

COMPOSITIO MATHEMATICA

J. A. SCHOUTEN

J. HAANTJES

Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 1-51

http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__1_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie

von

J. A. Schouten und J. Haantjes

Delft

EINLEITUNG.

Die allgemeine projektive Differentialgeometrie entstand einerseits aus dem von Cartan ¹⁾ herrührenden Gedanken, die Lokalräume einer Mannigfaltigkeit projektiv aufeinander abzubilden statt affin, andererseits aus der von Veblen ²⁾ geschaffenen Geometrie der Systeme von geodätischen Linien (geometry of paths). An der Ausarbeitung beteiligten sich zahlreiche Untersucher. Aus der ersten Zeit nennen wir nur Cartan, Schouten, Golab, Veblen, T. Y. Thomas, Weyl, Robertson und verweisen im Übrigen nach dem ausführlichen Literaturverzeichnis am Schlusse dieser Arbeit. Bei allen diesen Autoren treten projektive Lokalräume $\overset{x}{P}_n$ auf, und es werden in diesen $\overset{x}{P}_n$ gewisse Größen, Projektoren, in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{G}_n$ der Transformationen von gewöhnlichen Koordinaten in der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit definiert. Gerade diese Verwendung von gewöhnlichen Koordinaten im Gegensatz zu den in den $\overset{x}{P}_n$ auftretenden homogenen Koordinaten führte zu allerhand Unzuträglichkeiten. Erst in 1932 ³⁾ führte van Dantzig die homogenen Koordinaten in der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit ein und schuf damit das der Untersuchung vollständig angepaßte Instrument. Der weitere Ausbau dieser Methode geschah nun zufälligerweise in Arbeiten, die einen physikalischen Zweck verfolgten, nämlich den Aufbau der auf einem Gedanken von Veblen beruhenden projektiven Relativitätstheorie, und es fehlt also bis jetzt eine rein geometrische mit homogenen Koordinaten arbeitende Darstellung dieses Zweiges der Differentialgeometrie.

¹⁾ 1924.1, 2.

²⁾ 1928.2.

³⁾ 1932.2, 4.

BIBLIOTHEQUE
SCIENCE

Es ist Zweck dieser Arbeit, diesen Rückstand einzuholen und dabei insbesondere die einfachste Verallgemeinerung der gewöhnlichen projektiven Differentialgeometrie zu entwickeln, die den Geometer am meisten interessiert, für physikalische Anwendungen aber gerade weniger geeignet ist.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die Theorie des projektiven Zusammenhangs entwickelt. Dieser Teil fängt an mit der Definition der projektiven lokalen Räume P_n und der Projektoren in diesen P_n , die in Bezug auf zwei Gruppen definiert werden, die Gruppe $\mathfrak{S}_{n+1}$ der homogenen Koordinatentransformationen vom Grade $+1$ und die Gruppe $\mathfrak{S}$ der Punkttransformationen $x^\kappa \rightarrow \varrho x^\kappa$. Es stellt sich dabei heraus, daß die P_n grundverschieden sind von den $\overset{x}{P}_n$. Die Anwendung des Anholonomitätsobjektes gestattet alle Formeln so zu schreiben, daß sie auch für nichtholonome Koordinatensysteme gelten. Sodann werden von den Zusammenhängen der P_n insbesondere die Punktübertragungen betrachtet. Es ergibt sich der Satz, daß jeder symmetrische „lokal normalisierbare“ Zusammenhang eine „spezielle“ Punktübertragung ist, und daß umgekehrt zu jeder speziellen Punktübertragung ein einziger lokal normalisierbarer Zusammenhang gehört. Eine symmetrische spezielle Punktübertragung zwischen den P_n , d.i. eine spezielle Punktübertragung, zu der ein symmetrischer Zusammenhang gehört, bildet die einfachste Verallgemeinerung der gewöhnlichen projektiven Differentialgeometrie; sie geht auf diese zurück, wenn der zugehörige Zusammenhang integrabel ist. Zu einer speziellen Punktübertragung zwischen den P_n gibt es durch jeden Punkt in jeder Richtung eine einzige geodätische Linie. Das System der Geodätischen legt aber umgekehrt die spezielle Punktübertragung nicht eindeutig fest. Es ergibt sich da wiederum ein wesentlicher Unterschied zwischen den P_n und den $\overset{x}{P}_n$, zwischen den $\overset{x}{P}_n$ bestimmen die geodätischen Linien nämlich eindeutig eine Punktübertragung⁴⁾. Es wird gezeigt, daß dieser merkwürdige Unterschied daher rührt, daß die Unbestimmtheit der Punktübertragung der P_n durch die Unbestimmtheit der Abbildung der P_n auf die $\overset{x}{P}_n$ gerade kompensiert wird.

Der zweite Teil ist der Theorie der Einbettung und Einspannung gewidmet. Bei Einbettung einer m -dimensionalen in eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit werden in beiden homogene

⁴⁾ E. CARTAN, 1924.1; J. A. SCHOUTEN, 1924.4.

Koordinaten eingeführt, und die Größen werden definiert in Bezug auf vier Gruppen, $\mathfrak{S}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ außen und $\mathfrak{S}_{m+1}$ und $\mathfrak{F}'$ innen. Ist im Außenraum ein Zusammenhang gegeben, so wird im Falle der „Einspannung“ im Innenraum ein Zusammenhang induziert und letzterer ist dann und nur dann symmetrisch oder lokal normalisierbar, wenn der Zusammenhang im Außenraum dieselbe Eigenschaft besitzt. Wird also in einen gewöhnlichen projektiven n -dimensionalen Raum eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit sowohl eingebettet als eingespannt, so herrscht in letzterer eine symmetrische und spezielle Punktübertragung, und damit ergibt sich eine einfache Methode, um zu solchen Punktübertragungen zu gelangen.

Als Beispiel wird jetzt die Einbettung einer $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in eine n -dimensionale mit einer symmetrischen und speziellen Punktübertragung behandelt. Dies ist die einfachste Verallgemeinerung des z.B. in dem Buch von Fubini-Čech behandelten klassischen Falles (Einbettung in einen gewöhnlichen projektiven Raum). Die Methode unterscheidet sich von der dort verwendeten dadurch, daß im Außenraum krummlinige homogene Koordinaten zur Anwendung gelangen statt gewöhnlicher homogener Koordinaten und im Innenraum krummlinige homogene statt krummliniger nichthomogener. Die Verallgemeinerung ist eben erst durch diese andere Wahl der Koordinaten möglich geworden, sie ergibt aber auch für den klassischen Fall Vorteile, die daraus entspringen, daß bei Verwendung homogener Koordinaten auch im Innenraum die Behandlung gleichmäßiger wird und auch einfacher, da gewisse Matrizen einen höheren Rang bekommen. Aus der Grundgröße der Einbettung, $\mathcal{B}_b^x$, ergibt sich als wichtigste Größe die symmetrische Projektordichte $a_{\lambda\kappa}$ im Außenraum, die geometrisch der Hyperfläche von Lie-Čech entspricht. Ist einmal diese Hyperfläche gewonnen, so gelangt man leicht zur Projektivnormale und zur automatischen Einspannung. Natürlich spielt hier, im Gegensatz zum klassischen Fall, der Krümmungsprojektor des Außenraums stets eine Rolle, merkwürdigerweise wirkt diese aber niemals störend, so daß sich das bemerkenswerte Resultat ergibt, daß die ganze klassische Theorie mit sehr geringfügigen Korrekturen gültig bleibt für jede Mannigfaltigkeit, die durch Einbettung und Einspannung einer X_m in einen gewöhnlichen projektiven Raum gewonnen werden kann.

Die Untersuchung ist keineswegs abgeschlossen, da nur die Einbettung einer $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit voll-

ständig behandelt wird und die Krümmungstheorie gar nicht zur Sprache gebracht ist ⁵⁾).

I. Der projektive Zusammenhang.

Die X_n .

Wir betrachten n Variablen ξ^h ($h, \dots, m = 1, \dots, n$), die alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen können. Die Gesamtheit der Systeme von n Werten ξ^h bildet eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, ein einziges solches System heiße *Punkt* dieser Mannigfaltigkeit, die zugehörigen ξ^h *Koordinaten* des Punktes. Statt der ξ^h können andere *Urvariablen* $\xi^{h'}$ eingeführt werden, wir beschränken uns aber ausdrücklich auf solche Transformationen, die im betrachteten Gebiet kontinuierlich und hinreichend oft differenzierbar sind. Diese bilden eine Gruppe ⁶⁾ $\mathcal{G}_n$. Die Mannigfaltigkeit mit der ihr in dieser Weise zuerteilten Gruppe $\mathcal{G}_n$ nennen wir X_n . Das Koordinatensystem ξ^h wird mit (h) bezeichnet.

