilfssatz nun mit $\tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}$ statt τ_μ , und mit $\zeta + 1$ statt ζ angewendet werden. Das Resultat ist die Behauptung des fünften Schrittes.

Sechster Schritt: Abschluß des Beweises.

Aus (109) geht hervor

$$(131) \quad I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = \frac{1}{2}(\zeta+1)(\zeta+2) I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} \\ - \int_a^b g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}} \psi'_{\zeta+1}(u) du.$$

Mittels partieller Integration bringen wir das Schlußglied auf die Gestalt

$$(132) \quad \sum_{\varphi=1}^l I_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} + \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_\varphi I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} \\ + A^{**} + B^{**} + V^{**} + \dots^3);$$

dabei bleiben die Formeln (116), (117), (118), (119) und (120) gültig, wenn A durch A^{**} , B durch B^{**} , V durch V^{**} , $p_u(h)$ durch

$$p_u^{**}(h) = \frac{1}{\zeta!} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}}(u) h^\zeta$$

und C durch

$$C^{**} = \frac{\Theta}{\zeta!} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}}(u)$$

ersetzt werden; Θ ist durch (124) festgelegt.

Mit der Bezeichnung der vorigen Schritte verwandelt (123) sich nun in

$$C = \frac{1}{2}(\zeta+1)(\zeta+2) C^* + C^{**} + \sum_{\varphi=1}^l C_\varphi + \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_\varphi C_\varphi^*.$$

In dieser Formel darf man alle Buchstaben C durch A , durch B , und durch $V, \dots$ ersetzen, wenn nur $p_u(h)$ durch (119) und (120), A durch (116), B durch (117), V durch (118), $\dots$ festgelegt werden.

Aus (131) und (132) folgt nun

$$I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu} = \frac{1}{2}(\zeta+1)(\zeta+2) I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu + \Delta_\mu} + \sum_{\varphi=1}^l I_{\sigma_\lambda + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_\mu} \\ + \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_\varphi I_{\sigma_\lambda, \tau_\mu - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{\mu-1, \varphi}} + A^{**} + B^{**} + V^{**} + \dots \\ = A + B + V + \dots + \omega(m, l, q)\varepsilon$$

nach den Schritten III, IV und V.

Hiermit ist Hilfssatz 4 vollständig bewiesen.

³⁾ Siehe den Nachtrag am Schluß dieser Arbeit.

Beweis des Hauptsatzes.

Ich wende Hilfssatz 4 an für den Spezialfall, daß $\mathfrak{M}$ aus den Systemen $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ von ganzen nicht-negativen Zahlen mit

$$(133) \quad \kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \varrho_m = 0; \quad \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu < M$$

besteht. Um zu zeigen, daß die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes erfüllt sind, brauche ich nur die vierte Voraussetzung zu untersuchen, da die Gültigkeit der übrigen Voraussetzungen evident ist.

Es sei $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_m)$ irgend ein nicht zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System. Ich untersuche nun die drei in Voraussetzung 4 von Hilfssatz 4 auftretenden Fälle α , β und γ .

α) Bei geeignet gewähltem λ' ($1 \leq \lambda' \leq l$) kommt das durch

$$\kappa_\lambda = \kappa'_\lambda \quad (\lambda \neq \lambda'); \quad \kappa_{\lambda'} = \kappa'_{\lambda'} - 1; \quad \varrho_\mu = \varrho'_\mu$$

definierte System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ in $\mathfrak{M}$ vor, so daß die Beziehungen (133) gelten. Dann tritt der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannte Fall α ein.

β) Das System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ mit

$$\kappa_\lambda = \kappa'_\lambda, \quad \varrho_3 = \varrho'_3 - 1, \quad \varrho_\mu = \varrho'_\mu \quad (\mu > 3)$$

kommt in $\mathfrak{M}$ vor, so daß wiederum die Beziehungen (133) gelten.

Ist $m > 3$, so ist $\varrho'_m = \varrho_m = 0$, also

$$\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu \geq M,$$

da sonst $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_l, \varrho'_3, \dots, \varrho'_m)$ zu $\mathfrak{M}$ gehören würde. Folglich ist

$$M \leq \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu = \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu + 3 < M + 3,$$

so daß der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannte Fall β eintritt.

Ist dagegen $m = 3$, so ist $\varrho'_m = \varrho_m + 1 = 1$, und

$$\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu = \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu + 3 < M + 3,$$

so daß dann der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannte Fall γ eintritt.

γ) Bei geeignet gewähltem μ' ($3 \leq \mu' \leq m-1$) kommt das durch

$$\kappa_\lambda = \kappa'_\lambda; \varrho_{\mu'} = \varrho'_{\mu'} - 1; \varrho_{\mu'+1} = \varrho'_{\mu'+1} + 1; \varrho_\mu = \varrho'_\mu \quad (\mu \neq \mu', \mu \neq \mu' + 1)$$

definierte System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ in $\mathfrak{M}$ vor, so daß die Beziehungen (133) gelten.

Ist $\mu' < m-1$, so ist $\varrho'_m = \varrho_m = 0$, also (die erste Ungleichung genau wie in Fall β)

$$M \leq \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu = \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu + 1 < M + 1,$$

so daß dann der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannte Fall β eintritt.

Ist dagegen $\mu' = m-1$, so ist $\varrho_m = \varrho'_m + 1 = 1$,

$$\sum_{\mu=3}^m \mu \varrho'_\mu = \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu + 1 \leq M,$$

so daß der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannte Fall γ eintritt.

Folglich tritt stets wenigstens einer der in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannten Fälle α , β und γ ein, so daß Ungleichung (93) gilt. Hieraus geht hervor, daß die vierte Voraussetzung von Hilfssatz 4 erfüllt ist. Daher darf ich Hilfssatz 4 hier anwenden, und der Spezialfall dieses Hilfssatzes mit $\sigma_1 = \dots = \sigma_l = \tau_3 = \dots = \tau_m = 0$ liefert die Behauptung des Hauptsatzes.

*

§ 3. Über die Beiträge A , B und V .

In diesem Paragraphen werde ich die Beiträge A , B und V , die in der Behauptung des Hauptsatzes auftreten, berechnen.

SATZ 11: *Es seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt, und es werde*

$$p_u^*(h) = [g_1(u+h)]_{k_1} \dots [g_l(u+h)]_{k_l} [e^{[f(u+h)]_m - f(u) - h f'(u) - \frac{1}{2} h^2 f''(u)}]_M$$

gesetzt.

Gehört a nicht zum Intervall (a, b) , so ist $A = 0$; sonst ist

$$(134) \quad A = \int_{W(a)} p_a^*(h-a) e^{f(a) + (h-a) f'(a) + \frac{1}{2} (h-a)^2 f''(a)} dh.$$

Gehört b nicht zum Intervall (a, b) , so ist $B = 0$; sonst ist

†

$$(135) \quad -B = \int_{W(b-)}^{\infty} p_b^*(h-b) e^{f(b)+(h-b)f'(b)+\frac{1}{2}(h-b)^2 f''(b)} dh.$$

Für jeden etwaigen zwischen a und b liegenden führenden Punkt v der Funktion $f(u)$ ist

$$(136) \quad V = \pm \int_{-\infty}^{\infty} p_v^*(h) e^{f(v)+hf'(v)+\frac{1}{2}h^2 f''(v)} dh,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v , rechts von v , positiv oder negativ ist.

Beweis.

Erster Schritt: Wie aus dem Schluß des vorigen Paragraphen hervorgeht, sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllt, wenn $\mathfrak{M}$ die Menge der Systeme $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_m)$ von ganzen nicht-negativen Zahlen mit

$$(137) \quad \kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \varrho_m = 0; \quad \sum_{\mu=3}^m \mu \varrho_\mu < M$$

ist.

Aus (119) folgt, daß A bzw. B verschwindet, falls a bzw. b nicht zum Intervall (a, b) gehört.