Ein *Objekt* der X_n ist ein System von N über der Menge aller zulässigen Koordinatensysteme definierten Koordinatenfunktionen. Die einem bestimmten Koordinatensystem und einem bestimmten Punkt zugeordneten N Funktionswerte heißen *Bestimmungszahlen* des Objektes in diesem Punkte.

Ein *geometrisches Objekt* ist ein Objekt mit der Eigenschaft, daß sich die Bestimmungszahlen in Bezug auf irgend ein Koordinatensystem (h') darstellen lassen als Funktionen der Bestimmungszahlen in Bezug auf jedes andere Koordinatensystem (h) und der Transformation, die (h) in (h') überführt.

Ein *Größe* ist ein geometrisches Objekt bei dem die neuen Bestimmungszahlen lineare homogene Funktionen der alten sind und außer von diesen letzteren nur noch von den $\frac{\partial \xi^{h'}}{\partial \xi^h}$ im betrachteten Punkt abhängen.

Beispiele von Größen sind Skalare, Vektoren, Affinoren und Affinordichten, die in der üblichen Weise definiert werden. Zwecks späteren Vergleichs führen wir nur beispielsweise die Transformationsgleichung einer Affinordichte mit der kontravarianten Valenz 1, der kovarianten Valenz 2 und dem Gewicht $\mathfrak{f}$ an:

$$1.1 \quad \mathfrak{P}^{h' \dots i' j'} = \Delta^{-\mathfrak{f}} A^{h' i' j'}_{h i j} \mathfrak{P}^h_{i j}; \quad A^{h'}_h = \partial_h \xi^{h'}; \quad \partial_h = \frac{\partial}{\partial \xi^h}; \quad \Delta = \text{Det}(A^{h'}_h).$$

⁵⁾ Es sei hier auf eine neuere Arbeit von V. HLAVATÝ (1933.5) hingewiesen, die allgemeinere Einbettungen und Krümmungstheorie behandelt, allerdings unter Verwendung von nichthomogenen Koordinaten.

⁶⁾ Eigentlich Pseudogruppe, vgl. O. VELEN und J. H. C. WHITEHEAD, 1932.1.

Ist v^h ein kontravarianter Vektor, so bilden die $\partial_j v^h$ nur ein Objekt, die $\partial_j v^h$ zusammen mit den v^h dagegen ein geometrisches Objekt.

Die H_n .

Wir betrachten jetzt eine X_{n+1} mit den Urvariablen x^κ ($\kappa, \dots, \tau = 0, 1, \dots, n$), schränken aber die Koordinatentransformationen ein auf die Gruppe $\mathfrak{S}_{n+1}$ ⁷⁾ der im betrachteten Gebiet kontinuierlichen und hinreichend oft differenzierbaren homogenen Transformationen vom Grade 1. Die Gleichungen von allen Kurven durch den Ursprung ($x^\kappa = 0$) mit einer Parametergleichung von der Form

$$1.2 \quad x^\kappa = \lambda c^\kappa, \quad c^\kappa = \text{Konstanten},$$

welche Kurven wir die *Strahlen* der X_{n+1} nennen, bleiben bei dieser Gruppe invariant. Die n -dimensionale Mannigfaltigkeit der Strahlen nennen wir H_n ⁸⁾, jeden Strahl der X_{n+1} *Punkt* der H_n , jeden Punkt der X_{n+1} mit Ausnahme des Punktes $x^\kappa = 0$ *analytischen Punkt* der H_n . Der Unterschied zwischen X_n und H_n liegt also in der zugeordneten Transformationsgruppe. Jedem Punkt der H_n entsprechen ∞^1 analytische Punkte, jedem analytischen Punkt ein einziger Punkt der H_n .

Der Punkt der H_n , der dem analytischen Punkt x^κ entspricht, soll mit $[x^\kappa]$ bezeichnet werden. Das Zeichen $[]$ soll im Folgenden überhaupt stets bezeichnen: „abgesehen von einem beliebigen Zahlenfaktor“.

In der H_n betrachten wir Funktionen der x^κ , die homogen von irgend einem Grade sind. Homogene Funktionen nullten Grades nennen wir *Ortsfunktionen*. Übt man in der H_n bei festgehaltenem Koordinatensystem eine *Punkttransformation* (analytischer Punkte) aus von der Form

$$1.3 \quad 'x^\kappa = \varrho x^\kappa,$$

wo ϱ eine homogene Funktion nullten Grades der x^κ (also eine *Ortsfunktion*) ist, so besteht zwischen den Werten der Funktion f vom Grade τ in x^κ und $'x^\kappa$ die Beziehung

$$1.4 \quad f('x^\kappa) = \varrho^\tau f(x^\kappa).$$

Die Eulersche Gleichung lautet

$$1.5 \quad x^\mu \partial_\mu f = \tau f; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

⁷⁾ Eigentlich Pseudogruppe, vgl. Fußnote ⁶⁾.

⁸⁾ D. VAN DANTZIG, 1932.2.

Daraus folgt, daß die Koordinatentransformation von x^κ zu dem neuen System $x^{\kappa'}$ sich schreiben läßt

$$1.6 \quad x^{\kappa'} = \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa},$$

wo

$$1.7 \quad \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} = \partial_{\kappa} x^{\kappa'}; \quad \partial_{\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}$$

ist. *Objekte* der H_n werden in Bezug auf die Menge aller zulässigen Koordinatensystemen definiert genau wie in der X_n .

Der Definition der geometrischen Objekte der H_n legen wir zwei Gruppen zu Grunde, die Gruppe $\mathfrak{S}_{n+1}$ der Koordinatentransformationen (1.6) und die Gruppe $\mathfrak{F}$ der Punkttransformationen (1.3). Ein *geometrisches Objekt* ist also ein Objekt, bei dem die neuen Bestimmungszahlen sich sowohl bei $\mathfrak{S}_{n+1}$ als bei $\mathfrak{F}$ darstellen lassen als Funktionen der alten und der Transformation.

Eine *Größe* ist ein geometrisches Objekt, bei dem die neuen Bestimmungszahlen bei $\mathfrak{S}_{n+1}$ lineare homogene Funktionen der alten sind und außer von diesen letzteren nur noch von den $\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'}$ abhängen, während die neuen Bestimmungszahlen bei $\mathfrak{F}$ sich von den alten nur um einen Faktor unterscheiden, der eine Potenz von ϱ ist. *Kontra- bzw. kovariante projektive Vektoren* der H_n vom Grade r werden definiert durch die Transformationsformel

$$1.8 \quad \mathfrak{S}_{n+1}: \begin{cases} v^{\kappa'} = \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa} \\ w_{\lambda'} = \mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda} w_{\lambda} \end{cases} \quad \mathfrak{F}: \begin{cases} 'v^{\kappa} = \varrho^r v^{\kappa} \\ 'w_{\lambda} = \varrho^r w_{\lambda} \end{cases}.$$

Die Bestimmungszahlen sind also homogene Funktionen r -ten Grades der x^{κ} . Die x^{κ} bilden somit selbst einen kontravarianten projektiven Vektor von Grade 1. Dagegen bilden die dx^{κ} keinen kontravarianten projektiven Vektor. Zwar ist

$$1.9 \quad dx^{\kappa'} = \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa},$$

aber bei der Punkttransformation (1.3) geht dx^{κ} über in

$$1.10 \quad d'x^{\kappa} = \varrho dx^{\kappa} + x^{\kappa} d\varrho.$$

Kontravariante, kovariante und gemischte *Projektoren* und *Projektorordichten* verhalten sich zu den projektiven Vektoren wie Affinoren und Affinordichten zu den gewöhnlichen affinen Vektoren. Es genügt also, das folgende Beispiel einer Projektordichte vom Grade r mit der kontravarianten Valenz 1, der kovarianten Valenz 2 und dem Gewicht f anzugeben:

$$1.11 \quad \mathfrak{S}_{n+1}: \mathfrak{P}'_{\lambda'\mu'} = \overset{P}{A}^{-\mathfrak{k}} \mathfrak{P}_{\lambda\mu} \mathcal{A}'^{\lambda\mu}_{\kappa\lambda'\mu'}; \quad \overset{P}{A} = \text{Det}(\mathcal{A}'_{\kappa}).$$

$$\mathfrak{F}: \quad \mathfrak{P}'_{\lambda\mu} = \varrho^{\mathfrak{r}} \mathfrak{P}_{\lambda\mu}.$$

Neben den Bestimmungszahlen in Bezug auf ein einziges Bezugssystem betrachten wir auch solche, die in Bezug auf mehrere Systeme zu gleicher Zeit definiert sind. Solche Bestimmungszahlen heißen *intermediäre*. Sie tragen Indizes, die zu verschiedenen Bezugssystemen gehören. Z.B. sind

$$1.12 \quad Q'_{\lambda\mu'} = \mathcal{A}'^{\kappa'\mu}_{\kappa\mu'} Q_{\lambda\mu} = \mathcal{A}'^{\lambda'}_{\lambda} Q^{\kappa'}_{\lambda'\mu'}$$

intermediäre Bestimmungszahlen des Projektors $Q'_{\lambda\mu'}$. Handelt es sich um Dichten, so muß man natürlich zur Bildung von intermediären Bestimmungszahlen festlegen, wie sich das Gewicht über die einzelnen Indizes verteilt.