Nach der zweiten Behauptung von Hilfssatz 4, mit $\sigma_\lambda = 0$ und $\tau_\mu = 0$ angewendet, kann man das in Hilfssatz 4 auftretende Polynom $p_u(h)$ für jedes dem Intervall (a, b) angehörige u auf die Gestalt

$$p_u(h) = \sum_1 C g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''^{\varrho_3} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(u) h^\eta$$

mit

$$\eta = \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 3\varrho_3 + \dots + (m-1)\varrho_{m-1}$$

bringen, wo die Summe $\sum_1$ erstreckt wird über die Systeme von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_\lambda, \varrho_\mu$ ($1 \leq \lambda \leq l; 3 \leq \mu < m$) mit (137), und wo der Koeffizient C eindeutig durch $l, m, \kappa_\lambda, \varrho_\mu$ bestimmt wird.

Das Polynom $p_u^*(h)$ kann auf eine entsprechende Gestalt

$$p_u^*(h) = \sum_1 C^* g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''^{\varrho_3} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(u) h^\eta$$

gebracht werden, wo C^* gleichfalls durch l, m, κ_λ und ϱ_μ eindeutig bestimmt ist. Verlangt wird, für jedes System von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_\lambda, \varrho_\mu$ mit (137) zu beweisen, daß

$$C = C^*$$

ist, denn dann stimmen die Polynome $p_u(h)$ und $p_u^*(h)$ überein. Diese Beziehung werde ich im vierten Schritt beweisen.

Zweiter Schritt: Ist

$$(138) \quad x \geq 1, \quad 0 \leq \sigma_\mu \leq 1 \quad (3 \leq \mu < m), \quad |\tau_{\lambda\kappa}| \leq 1 \quad (1 \leq \lambda \leq l; \quad 0 \leq \kappa < k_\lambda)$$

und wird

$$(139) \quad F(u) = -\frac{1}{2}x^2u^2 - \sum_{\mu=3}^{m-1} \frac{\sigma_\mu}{\mu!} u^\mu$$

und

$$(140) \quad G_\lambda(u) = \sum_{\kappa=0}^{k_\lambda-1} \frac{\tau_{\lambda\kappa}}{\kappa!} u^\kappa \quad (1 \leq \lambda \leq l)$$

gesetzt, so ist in der Bezeichnung des vorigen Schrittes (man beachte, daß die Koeffizienten C nicht von f und g_λ abhängen)

$$(141) \quad \begin{cases} \int_0^\infty G_1(u) \dots G_l(u) e^{F(u)} du \\ = \sum_1 C G_1^{(\kappa_1)} \dots G_l^{(\kappa_l)} F'''^{\varrho_3} \dots F^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) \int_0^\infty h^\eta e^{-\frac{1}{2}x^2h^2} dh \\ + \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) x^{-1-M}. \end{cases}$$

BEWEIS: Ich werde zunächst zeigen, daß die Voraussetzungen des Hauptsatzes mit

$$(142) \quad a // 0, \quad b // \infty, \quad f(u) // F(u), \quad g_\lambda(u) // G_\lambda(u) \quad (1 \leq \lambda \leq l)$$

erfüllt sind ⁴⁾.

1. Wegen (139) und (138) ist $F''(u) \leq -x^2$ für jedes $u \geq 0$, also

$$(143) \quad Y(u) = |F'(u)| + \sqrt{|F''(u)|} \geq x$$

und $F''(u) < 0$. Es gibt somit kein einziges positives u , wo $\frac{F'(u)}{\sqrt{F''(u)}}$ reell ist, so daß $F(u)$ keinen führenden Punkt $u > 0$ besitzt. Aus (139) und (138) folgt außerdem noch für jedes $u \geq 0$

$$(144) \quad F^{(\mu)}(u) = \omega(m) (1+u)^{m-1} \quad \text{für } \mu = 3, \dots, m.$$

2. Wegen (140) und (138) ist für jedes $u \geq 0$

$$(145) \quad G_\lambda^{(\kappa)}(u) = \omega(k_\lambda) (1+u)^{k_\lambda-1} \quad (1 \leq \lambda \leq l, \quad 0 \leq \kappa < k_\lambda).$$

⁴⁾ Hiermit meine ich, daß die genannten Voraussetzungen gültig bleiben, wenn a durch 0, b durch ∞ , $f(u)$ durch $F(u)$ und schließlich $g_\lambda(u)$ durch $G_\lambda(u)$ ersetzt werden.

3. Es werde nun

$$U = \int_0^\infty \left| G_1^{(\kappa_1)} \dots G_l^{(\kappa_l)} F''^{\varrho_3} \dots F^{(m)\varrho_m} e^F Y^{-\eta}(u) \right| du$$

betrachtet, wo $0 \leq \kappa_\lambda < k_\lambda$, $\varrho_\mu \geq 0$ und $\eta = \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 3\varrho_3 + \dots + m\varrho_m$ ist. Dabei unterscheide ich die drei in der dritten Voraussetzung des Hauptsatzes erwähnten Fälle α , β und γ .

In den Fällen α und γ ist $U = 0$, da der Integrand dann einen identisch verschwindenden Faktor, nämlich $G_{\lambda'}^{(k_{\lambda'})}(u)$ oder $F^{(m)}(u)$ enthält. Im Falle β ist

$$\kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \varrho_m = 0, \quad \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu = M \text{ oder } = M+1 \text{ oder } = M+2,$$

also $\eta \geq M$. Aus $F(u) \leq -\frac{1}{2}x^2u^2$ und den Beziehungen (145),

(144) und (143) folgt also wegen $x \geq 1$

$$\begin{aligned} U &= \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) \int_0^\infty (1+u)^{\sum_{\lambda=1}^l (k_\lambda-1) + (m-1) \sum_{\mu=3}^{m-1} \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{2}x^2u^2} x^{-M} du \\ &= \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) x^{-1-M}. \end{aligned}$$

Die dritte Voraussetzung des Hauptsatzes ist also mit (142) und mit $\varepsilon = \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) x^{-1-M}$ erfüllt.

4. Für jedes System von ganzen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ mit (95) ist wegen (145), (144), (143) und $F(u) \leq -\frac{1}{2}x^2u^2$

$$\begin{aligned} &G_1^{(\kappa_1)} \dots G_l^{(\kappa_l)} F''^{\varrho_3} \dots F^{(m-1)\varrho_{m-1}} e^F Y^{-1-\eta}(u) \\ &= \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}) (1+u)^{\sum_{\lambda=1}^l (\kappa_\lambda-1) + (m-1) \sum_{\mu=3}^{m-1} \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{2}x^2u^2} x^{-1-\eta}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt für $u \rightarrow \infty$ nach Null.

Hiermit ist bewiesen, daß die Voraussetzungen des Hauptsatzes, also auch die von Hilfssatz 4, mit (142) erfüllt sind. Nach Hilfssatz 4, mit (142) und mit Null statt σ_λ und statt τ_μ angewendet, ist dann

$$\begin{aligned} (146) \quad &\int_0^\infty G_1(u) \dots G_l(u) e^{F(u)} du \\ &= \int_{W(0+)} P_0(h) e^{-\frac{1}{2}x^2h^2} dh + \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) x^{-1-M}. \end{aligned}$$

wobei $P_0(h)$ mit der Bezeichnung des ersten Schrittes das Polynom in h

$$P_0(h) = \sum_1 C G_1^{(\kappa_1)} \dots G_l^{(\kappa_l)} F'''\dots F^{(m-1)l_{m-1}}(0) h^\eta$$

bezeichnet. Nach Hilfssatz 1, mit (142) angewendet, ist $W(0+)$ bei der Funktion $F(u)$ die positive reelle Achse, so daß (146) sich in (141) verwandelt.

Dritter Schritt: Formel (141) bleibt gültig, wenn C durch C^* ersetzt wird.