Ein Projektor ist eine Projektordichte vom Gewicht Null, ein projektiver Vektor ein Projektor der Valenz 1 und ein Skalar ein Projektor von der Valenz 0. Es ist bemerkenswert, daß die Transformationsdeterminante der kontra- bzw. kovarianten Vektordichten vom Gewicht $\frac{1}{n+1}$ bzw. $-\frac{1}{n+1}$ den Wert $+1$ hat.

Für $\frac{1}{n+1}$ schreiben wir im folgenden stets $\mathfrak{n}$. Ist $\mathfrak{r}$ der Grad einer Projektordichte, $\mathfrak{k}$ das Gewicht und $\mathfrak{d}$ die *Valenzendifferenz*, d.i. die kovariante Valenz vermindert um die kontravariante, so heißt die Summe $\mathfrak{r} + (n+1)\mathfrak{k} + \mathfrak{d}$ der *Exzeß* des Projektors. Im Gegensatz zum Grad ist der Exzeß auch bei Differentiation invariant. Da der Exzeß eines Produktes die Summe der Exzesse der Faktoren ist, bilden die Größen vom Exzeß Null in Bezug auf alle vorkommenden Operationen ein geschlossenes System. Da die geometrische Bedeutung der Größen nur von den Verhältnissen der Bestimmungszahlen abhängt und nicht von den Bestimmungszahlen selbst, beschränken wir uns daher im folgenden bei Größen der H_n fast ausschließlich auf Größen vom Exzeß Null. Neben den oben definierten *Größen* treten noch geometrische Objekte auf, in deren Transformationsformeln bei $\mathfrak{S}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ nicht nur die erste Ableitung der $x^{\kappa'}$ bzw. $'x^{\kappa}$, sondern auch andere Ableitungen (einschließlich der nullten) auftreten. dx^{κ} ist ein Beispiel eines geometrischen Objektes. Typisch für eine Größe ist, daß ihre Bestimmungszahlen in Bezug auf alle Koordinatensysteme verschwinden, wenn sie in Bezug auf ein einziges Koordinatensystem Null sind. Geometrische Objekte haben diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht.

Die lokalen P_n .

Jedem Punkte der H_n z.B. $[x_0^x]$ ordnen wir einen gewöhnlichen ebenen projektiven n -dimensionalen Raum P_n zu mit den gewöhnlichen homogenen Koordinaten X^x , deren Transformation folgendermaßen mit der Transformation der x^x verknüpft ist

$$1.13 \quad X^{x'} = (\mathcal{A}_{x'}^{x'})_{[x]=[\bar{x}]} X^x.$$

Diese P_n heißt die zu $[x_0^x]$ gehörige *lokale* P_n ($\mathcal{A}_{x'}^{x'}$ hat den Grad Null!). In Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{P}_{n+1}$ aller Transformationen (1.13) lassen sich nun in der lokalen P_n projektive Vektoren, Projektoren und Projektordichten mit in Bezug auf die X^x *konstanten* Bestimmungszahlen definieren in derselben Weise wie dies oben für H_n in Bezug auf $\mathfrak{H}_{n+1}$ getan ist. Da die Bestimmungszahlen aber Konstanten sind, gibt es hier keine Gruppe $\mathfrak{H}$. Infolgedessen gibt es keine eindeutige Zuordnung zwischen den also definierten Größen der P_n und den korrespondierenden Größen der H_n in $x^x = x_0^x$. Eine in $x^x = x_0^x$ definierte Projektordichte $P_{\lambda\mu}^x$ der H_n vom Grade r entspricht z.B. infolge des bei $\mathfrak{H}$ auftretenden Faktors q^r einem System von ∞^1 Projektordichten der zu x_0^x gehörigen P_n , die sich alle nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden. Nennen wir nun allgemein $[P_{\lambda\mu}^x]$, d.h. das bis auf einen Zahlenfaktor festgelegte $P_{\lambda\mu}^x$, das *Ideal*⁹⁾ von $P_{\lambda\mu}^x$, so folgt, daß es eine eindeutige Beziehung gibt zwischen den Idealen der Größen der H_n in x_0^x und den Idealen der Größen der zu x_0^x gehörigen P_n . Alle Ideale von Größen in P_n haben eine einfache geometrische Bedeutung, einem kontravarianten Vektorideal ist z.B. ein Punkt, einem kovarianten eine Hyperebene zugeordnet. Wichtig ist besonders das Ideal $[x_0^x]$, das sowohl in der H_n als in der P_n einen Punkt darstellt. Diese beiden Punkte sollen identifiziert und mit dem Namen *Berührungspunkt* bezeichnet werden. Mit Hilfe von x^x gelingt es nun Größen vom *Exzeß Null* der H_n , die in $x^x = x_0^x$ definiert sind, *durch Ideale in P_n darzustellen*, d.h. also rein geometrisch in P_n zu deuten⁹⁾.

Ein kontravarianter projektiver Vektor v^x vom Exzeß Null, der nicht mit x^x inzident ist, ist z.B. in eindeutiger Weise dem Punktenpaar $[v^x]$, $[x^x + v^x]$ (mit Reihenfolge) zugeordnet. Ein kovarianter projektiver Vektor w_λ läßt sich in ähnlicher Weise dem

⁹⁾ D. VAN DANTZIG, 1934.1.

Idealpaar $[w_\lambda], [\mathcal{A}_\lambda^\kappa + w_\lambda x^\kappa]$ zuordnen¹⁰⁾. Wird die lokale P_n zu einer E_n gemacht, durch Einführung einer uneigentlichen Hyperebene, so läßt sich jeder projektive Vektor in dieser Hyperebene darstellen durch den Punkt $[x^\kappa + v^\kappa]$, der zusammen mit dem stets vorhandenen Punkt $[x^\kappa]$ einen (affinen) Vektor aufspannt. Dies ist aber nichts anderes als die schon von Möbius eingeführte Darstellung eines Punktes im Unendlichen als einen (affinen) Vektor.

Es besteht eine bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung genaue eindeutige Zuordnung der Punkte der Umgebung des Berührungspunktes in H_n und in P_n . Dem analytischen Punkte $x^\kappa + dx^\kappa$ in H_n kann man nämlich den analytischen Punkt mit den Koordinaten $X^\kappa = x^\kappa + dx^\kappa$ in der P_n von x^κ zuordnen. Dieser analytische Punkt geht bei $\mathfrak{F}$ über in $\varrho(x^\kappa + dx^\kappa) + x^\kappa d\varrho$, und da dies bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung ein Vielfaches von $x^\kappa + dx^\kappa$ ist, sind die Punkte $[x^\kappa + dx^\kappa]$ in H_n und P_n einander in eindeutiger Weise zugeordnet.

Maßvektoren und Einheitsprojektor.