BEWEIS: Die Funktion

$$(147) \quad \varphi(h) = e^{F(h) + \frac{1}{2}x^2 h^2} = e^{-\sum_{\mu=3}^{m-1} \frac{\sigma_\mu}{\mu!} h^\mu}$$

ist ≤ 1 für jedes $h \geq 0$ wegen $\sigma_\mu \geq 0$; $\varphi^{(M)}(h)$ ist gleich $\varphi(h)$ multipliziert mit einem Polynom in h höchstens $(m-2)M^{\text{ten}}$ Grades. Folglich ist für $h \geq 0$

$$\varphi^{(M)}(h) = \omega(m, M) (1+h)^{(m-2)M}.$$

Nach der Mac-Laurinschen Entwicklung ist also

$$(148) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(h) - [\varphi(h)]_M &= \frac{1}{(M-1)!} \int_0^h \varphi^{(M)}(u) (h-u)^{M-1} du \\ &= \omega(m, M) (1+h)^{(m-2)M} h^M. \end{aligned} \right.$$

Nach der im ersten Schritt gegebenen Definition ist

$$\begin{aligned} & \sum_1 C^* G_1^{(\kappa_1)} \dots G_l^{(\kappa_l)} F'''\dots F^{(m-1)l_{m-1}}(0) h^\eta \\ &= [G_1(h)]_{k_1} \dots [G_l(h)]_{k_l} [e^{[F(h)]_m - F(0) - hF'(0) - \frac{1}{2}h^2 F''(0)}]_M \\ &= G_1(h) \dots G_l(h) [e^{F(h) + \frac{1}{2}x^2 h^2}]_M \text{ wegen (140) und (139)} \\ &= G_1(h) \dots G_l(h) \{ \varphi(h) - \omega(m, M) (1+h)^{(m-2)M} h^M \} \\ & \hspace{15em} \text{wegen (147) und (148)} \\ &= G_1(h) \dots G_l(h) \varphi(h) \\ & \quad + \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) (1+h)^{(m-2)M + k_1 + \dots + k_l - l} h^M; \end{aligned}$$

denn aus (140) und (138) folgt

$$G_\lambda(h) = \omega(k_\lambda) (1+h)^{k_\lambda - 1} \quad (1 \leq \lambda \leq l).$$

Die linke Seite von (141), die wegen (147) auf die Gestalt

$$\int_0^\infty G_1(h) \cdots G_l(h) \varphi(h) e^{-\frac{1}{2}x^2 h^2} dh$$

gebracht werden kann, ist somit gleich

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 C^* G_1^{(\kappa_1)} \cdots G_l^{(\kappa_l)} F''''^{\varrho_3} \cdots F^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) \int_0^\infty h^\eta e^{-\frac{1}{2}x^2 h^2} dh \\ & + \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) \int_0^\infty (1+h)^{(m-2)M+k_1+\dots+k_l-l} h^M e^{-\frac{1}{2}x^2 h^2} dh, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist gleich der rechten Seite von (141) mit C^* statt C . Hiermit ist die Behauptung des dritten Schrittes bewiesen.

Vierter Schritt: Abschluß des Beweises.

Aus den vorigen zwei Schritten geht hervor

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 (C - C^*) G_1^{(\kappa_1)} \cdots G_l^{(\kappa_l)} F''''^{\varrho_3} \cdots F^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) x^{-1-\eta} \int_0^\infty h^\eta e^{-\frac{1}{2}x^2 h^2} dh \\ & = \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M) x^{-1-M}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt stets, wenn nur

$$\begin{aligned} & x \geq 1, \quad -1 \leq F^{(\mu)}(0) \leq 0 \quad (3 \leq \mu \leq m-1), \\ & |G_\lambda^{(\kappa)}(0)| \leq 1 \quad (1 \leq \lambda \leq l; 0 \leq \kappa < k_\lambda) \end{aligned}$$

ist. Für jedes System von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ mit

$$\kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l), \quad \eta = \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu < M,$$

gilt somit $C - C^* = 0$. Nach dem ersten Schritt sind die Zahlen C und C^* durch l, m, κ_λ und ϱ_μ eindeutig bestimmt, also unabhängig von M , so daß die Beziehung $C = C^*$ für jedes System $(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1})$ mit (137) gilt. Hiermit ist Satz 11 vollständig bewiesen.

Satz 12: Sind die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt, gehört a dem Intervall (a, b) an, ist $r > 0$, $\delta > 0$,

$$(149) \quad |f''(a)| \leq r |f'(a)|^2,$$

und gilt für jedes System von nicht-negativen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_2, \dots, \varrho_{m-1}$ mit

$$(150) \quad \kappa_\lambda \text{ ganz} < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad 2\varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1} \text{ ganz}; \quad \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu = M$$

die Ungleichung

$$(151) \quad |e^{f_1^{(\kappa_1)}} \dots g_l^{(\kappa_l)} f''^{\ell_1} \dots f^{(m-1)\ell_{m-1}}(a)| \leq \delta |f'(a)|^{1+M+\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda},$$

so hat der in der Behauptung des Hauptsatzes auftretende Beitrag A den Wert

$$A = \int_0^\infty [g_1(a+h)]_{k_1} \dots [g_l(a+h)]_{k_l} [e^{[f(a+h)]_m - hf'(a)}]_M e^{hf'(a)} dh + \omega \delta;$$

hierin ist $\omega = \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M, r)$ (desgleichen alle in diesem Satz nachher auftretenden ω).

BEWEIS von Satz 12.

Erster Schritt: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $a = 0$ setzen, da ich sonst nur eine Parallelverschiebung anzuwenden brauche. Außerdem darf ich $f(0) = 0$ annehmen, da ich sonst δ durch $\delta e^{f(0)}$ ersetzen kann. Ich setze

$$(152) \quad G(h) = [g_1(h)]_{k_1} \dots [g_l(h)]_{k_l}$$

und

$$(153) \quad F(h) = [f(h)]_m - hf'(0) - \frac{1}{2} h^2 f''(0) = \sum_{\mu=3}^{m-1} \frac{f^{(\mu)}(0)}{\mu!} h^\mu;$$

auf $W(0+)$ werde der Punkt q so gewählt, daß der Bogen von $W(0+)$ zwischen 0 und q die Länge

$$(154) \quad \sigma_q = \frac{1}{12} \left| \frac{f'(0)}{f''(0)} \right|$$

besitzt (nach der ersten Voraussetzung des Hauptsatzes ist $f''(0) \neq 0$).

Ich behaupte, daß das Integral

$$I_1 = \int_q^\infty G(h) [e^{F(h)}]_M e^{hf'(0) + \frac{1}{2} h^2 f''(0)} dh,$$

wo der Integrationsweg der Bogen von $W(0+)$ zwischen q und ∞ ist, den Wert $\omega \delta$ hat.

Beweis: Aus (152) folgt

$$(155) \quad G(h) [e^{F(h)}]_M = \omega \sum_1 |g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)}(0)| \left| \frac{d^\tau e^{F(h)}}{dh^\tau} \right|_{h=0} \cdot |h|^{\tau + \kappa_1 + \dots + \kappa_l},$$

wo die Summe $\sum_1$ erstreckt wird über die Systeme von ganzen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \tau$ mit $0 \leq \kappa_\lambda < k_\lambda$ und $0 \leq \tau < M$. Wegen

(153) ist dabei $\left(\frac{d^\tau e^{F(h)}}{dh^\tau}\right)_{h=0}$ gleich $e^{F(0)}$, multipliziert mit einer endlichen Summe von Gliedern der Gestalt

$$cf'''\varrho_3 \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0), \text{ wo } \varrho_\mu \geq 0 \text{ und } \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu = \tau$$

und c durch $\varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ eindeutig bestimmt ist. Dabei ist $e^{F(0)} = 1$. Beziehung (155) geht somit über in

$$(156) \quad G(h)[e^{F(h)}]_M = \omega \sum_2 \left| g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''\varrho_3 \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) h^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu} \right|,$$

wo die Summe $\sum_2$ erstreckt wird über die Systeme von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ mit

$$(157) \quad \kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l); \quad \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu < M.$$

Nach Hilfssatz 2, mit $u = 0$ angewendet, ist für jedes h auf $W(0+)$

$$(158) \quad f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 \leq -\frac{1}{8}|f'(0)|\sigma,$$

wo σ die Länge von $W(0+)$ zwischen 0 und h bezeichnet. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (156)

$$I_1 = \omega \sum_2 \left| g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''\varrho_3 \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) \right| \int_{\sigma_q}^{\infty} \sigma^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{8}|f'(0)|\sigma} d\sigma,$$

also

$$(159) \quad I_1 = \omega \sum_2 \frac{\left| g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'''\varrho_3 \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) \right|}{|f'(0)|^{1 + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu}} \int_Q^{\infty} \sigma^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{8}\sigma} d\sigma;$$

hierin ist

$$(160) \quad Q = |f'(0)|\sigma_q = \frac{1}{12} \frac{|f'(0)|^2}{|f''(0)|} \geq \frac{1}{12r}$$

wegen (154) und (149) (mit $a = 0$ angewendet). Folglich ist

$$\int_Q^{\infty} \sigma^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{8}\sigma} d\sigma = \omega Q^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu} e^{-\frac{1}{8}Q} = \omega Q^{-\varrho_3},$$

wobei $2\varrho_2 = M - \sum_{\mu=3}^{m-1} \mu \varrho_\mu$ ist, also wegen (157) ganz und positiv

vorausgesetzt wird. Jedes Glied der in (159) vorkommenden Summe Σ_2 hat somit den Wert

$$\omega g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'^{-1-M-\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} f''^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) = \omega \delta$$

wegen (151); hiermit ist die Behauptung des ersten Schrittes bewiesen.

Zweiter Schritt: Die in (152) und (153) definierten Funktionen $G(h)$ und $F(h)$ besitzen die Eigenschaft, daß das Integral

$$I_2 = \int_q^{q-\infty e^{-i \arg f'(0)}} G(h) [e^{F(h) + \frac{1}{2} f''(0) h^2}]_M e^{f'(0)h} dh$$

den Wert $\omega \delta$ hat.

Beweis: Aus (153) folgt, daß

$$\left(\frac{d^\tau e^{F(h) + \frac{1}{2} f''(0) h^2}}{dh^\tau} \right)_{h=0}$$

für jedes ganze $\tau \geq 0$ gleich einer endlichen Summe von Gliedern der Gestalt

$$(161) \quad C f''^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) \text{ mit } \varrho_\mu \geq 0 \text{ und } \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu = \tau$$

ist; hierin wird der Koeffizient C durch $\varrho_2, \dots, \varrho_{m-1}$ eindeutig bestimmt. Aus (155), mit $F(h) + \frac{1}{2} f''(0) h^2$ statt $F(h)$ angewendet, folgt somit

$$(162) \quad G(h) [e^{F(h) + \frac{1}{2} f''(0) h^2}]_M = \omega \sum_3 |g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f''^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0)| |h|^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu},$$

wo die Summe Σ_3 erstreckt wird über die Systeme von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_2, \dots, \varrho_{m-1}$ mit

$$\kappa_\lambda < k_\lambda \quad (1 \leq \lambda \leq l) \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu < M.$$

Folglich ist

$$(163) \quad I_2 = \omega \sum_3 |g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f''^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0)| \int_q^{q-\infty e^{-i \arg f'(0)}} |e^{f'(0)h}| \cdot |h|^{\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu}$$

Für jedes auf $W(0+)$ zwischen 0 und q liegendes h ist

$$|h| \leq \sigma_q = \frac{1}{12} \left| \frac{f'(0)}{f''(0)} \right|$$

wegen (154), also

$$-\frac{1}{2} \Re f''(0) h^2 \leq \frac{1}{2} |f''(0)| \cdot |h|^2 \leq \frac{1}{24} |f'(0)| |h| \leq \frac{1}{24} |f'(0)| \sigma_q,$$

so daß man unter Benutzung von (158) (mit $h = q$, also $\sigma = \sigma_q$ angewendet)

$$\Re f'(0) q \leq -\frac{1}{8} |f'(0)| \sigma_q + \frac{1}{24} |f'(0)| \sigma_q = -\frac{1}{12} |f'(0)| \sigma_q = -\frac{1}{12} Q$$

findet (vergl. (160)). Für jedes h auf der Halbgeraden, die q mit $q - \infty e^{-i \arg f''(0)}$ verbindet, ist also, wenn $|h - q| = s$ gesetzt wird,

$$|e^{f'(0)h}| = e^{\Re f'(0) q - |f'(0)| s} \leq e^{-\frac{1}{12} Q - |f'(0)| s}.$$

Wird nun $\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda + \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu = \tau$ gesetzt, so hat also wegen $|h| \leq |q| + |h - q| \leq \sigma_q + s$ das in (163) auftretende Integral den Wert

$$\begin{aligned} \omega \int_0^\infty (\sigma_q^\tau + s^\tau) e^{-\frac{1}{12} Q - |f'(0)| s} ds &= \frac{\omega e^{-\frac{1}{12} Q}}{(f'(0))^{1+\tau}} (|f'(0)|^\tau \sigma_q^\tau + 1) \\ &= \frac{\omega e^{-\frac{1}{12} Q}}{(f'(0))^{1+\tau}} Q^\tau \quad \text{wegen (160)} \\ &= \frac{\omega}{(f'(0))^{1+\tau}} Q^{\frac{1}{2} \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu - \frac{1}{2} M}. \end{aligned}$$

Jedes Glied der in (163) auftretenden Summe Σ_3 ist somit

$$\omega g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'^{-1-M-\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} f''^{\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}\sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu} f'''^{\varrho_3} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) = \omega \delta$$

wegen (151), womit die Behauptung des zweiten Schrittes bewiesen ist.

Dritter Schritt: Die Integrale

$$I_3 = \int_0^q G(h) [e^{F(h) + \frac{1}{2} f''(0) h^2}]_M e^{f'(0)h} dh$$

und

$$I_4 = \int_0^q G(h) [e^{F(h)}]_M e^{f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0) h^2} dh,$$

wo längs $W(0+)$ integriert wird, besitzen die Eigenschaft

$$I_4 = I_3 + \omega \delta.$$

Beweis: Ist $\gamma > 0$ und w reell oder nicht-reell, so ist

$$\left| e^w - \sum_{0 \leq \nu < \gamma} \frac{w^\nu}{\nu!} \right| = \left| \sum_{\nu \geq \gamma} \frac{w^\nu}{\nu!} \right|$$

$$\begin{cases} \leq e^{|w|} + |w|^\gamma \sum_{0 \leq \nu < \gamma} \frac{1}{\nu!} < (1+e) |w|^\gamma e^{|w|}, & \text{falls } |w| \geq 1 \\ \leq |w|^\gamma \sum_{\nu \geq \gamma} \frac{1}{\nu!} < e |w|^\gamma & , \text{falls } |w| < 1, \end{cases}$$

so daß stets die Ungleichung

$$\left| e^w - \sum_{0 \leq \nu < \gamma} \frac{w^\nu}{\nu!} \right| < (1+e) |w|^\gamma e^{|w|}$$

gilt. Nach dieser Ungleichung, mit $\gamma = \frac{1}{2}(M-\tau)$ und $w = -\frac{1}{2}f''(0)h^2$ angewendet, ist

$$\begin{aligned} (164) \quad & [e^{F(h) + \frac{1}{2}f''(0)h^2}]_M e^{-\frac{1}{2}f''(0)h^2} \\ &= \sum_{\tau=0}^{M-1} \frac{h^\tau}{\tau!} \left(\frac{d^\tau e^{F(h) + \frac{1}{2}f''(0)h^2}}{dh^\tau} \right)_{h=0} \left\{ \sum_{0 \leq \nu < \frac{1}{2}(M-\tau)} \frac{(-\frac{1}{2}f''(0)h^2)^\nu}{\nu!} \right. \\ & \quad \left. + \omega e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} (f''(0)h^2)^{\frac{1}{2}(M-\tau)} \right\} \\ &= [e^{F(h)}]_M + \omega h^M e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \sum_{\tau=0}^{M-1} \sum_{0 \leq \nu < \frac{1}{2}(M-\tau)} |f''(0)|^{\frac{1}{2}(M-\tau)} \left| \frac{d^\tau e^{F(h) + \frac{1}{2}f''(0)h^2}}{dh^\tau} \right|_h \\ &= [e^{F(h)}]_M + \omega h^M e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \sum_{\tau=0}^{M-1} |f''(0)|^{\frac{1}{2}(M-\tau)} \left| \frac{d^\tau e^{F(h) + \frac{1}{2}f''(0)h^2}}{dh^\tau} \right|_{h=0} \\ &= [e^{F(h)}]_M + \omega h^M e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \sum_4 |f''|^{\frac{1}{2}(M-\tau)} f''^{\tau_2} \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}}(0) | \end{aligned}$$