Das Kroneckersymbol δ_λ^κ stellt $(n+1)^2$ Skalare dar, die gleich 1 oder gleich 0 sind, je nachdem $\kappa = \lambda$ oder $\kappa \neq \lambda$ ist. Die kontravarianten bzw. kovarianten projektiven Vektoren

$$1.14 \quad e_\lambda^\kappa \stackrel{*}{=} \delta_\lambda^\kappa; \quad e_\lambda^\kappa \stackrel{*}{=} \delta_\lambda^\kappa$$

heißen die zum Bezugssystem (κ) gehörigen *Maßvektoren*. Sie haben den Grad Null, also den Exzeß $\neq$ Null. Das Zeichen $\stackrel{*}{=}$ bedeutet stets, daß nur ausgesagt wird, daß die Gleichung gilt in Bezug auf das Bezugssystem oder auf die Bezugssysteme, die in der Gleichung selbst verwendet sind. In der Tat gehen z.B. die e_λ^κ beim Übergang zu (κ') über in die $e_\lambda^{\kappa'}$, die durchaus nicht gleich 0 oder 1 zu sein brauchen, während die $(n+1)^2$ Zahlen des Kroneckersymbols sich als Skalare überhaupt nicht transformieren. Die hier über oder unter den Kernbuchstaben auftretenden Indizes, die sich nicht mittransformieren, heißen *tot* im Gegensatz zu den *lebendigen*, den sich mit transformierenden¹¹⁾. Bei *Projektoren* lassen sich lebendige Indizes durch Überschiebung mit den Maßvektoren in tote überführen, und es entsteht dabei aus einem Projektor ein

¹⁰⁾ Die Zuordnung für den allgemeinen Fall findet sich in der oben zitierten Arbeit von D. VAN DANTZIG.

¹¹⁾ Auch die Indizes des Kroneckersymbols sind tot, bleiben aber aus historischen Rücksichten rechts oben und unten stehen.

System von Projektoren niederer Valenz. Dieser Prozeß heißt Abdresseln, z.B.:

$$1.15 \quad Q_{\cdot \lambda^{(\mu)}}^{(\kappa)} = Q_{\cdot \lambda \sigma}^{\varrho} e_{\varrho}^{\kappa} e_{\mu}^{\sigma} = Q_{\cdot \lambda \mu}^{\kappa} {}^{12}.$$

Da der Exzeß der Maßvektoren $\neq 0$ ist, ist der Exzeß bei diesem Prozesse nicht invariant. Bei anderen Objekten (auch bei Projektordichten) geschieht das Abdresseln nur in Bezug auf *alle Indizes zugleich* und liefert ein System von Skalaren, z.B.:

$$1.16 \quad x^{\kappa} = x^{\kappa}.$$

Die Bildung der Bestimmungszahlen eines projektiven Vektors schreibt sich jetzt

$$1.17 \quad v^{\kappa} = v^{\lambda} e_{\lambda}^{\kappa},$$

und die Zusammenstellung des Vektors aus seinen Komponenten

$$1.18 \quad v^{\kappa} = v^{\lambda} e_{\lambda}^{\kappa}.$$

Beide Gleichungen sagen zahlenmäßig dasselbe aus, die geometrische Bedeutung ist aber ganz verschieden. In bezug auf das System (κ') geschrieben lauten sie

$$1.19 \quad v^{\kappa} = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^{\kappa},$$

bzw.

$$1.20 \quad v^{\kappa'} = v^{\lambda} e_{\lambda}^{\kappa'},$$

die zahlenmäßig nicht mehr dasselbe aussagen.

Der *Einheitsprojektor* $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}$ ist derjenige Projektor, der bei Überschiebung jeden Vektor in sich selbst überführt

$$1.21a \quad v^{\kappa} = v^{\lambda} \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}, \quad w_{\lambda} = w_{\kappa} \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa},$$

und für welchen also gilt

$$1.21b \quad \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa} = \delta_{\lambda}^{\kappa}.$$

Seine intermediären Bestimmungszahlen $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'}$ und $\mathcal{A}_{\lambda'}^{\kappa}$ sind dieselben Zahlen, die in den Gleichungen (1.6) und (1.8) auftreten. Auch (1.21a) sagt zahlenmäßig dasselbe aus wie (1.17) und (1.18).

¹²⁾ Abgedrosselte Indizes werden an ihrer Stelle eingeklammert oder auch, wenn keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, über oder unter dem Kernbuchstaben angebracht.

Differentialgeometrisch lassen sich δ_λ^κ , e_λ^κ , e_λ^κ und $\mathcal{A}_\lambda^\kappa$ folgendermaßen aus x^κ und $\tilde{x}^\kappa$ gewinnen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \delta_\lambda^\kappa &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\lambda} \\ \text{b)} \quad e_\lambda^\kappa &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \\ \text{c)} \quad e_\lambda^\kappa &= \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\lambda} \\ \text{d)} \quad \mathcal{A}_\lambda^\kappa &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (1.22c) folgt, daß die zu (κ) gehörigen kovarianten projektiven Maßvektoren Gradientvektoren sind, d.h. daß gilt

$$\partial_{[\mu} e_{\lambda]}^\kappa = 0. \quad 1.23$$

Wie ersichtlich verläuft alles in diesem Abschnitte genau wie in der affinen Geometrie, wo wir die entsprechenden Begriffsbildungen als bekannt voraussetzen.

Die zu H_n gehörige X_n .

Wir führen n beliebige von einander unabhängige Funktionen ξ^h ($h = 1, \dots, n$) der x^κ vom Grade Null ein. Dieselben unterliegen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ aller im betrachteten Gebiet kontinuierlichen und hinreichend oft differenzierbare Transformationen

$$\xi^{h'} = \xi^{h'}(\xi^h) \quad 1.24$$

und bilden also eine X_n , die wir *die zur H_n gehörige* nennen. Ein System von Zahlen ξ^h heißt *Punkt* dieser X_n . Der Unterschied zwischen Punkt und analytischem Punkt existiert hier natürlich nicht. Es besteht also eine eineindeutige Zuordnung zwischen Punkten der X_n und Punkten der H_n . Ausgehend von der Transformation des Linienelementes

$$d\xi^{h'} = A_h^{h'} d\xi^h; \quad A_h^{h'} = \partial_h \xi^{h'}; \quad \partial_h = \frac{\partial}{\partial \xi^h}, \quad 1.25$$

definieren wir in der X_n wie üblich Skalare, Vektoren, Affinoren und Dichten. Letztere sollen jetzt *A-Dichten* genannt werden zur Unterscheidung von den oben definierten projektiven Dichten, die fortan *P-Dichten* heißen. Die Transformationen der x^κ und

der ξ^h sind vollständig unabhängig von einander, sodaß die x^κ Skalare in X_n und die ξ^h Skalare in H_n sind. Jedem Punkte ξ^h der X_n (und damit auch jedem Punkte $[x^\kappa]_0$ der H_n) ordnen wir ein System von Koordinaten Ξ^h zu mit der Transformationsweise

$$1.26 \quad \Xi^{h'} = (A^{h'})_{\xi=\xi_0} \Xi^h.$$

Die Ξ^h bilden einen affinen Raum, die *lokale* E_n des betreffenden Punktes. Den Punkt $\Xi^h = 0$ identifizieren wir mit dem *Berührungspunkt*. Vektoren, Affinoren und A -Dichten lassen sich in bekannter Weise geometrisch deuten in diesen lokalen E_n . Neben den schon erwähnten Größen gibt es noch allgemeinere, die verschiedene Arten von Indizes tragen und sowohl zur H_n als zur X_n gehören. Das einfachste Beispiel bietet die Größe

$$1.27 \quad E_\mu = \partial_\mu \xi^h; \quad x^\mu E_\mu = 0,$$

die die Beziehungen zwischen der lokalen P_n und der lokalen E_n vermittelt. Infolge (1.27) gibt es eine Gleichung von der Form

$$1.28 \quad E_{[1}^1 \dots E_n^n] \mathcal{A}_0^\kappa = \alpha x^\kappa,$$

und das hier auftretende α ist stets $\neq 0$, vom Grade $-(n+1)$ und Produkt einer P -Dichte vom Gewicht $+1$ mit einer A -Dichte vom Gewicht -1 . Infolgedessen ist jeder P -Dichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ in *eindeutiger* Weise eine A -Dichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ zugeordnet, d.h. *die geometrische Bedeutung von P -Dichten und A -Dichten ist dieselbe*. Jedem kontravarianten projektiven Vektor v^κ der P_n ist in *eindeutiger* Weise ein kontravarianter Vektor $'v^h$ der E_n zugeordnet vermöge

$$1.29 \quad 'v^h = E_\kappa^h v^\kappa$$

und jedem kovarianten Vektor w_i der E_n in *eindeutiger* Weise ein kovarianter projektiver Vektor $'w_\lambda$ der P_n vermöge

$$1.30 \quad 'w_\lambda = E_\lambda^i w_i.$$

Eine *eindeutige* Zuordnung von Größen der P_n und der E_n besteht aber, mit Ausnahme der Dichten, nicht. Wohl besteht eine *eindeutige* Abbildung der Umgebungen des Berührungspunktes bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung. Denn jedem Punkte $\xi^h + d\xi^h$ der X_n , also auch jedem Punkte der Umgebung in H_n , ist mit dieser Genauigkeit *eindeutig* der Punkt mit den Koordinaten $d\xi^h$ der E_n zugeordnet, da aber, wie oben

gezeigt wurde, auch eine eindeutige Zuordnung der Punkte der H_n und der Punkte der P_n um den Berührungspunkt besteht, besteht auch die erwähnte Zuordnung zwischen P_n und E_n .