wegen (161); hierin wird Σ_4 erstreckt über die Systeme $\tau, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$ von ganzen nicht-negativen Zahlen mit

$$\sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \tau_\mu = \tau < M.$$

Setzt man nun

$$\varrho_2 = \frac{1}{2}(M-\tau) + \tau_2, \quad \varrho_3 = \tau_3, \dots, \varrho_{m-1} = \tau_{m-1},$$

so bekommt man für den in (164) genannten Ausdruck

$$[e^{F(h)}]_M + \omega h^M e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \sum_5 |f'^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0)|;$$

hierin wird $\sum_5$ erstreckt über die Systeme $(\varrho_2, \dots, \varrho_{m-1})$ in denen $2\varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ ganz ≥ 0 sind und

$$\sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \varrho_\mu = 2 \cdot \frac{1}{2} (M - \tau) + \sum_{\mu=2}^{m-1} \mu \tau_\mu = M - \tau + \tau = M$$

ist. Nach der in (152) gegebenen Definition der Funktion $G(h)$ ist also

$$(165) \quad G(h) \{ [e^{F(h) + \frac{1}{2}f''(0)h^2}]_M e^{-\frac{1}{2}f''(0)h^2} - [e^{F(h)}]_M \} \\ = \omega e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \sum_6 |g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} f'^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(0) h^{M + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda}|;$$

die Summe $\sum_6$ wird erstreckt über die Systeme

$$(\kappa_1, \dots, \kappa_l, \varrho_2, \dots, \varrho_{m-1})$$

mit (150). Der Ausdruck (165) hat somit wegen (151) und $f(0) = 0$ den Wert

$$\omega e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} \delta \sum_7 |f'(0)|^{1+M + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} |h|^{M + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda},$$

wo die Summe $\sum_7$ erstreckt wird über die Systeme ganzer Zahlen $(\kappa_1, \dots, \kappa_l)$ mit $0 \leq \kappa_\lambda < k_\lambda$. Folglich ist

$$I_3 - I_4 = \omega \delta \sum_7 |f'(0)|^{1+M + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} \int_0^a e^{|\frac{1}{2}f''(0)h^2|} |h|^{M + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} e^{f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2} |dh|;$$

hierbei wird längs $W(0+)$ integriert, so daß $f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 \leq 0$ ist. Wegen $|h| \leq \sigma \leq \sigma_q$ (wo σ die Länge des Bogens von $W(0+)$ zwischen 0 und h bezeichnet) ist

$$\left| \frac{1}{2} f''(0) h^2 \right| \leq \frac{1}{2} |f''(0)| \sigma^2 \leq \frac{1}{2} |f''(0)| \sigma \sigma_q \leq \frac{1}{24} |f'(0)| \sigma$$

(vergl. (154)). Mit Rücksicht auf (158) folgt hieraus

$$\left| \frac{1}{2} f''(0) h^2 \right| + f'(0) h + \frac{1}{2} f''(0) h^2 \leq \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) |f'(0)| \sigma,$$

also

$$I_3 - I_4 = \omega \delta \sum_7 |f'(0)|^{1+M+\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} \int_0^\infty \sigma^{M+\sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} e^{-\frac{1}{12}|f'(0)|\sigma} d\sigma = \omega \delta,$$

womit die Behauptung des dritten Schrittes bewiesen ist.

Vierter Schritt: Abschluß des Beweises: Nach Satz 11 ist jetzt

$$A = \int_{w(0+)} G(h) [e^{F(h)}]_M e^{f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2} dh = I_4 + I_1 = I_3 + I_2 + \omega \delta,$$

und hierin ist $I_3 + I_2$ gleich dem Integral in der Behauptung des zu beweisenden Satzes. Hiermit ist der Satz vollständig bewiesen.

BEMERKUNGEN: Hier folgen zwei Bemerkungen, die es uns in vielen Fällen ermöglichen, die Größenordnung der Glieder zu bestimmen, die bei der Berechnung der Beiträge A und V auftreten.

1. Sind die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt, so besitzt der Beitrag V nach der Behauptung von Satz 11 die durch (136) angegebene Gestalt. Setzt man

$$(166) \quad [e^{[f(v+h)]_M - f'(v)h - \frac{1}{2}f''(v)h^2}]_M = e^{f(v)} \sum_{\mu=0}^{M-1} P_\mu h^\mu,$$

so ist also

$$(167) \quad V = \pm \sum_s \frac{g_1^{(\kappa_1)} \cdots g_l^{(\kappa_l)}(v)}{\kappa_1! \cdots \kappa_l!} \sum_{\mu=0}^{M-1} P_\mu \int_{-\infty}^{\infty} h^{\mu + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda} e^{f(v) + f'(v)h + \frac{1}{2}f''(v)h^2} dh;$$

die Summe $\sum_s$ wird erstreckt über die Systeme von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_\lambda < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$), und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v , rechts von v , positiv oder negativ ist. Das in (167) auftretende Integral hat, falls $\mu + \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda = \tau$ gesetzt wird, den Wert

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \arg \sqrt{f''(v)}} h^\tau e^{f(v) + f'(v)h + \frac{1}{2}f''(v)h^2} dh \\ &= e^{f(v) - \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \arg \sqrt{f''(v)}} h^\tau e^{\frac{1}{2}\left(h + \frac{f'(v)}{f''(v)}\right)^2 f''(v)} dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{f(v) - \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i \arg \sqrt{f''(u)}}}{e^{-i \arg \sqrt{f''(v)}}} \left(z - \frac{f'(v)}{f''(v)} \right)^{\tau} e^{\frac{1}{2} z^2 f''(v)} dz \\
&= \omega(\tau) e^{f(v) - \frac{f'^2(v)}{2f''(v)}} \frac{1}{\sqrt{f''(v)}} \left\{ |f''(v)|^{-\frac{1}{2}\tau} + \left| \frac{f'(v)}{f''(v)} \right|^{\tau} \right\}.
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei, daß in einem führenden Punkt v der Funktion $f(u)$ der Ausdruck $\frac{f'(v)}{\sqrt{f''(v)}}$ reell, also das im Exponenten auftretende Glied $-\frac{f'^2(v)}{2f''(v)} \leq 0$ ist.

Um die in (167) vorkommenden Koeffizienten $P_0, \dots, P_{M-1}$ abzuschätzen, nehme ich an, daß bei geeignet gewählten positiven r und ξ

$$(168) \quad |f^{(\mu)}(v)| \leq \frac{r}{\xi^{\mu}} \quad (3 \leq \mu < m)$$

ist. Unter Benutzung von (166) findet man, daß P_{μ} ($0 \leq \mu < M$) gleich einer endlichen Summe von Gliedern der Gestalt

$$c f'''^{\varrho_3}(v) \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(v)$$

ist, wo die Exponenten $\varrho_3, \dots, \varrho_{m-1}$ ganz ≥ 0 mit $3\varrho_3 + \dots + (m-1)\varrho_{m-1} = \mu$ sind. Wegen (168) ist dann

$$P_{\mu} = \omega(m, M, r) \xi^{-\mu} \quad (0 \leq \mu < M).$$

Auf diese Art findet man eine obere Schranke für den Absolutwert der Glieder, die bei der Berechnung von V auftreten.

2. Um das Entsprechende für den Beitrag A zu tun, nehme ich an, daß die Voraussetzungen von Satz 12 erfüllt sind, und ich setze

$$[e^{f(a+h) - hf'(a)}]_M = e^{f(a)} \sum_{\mu=0}^{M-1} Q_{\mu} h^{\mu}.$$

Die Behauptung von Satz 12 besagt

$$= e^{f(a)} \sum_s \sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{(-1)^{\kappa_1 + \dots + \kappa_l + \mu + 1} (\kappa_1 + \dots + \kappa_l + \mu)!}{(f'(a))^{\mu + \kappa_1 + \dots + \kappa_l + 1}} \frac{g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)}(a) Q_{\mu}}{\kappa_1! \dots \kappa_l!} + \omega \delta;$$

hierin ist $\omega = \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M, r)$, und Q_{μ} ($0 \leq \mu < M$) ist gleich einer endlichen Summe von Gliedern der Gestalt

$$C f'''^{\varrho_2} \dots f^{(m-1)\varrho_{m-1}}(a),$$

wo die Exponenten $\varrho_2, \dots, \varrho_{m-1}$ ganz ≥ 0 mit $2\varrho_2 + \dots$

+ $(m-1)\varrho_{m-1} = \mu$ sind. Existiert somit ein positives ξ mit

$$|f^{(\mu)}(a)| \leq r \xi^{-\mu} \quad (2 \leq \mu \leq m-1),$$

so ist

$$Q_\mu = \omega(m, M, r) \xi^{-\mu} \quad (0 \leq \mu < M).$$

HILFSSATZ 5: Ist L ganz ≥ 0 , sind q , ξ und w_λ ($1 \leq \lambda \leq L+1$) positiv mit $\xi \leq 1$, und gelten die Ungleichungen

$$|G_\lambda| \leq q w_\lambda; \quad |G_\lambda^*| \leq q w_\lambda \xi \quad (1 \leq \lambda \leq L+1),$$

so ist

$$\prod_{\lambda=1}^{L+1} (G_\lambda + G_\lambda^*) = \prod_{\lambda=1}^{L+1} G_\lambda + \Theta(3q)^{L+1} w_1 \cdots w_{L+1} \xi \text{ mit } |\Theta| \leq 1.$$

BEWEIS: Ich darf $L > 0$ voraussetzen, da sonst die Behauptung evident ist. Ist die Behauptung mit $L-1$ statt L schon bewiesen, so ist

$$\prod_{\lambda=1}^L (G_\lambda + G_\lambda^*) = \prod_{\lambda=1}^L G_\lambda + \Theta'(3q)^L w_1 \cdots w_L \xi \text{ mit } |\Theta'| \leq 1.$$

Aus den Voraussetzungen geht hervor

$$|G_{L+1} + G_{L+1}^*| \leq q w_{L+1} (1 + \xi) \leq 2q w_{L+1},$$

also mit $|\Theta''| \leq 1$ und $|\Theta'''| \leq 1$

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda=1}^{L+1} (G_\lambda + G_\lambda^*) &= \prod_{\lambda=1}^{L+1} G_\lambda + q w_{L+1} \xi \Theta'' \prod_{\lambda=1}^L (q w_\lambda) + 2q w_{L+1} \Theta''' (3q)^L w_1 \cdots w_L \xi \\ &= \prod_{\lambda=1}^{L+1} G_\lambda + \Theta(3q)^{L+1} w_1 \cdots w_{L+1} \xi \end{aligned}$$

wegen

$$\Theta'' q^{L+1} + 2\Theta''' \cdot 3^L q^{L+1} = \Theta(3q)^{L+1}.$$

Der Zweck des folgenden Satzes ist, unter gewissen Voraussetzungen für

$$(169) \quad V^* = \int_{-\infty}^{\infty} P(h) e^{\frac{1}{2} h^2 f''(v)} dh,$$

wo

$$(170) \quad P(h) = h^K [g_1(v+h)]_{k_1} \cdots [g_L(v+h)]_{k_L} [e^{f(v+h) - \frac{1}{2} f''(v) h^2}]_m$$

ist, einen für die Anwendungen oft bequemen Näherungswert abzuleiten. Bequemlichkeitshalber beschränke ich mich dabei auf den wichtigsten Spezialfall, nämlich den Fall mit $f'(v) = 0$.

SATZ 13: Es mögen $K, L, k_1, \dots, k_L$ und m ganze Zahlen mit

$$K \geq 0, \quad L \geq 0, \quad k_1 \geq 1, \dots, k_L \geq 1, \quad m \geq 3$$

bezeichnen. Im Punkte $u = v$ sei $f(u)$ mindestens $(m-1)$ mal und $g_\lambda(u)$ ($1 \leq \lambda \leq L$) mindestens $(k_\lambda - 1)$ -mal stetig differenzierbar; dabei sei

$$(171) \quad f'(v) = 0, \quad -f''(v) = \gamma \neq 0, \quad -\pi < \arg \gamma < \pi.$$

Es sei

$$(172) \quad r > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{\varrho}, \quad x \geq 1, \quad X = \frac{x^\varepsilon}{\sqrt{|\gamma|}}, \quad w_\lambda > 0 \quad (1 \leq \lambda \leq L),$$

wo ϱ die größte der Zahlen $k_1, \dots, k_L, m$ bezeichnet.

Im Intervall $-X \leq H \leq X$ sei $F(H)$ mindestens m -mal und $G_\lambda(H)$ ($1 \leq \lambda \leq L$) mindestens k_λ -mal stetig differenzierbar mit

$$(173) \quad F^{(\mu)}(0) = \left(\frac{|\gamma|}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}\mu} f^{(\mu)}(v) \quad (0 \leq \mu < m),$$

$$(174) \quad G_\lambda^{(\kappa)}(0) = \left(\frac{|\gamma|}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}\kappa} g_\lambda^{(\kappa)}(v) \quad (1 \leq \lambda \leq L; \quad 0 \leq \kappa < k_\lambda),$$

$$(175) \quad |F^{(\mu)}(H)| \leq r |\gamma|^{\frac{1}{2}\mu} x^{-\frac{\mu}{m}} \quad (3 \leq \mu \leq m)$$

und

$$(176) \quad |G_\lambda^{(\kappa)}(H)| \leq r |\gamma|^{\frac{1}{2}\kappa} w_\lambda x^{-\frac{\kappa}{k_\lambda}} \quad (1 \leq \lambda \leq L; \quad 0 \leq \kappa \leq k_\lambda).$$

Unter diesen Voraussetzungen hat die durch (169) und (170) definierte Zahl V^* den Wert

$$V^* = \left(\frac{|\gamma|}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}(K+1)} \int_{-X}^X H^K G_1(H) \cdots G_L(H) e^{F(H)} dH + \omega R;$$

hierin ist $\omega = \omega(K, L, k_1, \dots, k_L, m, r, \varepsilon)$ (desgl. jedes in diesem Satz vorkommende ω) und

$$R = w_1 \cdots w_L x^{-1+\varrho\varepsilon} e^{f(v)} |\gamma|^{-\frac{1}{2}(K+1)}.$$

Ist $L = 0$, so ist jedes der drei Produkte $g_1(v+h) \cdots g_L(v+h)$, $G_1(H) \cdots G_L(H)$ und $w_1 \cdots w_L$ gleich Eins zu setzen und die Bedingungen für die Funktionen g_λ und G_λ fallen fort.

Beweis: Wird

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}i \arg \gamma} = \sqrt{\frac{|\gamma|}{\gamma}}$$

Wegen $F'(0) = 0$ und $\varepsilon \leq \frac{1}{m}$ folgt aus (175)

$$F(H) - F(0) - \frac{1}{2} F''(0) H^2 = \omega \gamma^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{m}} H^3 = \omega,$$

so daß wegen $F(0) = f(v)$ (vergl. (173) mit $\mu = 0$) der Spezialfall von (180) mit $\mu = 0$ schon bewiesen ist. Ich setze $\mu \geq 1$ voraus und nehme an, daß (180) schon bewiesen sei, wenn μ durch eine kleinere ganze Zahl ≥ 0 ersetzt wird. Aus

$$E'(H) = E(H) (F'(H) - F''(0)H)$$

folgt dann

$$(181) \quad \left\{ \begin{aligned} E^{(\mu)}(H) &= \sum_{\sigma=2}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{\sigma} E^{(\mu-1-\sigma)}(H) F^{(\sigma+1)}(H) \\ &+ (\mu-1) E^{(\mu-2)}(H) (F''(H) - F''(0)) \\ &+ E^{(\mu-1)}(H) (F'(H) - F''(0)H). \end{aligned} \right.$$