Die projektiven Größen der X_n .

Man kann auch jedem Punkte der X_n eine P_n zuordnen, ohne dabei Begriffsbildungen heranzuziehen, die der H_n angehören.

Diese P_n , die wir zur Unterscheidung mit $\overset{x}{P}_n$ bezeichnen, sind in allen Arbeiten aufgetreten, die von der X_n (also nicht von homogenen Koordinaten) ausgehen. Ihre genaueste Definition fanden sie bei Weyl und Robertson¹³⁾. Der Transformation (1.24) läßt sich in eindeutiger Weise eine projektive Transformation

$$1.31 \quad H^{h'} = \frac{\Pi_h^{h'} H^h + \Pi_0^{h'}}{\Pi_h^{0'} H^h + \Pi_0^{0'}}$$

zuordnen vermöge der folgenden drei invarianten Forderungen:

1. Der Punkt $H^h = 0$ soll dieselben Bestimmungs-

zahlen behalten:

$$\Pi_0^{h'} = 0; \Pi_0^{0'} \neq 0.$$

$$1.32 \quad 2. \left(\frac{\partial H^{h'}}{\partial H^h} \right)_{H^h=0} = \frac{\partial \xi^{h'}}{\partial \xi^h}, \text{ also: } \Pi_0^{0'} \Pi_h^{h'} = A_h^{h'}.$$

$$3. \left\{ \frac{\partial}{\partial H^j} \text{Det} \left(\frac{\partial H^{h'}}{\partial H^h} \right) \right\}_{H^h=0} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \overset{A}{A}; \quad \overset{A}{A} = \text{Det} (A_h^{h'}).$$

Aus der zweiten Forderung ergibt sich, daß

$$1.33 \quad H^{h'} = \frac{A_h^{h'} H^h}{1 + \Pi_j H^j}, \quad \Pi_j = \Pi_j^0 / \Pi_0^{0'}$$

ist, sodaß in der Nähe von $H^h = 0$ gilt

$$1.34 \quad \text{Det} \left(\frac{\partial H^{h'}}{\partial H^h} \right) = \overset{A}{A} - (n+1) \overset{A}{A} \Pi_j H^j + \dots$$

Aus der dritten Forderung folgt dann

$$1.35 \quad \Pi_j = -n \partial_j \log \overset{A}{A}; \quad n = \frac{1}{n+1}.$$

Die H^h bilden einen gewöhnlichen projektiven Raum (mit einem bevorzugten Punkt, nämlich $H^h = 0$), den wir die *lokale* $\overset{x}{P}_n$ des betreffenden Punktes der X_n nennen. Den Punkt $H^h = 0$

¹³⁾ H. WEYL, 1921.1; H. P. ROBERTSON und H. WEYL, 1929.2; vgl. auch J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, 1930.2.

identifizieren wir mit dem *Berührungspunkt*. In der $\overset{x}{P}_n$ führen wir jetzt homogene Koordinaten Z^a ($a, \dots, g = 0, 1, \dots, n$) ein:

$$1.36 \quad H^h = \frac{Z^h}{Z^0}.$$

Die Transformationsweise der Z^a ist dann

$$1.37 \quad Z^{a'} = \Pi_{\alpha}^{a'} Z^a,$$

mit

$$1.38 \quad \begin{aligned} \Pi_h^{h'} &= \alpha A_h^{h'} \\ \Pi_h^{0'} &= -\alpha n \delta_h^A \log A \\ \Pi_0^{h'} &= 0 \\ \Pi_0^{0'} &= \alpha, \end{aligned}$$

wo α ein noch beliebig wählbarer Faktor ist. Da die Gruppe (1.37) eine Darstellung der Gruppe (1.26) sein muß, ist die Determinante $\alpha^{n+1} A^A$ von (1.37) jedenfalls eine Potenz von A^A . Die Wahl von α ist ziemlich belanglos, da sie nur darüber entscheidet, was wir in der $\overset{x}{P}_n$ künftig projektive Vektoren und was projektive Vektordichten nennen wollen¹⁴⁾. Wir wählen $\alpha = 1$ und definieren projektive Vektoren, Projektoren und Projektordichten in Bezug auf (1.37) in derselben Weise wie die entsprechenden Größen der P_n in Bezug auf (1.13). Die also entstehenden Größen nennen wir im Gegensatz zu den Projektordichten der H_n *Projektordichten der X_n* , da sie in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{G}_n$ definiert sind. Infolge unserer Wahl von α haben die kontravarianten bzw. kovarianten Vektordichten vom Gewicht n bzw. $-n$ auch hier die Transformationsdeterminante $+1$. Aus (1.38) folgt, daß jedem kontravarianten projektiven Vektor v^a der X_n in eindeutiger Weise ein kontravarianter affiner Vektor $'v^h$ der X_n zugeordnet ist vermöge

$$1.39 \quad 'v^h \stackrel{*}{=} v^h,$$

und jedem kovarianten affinen Vektor w_i der X_n in eindeutiger Weise ein kovarianter projektiver Vektor $'w_b$ der X_n vermöge

$$1.40 \quad 'w_i \stackrel{*}{=} w_i, \quad 'w_0 = 0.$$

Daraus folgt aber natürlich noch keineswegs eine *eindeutige* Abbildung der projektiven Größen der X_n auf die affinen.

¹⁴⁾ Nur darf man nicht $\alpha = A^{-n}$ wählen, da dann $\alpha^{n+1} A^A = 1$ wird und der Unterschied zwischen Projektoren und Projektordichten verschwindet.

Ordnen wir dem Punkte $\xi^h + d\xi^h$ den Punkt mit den Koordinaten $d\xi^h$ der lokalen $\overset{x}{P}_n$ von ξ^h zu, so ist diese Zuordnung infolge der ersten und zweiten Forderung bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung invariant bei $\mathfrak{G}_n$ und infolge der dritten Forderung, was die Transformationsdeterminante betrifft, sogar invariant bis auf Infinitesimale dritter Ordnung. Weyl nennt daher die $\overset{x}{P}_n$ semioskulierend. Bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung besteht also eine eindeutige Zuordnung der Umgebungen des Berührungspunktes in H_n, X_n, E_n, P_n und $\overset{x}{P}_n$.

Die anholonomen Bezugssysteme in E_n, P_n und $\overset{x}{P}_n$.

Wir betrachten in X_n ein beliebiges Matrixfeld $A_{h'}^{h'}$ vom Range n und die Umkehrung $A_{h'}^h$ und führen

$$1.41 \quad v^{h'} = A_{h'}^{h'} v^h; \quad w_{i'} = A_{i'}^i w_i; \quad A_{i'}^{j'} A_{j'}^h = A_i^h$$

ein als neue Bestimmungszahlen der Vektoren v^h bzw. w_i . $A_{i'}^{h'}$ und $A_{h'}^i$ sind also die intermediären Bestimmungszahlen von A_i^h in Bezug auf die Systeme (h) und (h') . Das so eingeführte neue Bezugssystem (h') ist dann und nur dann holonom (d.h. es gehört dann und nur dann zu einem Koordinatensystem $\xi^{h'}$), wenn die kovarianten Maßvektoren $\overset{h'}{e}_i$ Gradientvektoren sind, anders gesagt, wenn die Bestimmungszahlen des *affinen Anholonomitätsobjektes*

$$1.42 \quad \overset{A}{Q}_{j'i'}^{h'} = A_{j'i'}^{j,i} \partial_{[j} A_{i]}^{h'}; \quad ((h) \text{ holonom})$$

in Bezug auf (h') verschwinden. In bezug auf ein anholonomes System (h') schreiben wir $(d\xi)^{h'}$ statt $d\xi^{h'}$, da $\xi^{h'}$ für sich keine Bedeutung hätte.