Hierin ist wegen (175) (mit $\mu = 3$ angewendet) und $\varepsilon \leq \frac{1}{m}$

$$F''(H) - F''(0) = \omega \gamma^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{m}} H = \omega \gamma x^{-\frac{2}{m}}$$

und wegen $F'(0) = 0$

$$F'(H) - F''(0)H = \omega \gamma^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{m}} H^2 = \omega \gamma^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{m}}.$$

Unter Benutzung von (175) und (180) (mit $\mu - 1 - \sigma$ oder $\mu - 2$ oder $\mu - 1$ statt μ) führt man (181) somit über in

$$\begin{aligned} E^{(\mu)}(H) &= \omega e^{f(v)} \left\{ \sum_{\sigma=2}^{\mu-1} |\gamma|^{\frac{1}{2}(\mu-1-\sigma)} x^{-\frac{\mu-1-\sigma}{m}} |\gamma|^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} x^{-\frac{\sigma+1}{m}} \right. \\ &\quad \left. + |\gamma|^{\frac{1}{2}(\mu-2)} x^{-\frac{\mu-2}{m}} |\gamma| x^{-\frac{2}{m}} + |\gamma|^{\frac{1}{2}(\mu-1)} x^{-\frac{\mu-1}{m}} |\gamma|^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{m}} \right\} \\ &= \omega e^{f(v)} \gamma^{\frac{1}{2}\mu} x^{-\frac{\mu}{m}}, \end{aligned}$$

womit (180) bewiesen ist. Diese Formel, mit $\mu = m$ angewendet, liefert im Intervall $-X \leq H \leq X$

$$E(H) - [E(H)]_m =$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \int_0^H E^{(m)}(h) (H-h)^{m-1} dh = \omega \gamma^{\frac{1}{2}m} x^{-1} e^{f(v)} X^m = \omega e^{f(v)} x^{-1+\varrho\varepsilon}$$

wegen $m \leq \varrho$. Im Intervall $-X \leq H \leq X$ ist außerdem für $\lambda = 1, \dots, L$

$$\begin{aligned}
 G_\lambda(H) - [G_\lambda(H)]_{k_\lambda} &= \frac{1}{(k_\lambda - 1)!} \int_0^H G_\lambda^{(k_\lambda)}(h) (H-h)^{k_\lambda-1} dh \\
 &= \omega \gamma^{\frac{1}{2} k_\lambda} w_\lambda x^{-1} X^{k_\lambda} \quad \text{wegen (176)} \\
 &= \omega w_\lambda x^{-1+\varrho\varepsilon}
 \end{aligned}$$

wegen $k_\lambda \leq \varrho$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
 [G_1(H)]_{k_1} \cdots [G_L(H)]_{k_L} [E(H)]_m &= \\
 &= \left\{ \prod_{\lambda=1}^L (G_\lambda(H) + \omega w_\lambda x^{-1+\varrho\varepsilon}) \right\} \{E(H) + \omega e^{f(v)} x^{-1+\varrho\varepsilon}\}.
 \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck kann wegen (176) und (180) (mit $\kappa = 0$ und $\mu = 0$) Hilfssatz 5 mit

$$\begin{aligned}
 G_\lambda &= G_\lambda(H) \quad (1 \leq \lambda \leq L), \quad G_{L+1} = E(H), \\
 w_{L+1} &= |e^{f(v)}|, \quad \xi = x^{-1+\varrho\varepsilon}, \quad q = \omega
 \end{aligned}$$

angewendet werden, so daß

$$\begin{aligned}
 [G_1(H)]_{k_1} \cdots [G_L(H)]_{k_L} [E(H)]_m &= \\
 &= G_1(H) \cdots G_L(H) E(H) + \omega w_1 \cdots w_L e^{f(v)} x^{-1+\varrho\varepsilon}
 \end{aligned}$$

ist. Das durch (170) definierte Polynom $P(\sigma H)$ kann wegen (174), (173) und (179) somit auf die Gestalt

$$\begin{aligned}
 P(\sigma H) &= \sigma^K H^K [G_1(H)]_{k_1} \cdots [G_L(H)]_{k_L} [E(H)]_m \\
 &= \sigma^K H^K G_1(H) \cdots G_L(H) E(H) + \omega H^K w_1 \cdots w_L e^{f(v)} x^{-1+\varrho\varepsilon}
 \end{aligned}$$

gebracht werden. Daher hat die linke Seite von (177) den Wert

$$\omega w_1 \cdots w_L e^{f(v)} x^{-1+\varrho\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |H|^K e^{-\frac{1}{2}|\gamma|H^2} dH = \omega R,$$

womit alles bewiesen ist.

§ 4. Anwendungen.

Dieser Schlußparagraph der zweiten Mitteilung enthält Spezialfälle des Hauptsatzes.

SATZ 14. VORAUSSETZUNGEN: 1 und 2. Es seien die Voraussetzungen 1 und 2 des Hauptsatzes erfüllt.

3. Es sei $r > 0$ und M ganz ≥ 1 ; im Intervall (a, b) seien $x(u) \geq 1$ und $G_\lambda(u)$ ($1 \leq \lambda \leq l$) stetige Funktionen mit

$$(182) \quad |f^{(\mu)}(u)| \leq r y^\mu(u) x^{-\frac{\mu}{M}}(u) \quad (3 \leq \mu < m);$$

$$(183) \quad |f^{(m)}(u)| \leq r y^m(u) x^{-1}(u);$$

$$(184) \quad |g_\lambda^{(\kappa)}(u)| \leq G_\lambda(u) y^\kappa(u) \quad (1 \leq \lambda \leq l; 0 \leq \kappa < k_\lambda)$$

und

$$(185) \quad |g_\lambda^{(k_\lambda)}(u)| \leq G_\lambda(u) y^{k_\lambda}(u) x^{-1}(u) \quad (1 \leq \lambda \leq l).$$

4. Gehört a nicht dem Intervall (a, b) an, so besitze jedes System von ganzen nicht-negativen Zahlen $\kappa_\lambda < k_\lambda$ die Eigenschaft

$$g_1^{(\kappa_1)} \dots g_l^{(\kappa_l)} e^f y^{-1 - \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda}(u) \rightarrow 0$$

für $u \rightarrow a$. Gehört b nicht zu (a, b) , so gelte entsprechendes mit b statt a .

BEHAUPTUNG: Unter diesen Voraussetzungen kann man dem Endpunkt a eine Zahl A , dem Endpunkt b eine Zahl B , jedem etwaigen zwischen a und b liegenden führenden Punkt $v, v', \dots$ von $f(u)$ eine Zahl $V, V', \dots$ mit

$$\begin{aligned} \int_a^b g_1(u) \dots g_l(u) e^{f(u)} du &= A + B + V + V' + \dots \\ &+ \omega \int_a^b G_1(u) \dots G_l(u) |e^{f(u)}| x^{-1}(u) du \end{aligned}$$

zuordnen, falls das letzte Integral existiert. Hierin ist

$$\omega = \omega(m, l, k_1, \dots, k_l, M, r)$$

(desgleichen die in diesem Satze nachher auftretenden ω); $V, V', \dots$ werden durch (136) festgelegt; gehört a nicht zum Intervall (a, b) , so ist $A = 0$, und sonst ist A durch (134) bestimmt; gehört b nicht zum Intervall (a, b) , so ist $B = 0$, und sonst ist B durch (135) definiert.

BEWEIS: Ich brauche nur zu zeigen, daß die Voraussetzungen 3 und 4 des Hauptsatzes erfüllt sind, wenn ε eine geeignet gewählte Zahl mit

$$\varepsilon = \omega \int_a^b G_1(u) \dots G_l(u) |e^{f(u)}| x^{-1}(u) du$$

bezeichnet.

3. Ich betrachte den Ausdruck

$$U = \int_a^b |g_1^{(\kappa'_1)} \dots g_l^{(\kappa'_l)} f^{\eta'_1 \eta'_2 \dots \eta'_m} \dots f^{(m) \eta'_m} e^f y^{-\eta'}(u)| du$$

mit

$$\eta' = \kappa'_1 + \dots + \kappa'_l + 3\rho'_3 + \dots + m\rho'_m,$$

und ich unterscheide die drei in Voraussetzung 3 des Hauptsatzes genannten Fälle.

$\alpha)$ Es sei $\kappa'_\lambda \leq k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$), wobei in genau einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt; $\rho'_m = 0$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \rho'_\mu < M$. Ich benutze die wegen $x(u) \geq 1$ unmittelbar aus (182) hervorgehenden Ungleichungen

$$(186) \quad |f^{(\mu)}(u)| \leq r y^\mu(u) \quad (3 \leq \mu < m);$$

aus (184) und (185) folgt dann

$$(187) \quad U = \omega \int_a^b G_1(u) \cdots G_l(u) |e^{f(u)}| x^{-1}(u) du$$

$\beta)$ Es sei $\kappa'_\lambda < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$); $\rho'_m = 0$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \rho'_\mu = M$ oder $= M + 1$ oder $= M + 2$. Wegen

$$\frac{1}{M} \sum_{\mu=3}^m \mu \rho'_\mu \geq 1 \quad \text{und} \quad x(u) \geq 1$$

folgt nun aus (182) und (184) wiederum Beziehung (187).

$\gamma)$ Es sei $\kappa'_\lambda < k_\lambda$ ($1 \leq \lambda \leq l$); $\rho'_m = 1$; $\sum_{\mu=3}^m \mu \rho'_\mu \leq M$ oder $\leq M + 2$, je nachdem $m > 3$ oder $= 3$ ist. Ich benutze nun (186), (183) und (184) und finde so wiederum (187). Hiermit ist die Gültigkeit von Voraussetzung 3 des Hauptsatzes bewiesen.

4. Aus (186) geht hervor, falls η durch (96) definiert wird,

$$\begin{aligned} & |g_1^{\kappa_1} \cdots g_l^{\kappa_l} f^{\rho_3} \cdots f^{(m-1)\rho_{m-1}} e^f y^{-(1+\eta)}(u)| \\ & \leq r^{\rho_3 + \cdots + \rho_{m-1}} |g_1^{\kappa_1} \cdots g_l^{\kappa_l} e^f y^{-1 - \sum_{\lambda=1}^l \kappa_\lambda}(u)|, \end{aligned}$$

womit die Gültigkeit von Voraussetzung 4 des Hauptsatzes bewiesen ist. Hiermit ist der verlangte Beweis geliefert.

BEMERKUNG: Der Spezialfall des obigen Satzes mit

a und b endlich, $l = 1$, $g_1(u) = g(u)$, $k_1 = k$, $G_1(u) = G$, $M = m$ liefert die Sätze 6, 8 und 9 der Einleitung; denn wegen $M = m$ ist

$$[e^{[f(u+h)]_m - hf'(u) - \frac{1}{2}h^2f''(u)}]_M = [e^{f(u+h) - hf'(u) - \frac{1}{2}h^2f''(u)}]_m.$$

Ich schließe diese zweite Mitteilung mit dem

BEWEIS VON SATZ 7. Ich zeige zunächst, daß die Voraussetzungen von Satz 12 mit $l = 1$ und $M = m$ erfüllt sind, wenn δ eine geeignet gewählte Zahl mit

$$(188) \quad \delta = \omega(m, r) G e^{f(a)} \xi^{-m} (f'(a))^{-1-m}$$

bezeichnet.

Da die Voraussetzungen von Satz 6 gelten, sind nach dem obigen Beweis von Satz 14 die Voraussetzungen des Hauptsatzes bei geeignet gewähltem ε erfüllt. Ich brauche also nur noch Ungleichung (151) zu untersuchen. Aus (85), (83) und (89) folgt für $0 \leq \kappa < k$

$$|g^{(\kappa)}(a)| \leq G(|f'(a)| + \sqrt{r}|f'(a)|)^{\kappa} = G(1 + \sqrt{r})^{\kappa} |f'(a)|^{\kappa}.$$

Wegen (90) ist somit die linke Seite von (151)

$$\begin{aligned} &\leq |e^{f(a)}| G(1 + \sqrt{r})^{\kappa_1} |f'(a)|^{\kappa_1} r^{\varrho_2 + \dots + \varrho_{m-1}} \xi^{-M} \\ &= \omega(m, r) |e^{f(a)}| G |f'(a)|^{\kappa_1} \xi^{-m}, \end{aligned}$$

also $\leq \delta |f'(a)|^{1+M+\kappa_1}$ bei geeignet gewähltem δ mit (188).

Satz 12 zieht die erste Behauptung von Satz 7 nach sich. Die letzte Bemerkung, die Hilfssatz 5 vorangeht, liefert nun unmittelbar die zweite Behauptung von Satz 7.

NACHTRAG ⁵⁾ ZUM BEWEIS VON HILFSSATZ 4.

Beweis der Formel (132). Wegen $\tau_m = 0$ ist

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f''', \tau_3 \dots f^{(m-1)} \tau_{m-1}(u) \quad * \\ &= \sum_{\varphi=1}^l g_1^{(\sigma_1 + \delta_{1\varphi})} \dots g_l^{(\sigma_l + \delta_{l\varphi})} f''', \tau_3 \dots f^{(m-1)} \tau_{m-1}(u) \\ &+ \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_{\varphi} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f''', \tau_3 - \delta_3, \varphi + \delta_2, \varphi \dots f^{(m)} \tau_m - \delta_{m\varphi} + \delta_{m-1, \varphi}. \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration kann also das Schlußglied von (131) als eine Summe geschrieben werden, die aus den Gliedern

$$\sum_{\varphi=1}^l I_{\sigma_{\lambda} + \delta_{\lambda\varphi}, \tau_{\mu}} + \sum_{\varphi=3}^{m-1} \tau_{\varphi} I_{\sigma_{\lambda}, \tau_{\mu} - \delta_{\mu\varphi} + \delta_{m-1, \varphi}}$$

und außerdem aus den Beiträgen der Punkte $a, b, v, v', \dots$ be-

⁵⁾ In der Korrektur hinzugefügt (6. Mai 1936).

steht. Der Beitrag von a ist

$$\begin{aligned} g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}}(a) \cdot \frac{1}{\zeta!} \int_{W(a+)} (h-a)^\zeta e^{f(a)+(h-a)f'(a)+\frac{1}{2}(h-a)^2 f''(a)} dh \\ = \int_{W(a+)} p_a^{**}(h-a) e^{f(a)+(h-a)f'(a)+\frac{1}{2}(h-a)^2 f''(a)} dh = A^{**}. \end{aligned}$$

Der Beitrag von b ist

$$- \int_{W(b-)} p_b^{**}(h-b) e^{f(b)+(h-b)f'(b)+\frac{1}{2}(h-b)^2 f''(b)} dh = B^{**}.$$

Der Beitrag eines führenden Punktes v von $f(u)$, der zwischen a und b liegt, ist

$$g_1^{(\sigma_1)} \dots g_l^{(\sigma_l)} f'''\tau_3 \dots f^{(m-1)\tau_{m-1}}(v) \{ \psi_{\zeta+1}(v+) - \psi_{\zeta+1}(v-) \}.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \psi_{\zeta+1}(v+) - \psi_{\zeta+1}(v-) &= \frac{1}{\zeta!} \left\{ \int_{W(v+)} - \int_{W(v-)} \right\} (z-v)^\zeta e^{f(v)+f'(v)(z-v)+\frac{1}{2}f''(v)(z-v)^2} dz \\ &= \pm \frac{1}{\zeta!} \int_{-\infty}^{\infty} (h-v)^\zeta e^{f(v)+f'(v)(h-v)+\frac{1}{2}f''(v)(h-v)^2} dh \end{aligned}$$

nach der zweiten Behauptung von Hilfssatz 1; das Plus- oder Minuszeichen wird benutzt, je nachdem $\Im \frac{f'(u)}{\sqrt{f''(u)}}$ in der Umgebung von v rechts von v positiv oder negativ ist. Der Beitrag von v ist also

$$\pm \int_{-\infty}^{\infty} p_v^{**}(h) e^{f(v)+f'(v)h+\frac{1}{2}f''(v)h^2} dh = V^{**}.$$

Hiermit ist (132) bewiesen.

(Eingegangen den 10. September 1934; abgeändert eingegangen den 20. Dezember 1935.)