Die Einführung eines anholonomen Systems in P_n ist etwas komplizierter, da der Grad hier eine Rolle spielt ¹⁵⁾. Wir betrachten wiederum ein beliebiges Matrixfeld $\mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda'}$ vom Grade $-q$ und die Umkehrung $\mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda}$ vom Grade $+q$ und führen

$$1.43 \quad t^{\lambda'} = \mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda'} t^{\lambda}; \quad u_{\lambda'} = \mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda} u_{\lambda}$$

als neue Bestimmungszahlen der projektiven Vektoren t^{λ} bzw. u_{λ} ein. Ist der Exzeß von t^{λ} und u_{λ} Null, so haben diese neuen Bestimmungszahlen den Grad $-q+1$ bzw. $q-1$.

¹⁵⁾ J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, 1932.3, 1933.1.

Da die neuen kontravarianten Maßvektoren

$$1.44 \quad e_{\lambda'}^{\kappa} = \mathcal{A}_{\lambda'}^{\kappa},$$

den Grad q haben, nennen wir das neue Bezugssystem *vom Grade* q . Für den Exzeß ε einer Größe ergibt sich also die Formel

$$1.45 \quad \varepsilon = r + (1 - q) \{ \delta + (n + 1) \mathfrak{f} \},$$

wo q der Grad des Bezugssystems, r der Grad der Bestimmungszahlen der Größe in Bezug auf dieses System, δ die Valenzendifferenz und $\mathfrak{f}$ das Gewicht ist (Vgl. S. [7] 7). Damit das neue Bezugssystem holonom ist, muß der Ausdruck

$$1.46 \quad \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa}$$

nicht nur ein vollständiges Differential, sondern auch gerade das Differential von $\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}$ sein. Zur Erfüllung der ersten Bedingung ist n. u. h., daß die kovarianten Maßvektoren $e_{\lambda}^{\kappa'}$ Gradientvektoren sind, anders gesagt, daß die Bestimmungszahlen des projektiven Anholonomitätsobjektes

$$1.47 \quad \overset{P}{\Omega}_{\mu' \lambda'}^{\kappa'} = \mathcal{A}_{\mu' \lambda'}^{\mu \lambda} \partial_{[\mu} \mathcal{A}_{\lambda]}^{\kappa'} \quad ((\kappa) \text{ holonom})$$

in Bezug auf (κ') verschwinden. Da aber für verschwindende $\overset{P}{\Omega}_{\mu' \lambda'}^{\kappa'}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa} &= d(\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}) - x^{\kappa} dx^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} \\ 1.48 \quad &= d(\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}) - x^{\kappa} dx^{\mu} \partial_{\kappa} \mathcal{A}_{\mu}^{\kappa'} \\ &= d(\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa}) + q \mathcal{A}_{\mu}^{\kappa'} dx^{\mu} \end{aligned}$$

ist, ist die zweite Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn q verschwindet. *Bezugssysteme mit einem Grad $\neq 0$ sind also stets anholonom.* Bei einem anholonomen System (κ') ist $(dx)^{\kappa'}$ zu schreiben für $\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa}$, da entweder $x^{\kappa'}$ für sich keine Bedeutung hat oder doch jedenfalls $\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa} \neq dx^{\kappa'}$ ist.

In der $\overset{x}{P}_n$ folgt aus (1.38), daß die n. u. h. Bedingungen dafür, daß das beliebige Matrixfeld $\Pi_b^{a'}$ mit seiner Umkehrung Π_b^a zu einem holonomen Bezugssystem führt, lauten

$$\begin{aligned} 1.49 \quad \partial_{[j} \Pi_{i]}^{h'} &= 0; \quad \Pi_i^{0'} = -n \partial_i \log \text{Det} (\Pi_h^{h'}) \\ \Pi_0^{h'} &= 0; \quad \Pi_0^{0'} = 1. \end{aligned}$$

Abbildung der P_n auf die $\overset{x}{P}_n$.

Um die Verbindung zwischen P_n und $\overset{x}{P}_n$ herzustellen, suchen wir jetzt dem System der Urvariablen ξ^h ein nichtholonomes Bezugssystem (a) in P_n in solcher Weise zuzuordnen, daß es sich bei $\mathfrak{G}_n$ so transformiert, wie das den ξ^h zugeordnete System der Z^a in $\overset{x}{P}_n$. Setzen wir an

$$1.50 \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda^h &= \partial_\lambda \xi^h = E_\lambda^h; & \mathcal{A}_\lambda^{h'} &= \partial_\lambda \xi^{h'} = E_\lambda^{h'}, \\ \mathcal{A}_\lambda^0 &= \overset{(h)}{\tau}_\lambda; & \mathcal{A}_\lambda^{0'} &= \overset{(h')}{\tau}_\lambda, \end{aligned}$$

wo $\overset{(h)}{\tau}_\lambda$ ein geometrisches Objekt ist, das sich bei $\mathfrak{G}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ wie ein kovarianter projektiver Vektor vom Exzeß Null transformiert, dessen Transformationsweise bei $\mathfrak{G}_n$ aber noch zu bestimmen ist. Der Grad des Bezugssystems (a) ist also gleich 1. Die aus (1.38) für $\alpha = 1$ folgende Forderung

$$1.51 \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_i^{h'} &= \partial_i \xi^{h'} \\ \mathcal{A}_i^{0'} &= -n \partial_i \log \overset{A}{\Delta} \\ \mathcal{A}_0^{h'} &= 0 \\ \mathcal{A}_0^{0'} &= 1 \end{aligned}$$

ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$1.52 \quad \overset{(h')}{\tau}_\lambda = \overset{(h)}{\tau}_\lambda - n \partial_\lambda \log \overset{A}{\Delta}$$

ist. Mit Hilfe von α aus (1.28) gelingt es, $\overset{(h)}{\tau}_\lambda$ zurückzuführen auf ein geometrisches Objekt von H_n allein. Setzen wir

$$1.53 \quad \overset{(h)}{\tau}_\lambda = -n \partial_\lambda \log \alpha - \sigma_\lambda,$$

so folgt, daß σ_λ bei $\mathfrak{G}_n$ invariant ist,

$$1.54 \quad \overset{(h')}{\sigma}_\lambda = -\overset{(h')}{\tau}_\lambda - n \partial_\lambda \log \overset{A}{\Delta} - n \partial_\lambda \log \alpha = \overset{(h)}{\sigma}_\lambda,$$

und daß bei $\mathfrak{G}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$:

$$1.55 \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda'} &= -n \partial_{\lambda'} \log \alpha + n \partial_{\lambda'} \log \overset{P}{\Delta} - \tau_{\lambda'} = \mathcal{A}_{\lambda'}^\lambda \sigma_\lambda + n \partial_{\lambda'} \log \overset{P}{\Delta} \\ \sigma_{\lambda'} &= \varrho^{-1} \sigma_\lambda \end{aligned}$$

ist. σ_λ transformiert sich also bei $\mathfrak{G}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ wie der Gradient des Logarithmus einer P -Dichte vom Gewicht $-n$.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Die lokale P_n und die lokale $\overset{x}{P}_n$ können eineindeutig auf einander abgebildet werden, wenn man über ein geometrisches Objekt

der H_n verfügt, das sich transformiert wie der Gradient des Logarithmus einer P -Dichte vom Gewicht $-n$.

Von den Bestimmungszahlen von x^λ in Bezug auf (a) verschwinden alle bis auf x^0 , und x^0 ist infolge (1.50) und (1.52) sowohl bei $\mathfrak{S}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$ als bei $\mathfrak{G}_n$ invariant, also ein Skalar vom Grade Null. Da $-nx^\lambda \partial_\lambda \log a = +1$ ist und σ_λ bei Addition eines beliebigen kovarianten projektiven Vektors vom Exzeß Null seine Transformationseigenschaften behält, kann man zwar stets erreichen, daß $x^\lambda \sigma_\lambda = 0$ und somit $x^0 = 1$ wird, σ_λ ist aber auch durch diese zusätzliche Forderung noch nicht festgelegt.

Abbildung der P_n auf die E_n .

Die P_n und die E_n lassen sich nur dann aufeinander abbilden, wenn in der P_n eine nicht durch den Berührungspunkt gehende, im übrigen aber beliebig wählbare, Hyperebene gegeben ist, die mit der uneigentlichen Hyperebene der E_n korrespondieren soll ¹⁶⁾. Ist der kovariante projektive Vektor w_λ dieser Hyperebene durch die Normierungsgleichung

$$1.56 \quad w_\lambda x^\lambda = 1$$

festgelegt, so wird die Abbildung vermittelt durch das anholonome System (a) vom Grade $q = +1$, das durch die Gleichungen

$$1.57 \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda^h &= E_\lambda^h = A_{h'}^h \partial_\lambda \xi^{h'} \quad ((h') \text{ holonom}), \\ \mathcal{A}_\lambda^0 &= w_\lambda \end{aligned}$$

definiert ist ¹⁷⁾. Das Anholonomitätsobjekt dieses Systems verschwindet dann und nur dann, wenn das System (h) in X_n holonom ist und außerdem (Holonomität des Systems (κ) vorausgesetzt) $\partial_{[\mu} w_{\lambda]}$ verschwindet. Der projektive Vektor x^λ hat in Bezug auf dieses System nur eine einzige nicht-verschwindende Bestimmungszahl $x^0 = +1$. Dem projektiven Vektor v^λ ist in der E_n der Punkt mit dem Radiusvektor

$$1.58 \quad v^h = \frac{\mathcal{A}_\lambda^h v^\lambda}{w_\lambda v^\lambda} = \frac{v^h}{w_\lambda v^\lambda}$$

zugeordnet mit dem Möbiusschen Gewicht $v^\lambda w_\lambda$. Addition von Vektoren in der P_n entspricht der bekannten Punktaddition von Möbius in der E_n . Punkten der P_n entsprechen eineindeutig Punkte der E_n .

¹⁶⁾ D. VAN DANTZIG, 1932.4.

¹⁷⁾ In Bezug auf ein System vom Grade 1 haben laut (1.45) alle Größen vom Exzeß Null auch den Grad Null.

In derselben Weise läßt sich die $\overset{x}{P}_n$ auf die E_n abbilden. Ist (a) das Bezugssystem in der $\overset{x}{P}_n$, das den ξ^h zugeordnet ist, und $[u_b]$ die vorgegebene Hyperebene der $\overset{x}{P}_n$, die mit der uneigentlichen Hyperebene der E_n korrespondieren soll, mit der Normierungsbedingung $u_0 = 1$, so ist dem projektiven Vektor v^a der $\overset{x}{P}_n$ der Punkt mit dem Radiusvektor

$$1.59 \quad v^h = \frac{v^h}{v^a u_a}$$

zugeordnet mit dem Möbiusschen Gewicht $v^a u_a$.

Der allgemeine projektive Zusammenhang.

Wie in der gewöhnlichen Differentialgeometrie so hat auch hier die partielle Ableitung einer Größe nach x^κ nur bei einem Skalar invariante Bedeutung. Sie läßt sich (für Größen vom Exzeß Null) in der allgemeinsten Weise zu einer kovarianten Ableitung

$$1.60 \quad \begin{aligned} V_\mu v^\kappa &= \partial_\mu v^\kappa + \Pi_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda - \mathfrak{f} \Pi_{\mu\varrho}^\varrho v^\kappa \\ V_\mu v_\lambda &= \partial_\mu v_\lambda - \Pi_{\mu\lambda}^\kappa v_\kappa - \mathfrak{f} \Pi_{\mu\varrho}^\varrho v_\lambda \end{aligned}$$

erweitern durch Einführung eines geometrischen Objektes mit den $(n+1)^3$ Bestimmungszahlen $\Pi_{\mu\lambda}^\kappa$, die sich folgendermaßen transformieren

$$1.61 \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_{n+1} : \Pi_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} &= \mathcal{A}_{\kappa\mu'\lambda'}^{\kappa'\mu\lambda} \Pi_{\mu\lambda}^\kappa + \mathcal{A}_{\varrho}^{\kappa'} \partial_{\mu'} \mathcal{A}_{\lambda'}^\varrho,^{18)} \\ \mathfrak{S} : \Pi_{\mu\lambda}^\kappa &= \varrho^{-1} \Pi_{\mu\lambda}^\kappa. \end{aligned}$$

Anders als in der gewöhnlichen Differentialgeometrie lassen sich aus den $\Pi_{\mu\lambda}^\kappa$ außer dem Asymmetrieprojektor

$$1.62 \quad S_{\mu\lambda}^\kappa = \Pi_{[\mu\lambda]}^\kappa + \overset{P}{\Omega}_{\mu\lambda}^\kappa \stackrel{h}{=} \Pi_{[\mu\lambda]}^\kappa^{19)}$$

noch zwei Projektoren bilden durch Überschiebung mit x^μ bzw. x^λ

$$1.63 \quad P_{\cdot\lambda}^\kappa = \Pi_{\mu\lambda}^\kappa x^\mu + (1-q) \mathcal{A}_\lambda^\kappa \stackrel{h}{=} \Pi_{\mu\lambda}^\kappa x^\mu + \mathcal{A}_\lambda^\kappa$$

$$1.64 \quad Q_{\cdot\mu}^\kappa = \Pi_{\mu\lambda}^\kappa x^\lambda + (1-q) \mathcal{A}_\mu^\kappa \stackrel{h}{=} \Pi_{\mu\lambda}^\kappa x^\lambda + \mathcal{A}_\mu^\kappa,$$

¹⁸⁾ Diese Gleichung gilt auch für anholonome Systeme. Ist (κ') anholonom, (κ'') dagegen irgend ein holonomes Bezugssystem, so ist $\partial_{\mu'}$ folgendermaßen definiert: $\partial_{\mu'} = \mathcal{A}_{\mu'}^{\lambda''} \partial_{\lambda''}$.

¹⁹⁾ Das Zeichen $\stackrel{h}{=}$ bedeutet, daß eine Gleichung nur gilt für holonome Bezugssysteme.

die für den speziellen Fall eines symmetrischen Zusammenhangs zusammenfallen. Aus (1.64) folgt

$$1.65 \quad Q_{\cdot\mu}^{\kappa} = \nabla_{\mu} x^{\kappa}.$$

Das einfachste Beispiel eines projektiven Zusammenhangs bildet die gewöhnliche projektive Geometrie, also die P_n . Beschränken wir uns zunächst auf gewöhnliche projektive Koordinaten, die also nur lineare homogene Transformationen mit konstanten Koeffizienten zulassen, so ist schon $\partial_{\mu} x^{\kappa}$ ein Projektor. Setzen wir also $\Pi_{\mu\lambda}^{\kappa}$ für diese Koordinaten Null, und machen wir sodann mittels (1.61) den Übergang zu beliebigen homogenen Koordinaten, so bestimmt (1.60) eine kovariante Ableitung in beliebigen Koordinaten. Eine H_n mit einem solchen Zusammenhang ist also eine P_n und in einer P_n ist $P_{\cdot\lambda}^{\kappa} = Q_{\cdot\lambda}^{\kappa} = \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}$.

Integrabilität und Normalisierbarkeit.

Die Transformationsgleichung (1.61) läßt sich auch schreiben

$$1.66 \quad \mathcal{A}_{\mu\lambda}^{\mu'\lambda'} \Pi_{\mu'\lambda'}^{\kappa} = \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'}.$$

Wir wollen nun sowohl (κ) als (κ') als holonom voraussetzen und versuchen (κ') so zu bestimmen, daß $\Pi_{(\mu'\lambda')}^{\kappa'}$ in allen Punkten verschwindet. Dazu ist also n. u. h., daß

$$1.67 \quad \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'} \stackrel{h}{=} \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} \Pi_{(\mu\lambda)}^{\kappa}$$

ist. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichung lauten

$$1.68 \quad N_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} - 2\nabla_{[\nu} S_{\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} - 2S_{[\nu|\lambda]}^{\cdot\cdot\varrho} S_{\mu]\varrho}^{\cdot\cdot\kappa} - 2S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\varrho} S_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = 0,$$

wo

$$1.69 \quad N_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} \stackrel{h}{=} 2\partial_{[\nu} \Pi_{\mu]\lambda}^{\cdot\kappa} + 2\Pi_{[\nu|\lambda]}^{\cdot\kappa} \Pi_{\mu]}^{\cdot\varrho}$$

der Krümmungsprojektor des Zusammenhangs ist. Ist diese Bedingung erfüllt und außerdem die Bedingung für die Homogenität nullten Grades von $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'}$:

$$1.70 \quad 0 = x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'} (P_{\cdot\lambda}^{\kappa} + Q_{\cdot\lambda}^{\kappa} - 2\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}),$$

d. h. ist

$$1.71 \quad P_{\cdot\lambda}^{\kappa} + Q_{\cdot\lambda}^{\kappa} = 2\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa},$$

so läßt sich $\Pi_{(\mu'\lambda')}^{\kappa'}$ gleichzeitig in allen Punkten zum Verschwinden bringen. Der Zusammenhang heißt dann *integrabel*.

Sind diese Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt, so kann man wenigstens fordern, daß in einem bestimmten Punkt x_0^{κ}

nicht nur $\Pi_{(\mu'\lambda')}^{\kappa'}$, sondern auch $\partial_{(v'}\Pi_{\mu'\lambda')}^{\kappa'}$, $\partial_{(\pi'}\partial_{v'}\Pi_{\mu'\lambda')}^{\kappa'}$ u.s.w. alle verschwinden:

$$1.72 \quad (\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'})_0 \stackrel{h}{=} (\mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'}\Pi_{\mu\lambda}^{\kappa})_0; \quad \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa} = \Pi_{(\mu\lambda)}^{\kappa}$$

$$(\partial_{\nu}\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'})_0 \stackrel{h}{=} (\mathcal{A}_{\varrho}^{\kappa'}\Pi_{(\nu|\kappa|}^{\varrho}\Pi_{\mu\lambda)}^{\kappa}) + \mathcal{A}_{\kappa}^{\kappa'}\partial_{(\nu}\Pi_{\mu\lambda)}^{\kappa})_0$$

u.s.w.

Durch diese Bedingungen ist eine Reihenentwicklung für $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'}$ um den Punkt x_0^{κ} in eindeutiger Weise festgelegt. Man beweist leicht, daß auch hier (1.71) die n.u.h. Bedingung darstellt dafür, daß $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'}$ homogen vom Grade Null ist. Wird

$$1.73 \quad (\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'})_0 \stackrel{*}{=} \delta_{\lambda}^{\kappa'}$$

gewählt, so nennen wir die

$$1.74 \quad x^{\kappa'} = \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa'} x^{\lambda}$$

die zu (κ) und zum Punkte $[x_0^{\kappa}]$ gehörigen projektiven *Normalkoordinaten*. Erleiden die x^{κ} eine beliebige Transformation, so transformieren sich die zu einem beliebigen Punkte gehörigen Normalkoordinaten *linear* mit *konstanten* Koeffizienten. Ein Zusammenhang, der die Bedingung (1.71) erfüllt, so daß sich also die $\Pi_{(\mu\lambda)}^{\kappa}$ und ihre symmetrisierten Ableitungen in jedem einzelnen Punkte (aber nicht notwendig in mehreren Punkten zugleich) zum Verschwinden bringen lassen, heißt *lokal normalisierbar*.

Die projektiven Vektorübertragungen.

Merkwürdigerweise existiert nicht stets ein kovariantes Differential. dx^{κ} ist ja kein projektiver Vektor und infolgedessen ist auch $dx^{\mu}\nabla_{\mu}v^{\kappa}$ im Allgemeinen kein projektiver Vektor. Zwar ist die Transformation bei $\mathfrak{S}_{n+1}$ die eines projektiven Vektors, bei $\mathfrak{F}$ geht der Ausdruck aber über in

$$1.75 \quad \varrho(dx^{\mu} + x^{\mu}d\log\varrho)\nabla_{\mu}v^{\kappa} = \varrho dx^{\mu}\nabla_{\mu}v^{\kappa} + \varrho x^{\mu}(\partial_{\mu}v^{\kappa})d\log\varrho + \varrho x^{\mu}\Pi_{\mu\lambda}^{\kappa}v^{\lambda}d\log\varrho$$

$$= \varrho dx^{\mu}\nabla_{\mu}v^{\kappa} + \varrho v^{\lambda}(d\log\varrho)(\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa} + P_{\lambda}^{\kappa} - \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa})$$

$$= \varrho dx^{\mu}\nabla_{\mu}v^{\kappa} + \varrho P_{\lambda}^{\kappa}v^{\lambda}d\log\varrho.$$

Soll ein gewöhnliches, d.h. ein mittels Überschiebung von ∇_{μ} mit dx^{μ} gewonnenes, kovariantes Differential existieren, so ist also n.u.h., daß P_{λ}^{κ} verschwindet.

Es sei jetzt ein Zusammenhang mit kovariantem Differential gegeben. v^{κ} sei ein nur in einem einzigen Punkt (also in ∞^1 analytischen Punkten) der H_n definiertes Vektorfeld vom Exzeß Null.

Der Feldwert in einem analytischen Punkte x_0^λ läßt sich dann nach einem benachbarten im allgemeinen nicht demselben Punkte angehörigen analytischen Punkt $x_0^\lambda + dx^\lambda$ übertragen, indem man das kovariante Differential gleich Null setzt. Der übertragene Feldwert ist $v^\lambda + dv^\lambda$, wo

$$1.76 \quad dv^\lambda = -dx^\mu \Pi_{\mu\lambda}^\lambda v^\lambda$$

ist, und dieser Feldwert geht bei $\mathfrak{F}$ über in ...

$$1.77 \quad \begin{aligned} \varrho(v^\lambda - \Pi_{\mu\lambda}^\lambda v^\lambda dx^\mu) - (P_{\lambda}^\lambda - \mathcal{A}_{\lambda}^\lambda) v^\lambda d\varrho = \\ = (\varrho + d\varrho)(v^\lambda - \Pi_{\mu\lambda}^\lambda v^\lambda dx^\mu) - P_{\lambda}^\lambda v^\lambda d\varrho. \end{aligned}$$

Da P_{λ}^λ verschwindet, folgt aus (1.76), daß bei Übertragung nach einem der analytischen Punkte des ursprünglichen Punktes das Feld v^λ in sich selbst übergeht und aus (1.77), daß $v^\lambda + dv^\lambda$ bei $\mathfrak{F}$ einen Faktor $\varrho + d\varrho$ bekommt und somit im zu $x_0^\lambda + dx^\lambda$ gehörigen Punkte der H_n ebenfalls ein Vektorfeld vom Exzeß Null darstellt. Eine solche Übertragung nennen wir eine *projektive Vektorübertragung*. Da sich jeder in x_0^λ definierte Vektor v^λ der H_n außer x_0^λ durch das Punktepaar $[v^\lambda]$, $[v^\lambda + x_0^\lambda]$ darstellen läßt, bedeutet eine Vektorübertragung geometrisch eine Übertragung von Punktepaaren. Die Übertragung des ersten Punktes jedes Paares fällt zusammen mit der aus jeder Übertragung von v^λ von selbst folgenden Übertragung von $[v^\lambda]$. Erst die sich dazu gesellende Übertragung des zweiten Punktes jedes Paares (die natürlich im Allgemeinen eine ganz andere ist als die des ersten Punktes) legt die projektive Vektorübertragung vollständig fest. Umgekehrt ist der Zusammenhang durch die Vektorübertragung eindeutig bestimmt. *Eine projektive Vektorübertragung ist also ein Zusammenhang mit verschwindendem P_{λ}^λ* ²⁰⁾. In einer P_n gibt es ein Koordinatensystem, in Bezug auf welches die $\Pi_{\mu\lambda}^\lambda$ verschwinden. Infolge (1.63) ist also P_{λ}^λ gleich $\mathcal{A}_{\lambda}^\lambda$. *Es existiert also in P_n kein kovariantes Differential und keine projektive Vektorübertragung.*

Der projektive Vektor x^λ geht bei einer projektiven Vektorübertragung über in

$$1.78 \quad \begin{aligned} x^\lambda - dx^\mu \Pi_{\mu\lambda}^\lambda x^\lambda &= x^\lambda - dx^\mu (Q_{\mu}^\lambda - \mathcal{A}_{\mu}^\lambda) \\ &= x^\lambda + dx^\lambda - Q_{\mu}^\lambda dx^\mu. \end{aligned}$$

Es sind zwei Fälle besonders hervorzuheben, erstens der Fall $Q_{\lambda}^\lambda = 0$, wobei x^λ in $x^\lambda + dx^\lambda$ übergeht, das Feld x^λ also *kovariant*

²⁰⁾ D. VAN DANTZIG, 1932.2.

konstant ist. Zweitens der Fall $Q_{\mu}^{\kappa} = \mathcal{A}_{\mu}^{\kappa}$, wobei $x^{\lambda} \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa}$ verschwindet und x^{κ} bei Übertragung dieselben Bestimmungszahlen behält, also in Bezug auf $x^{\kappa} + dx^{\kappa}$ über $-dx^{\kappa}$ verschoben erscheint. Der projektive Vektor $x^{\kappa} + dx^{\kappa}$ der neuen P_n entsteht dabei aus dem projektiven Vektor der alten P_n mit den Bestimmungszahlen $x^{\kappa} + dx^{\kappa}$.

Eine projektive Vektorübertragung heißt in x_0^{κ} *ungekrümmt*, wenn jeder beliebige projektive Vektor v^{κ} bei der Übertragung längs des Randes jedes beliebigen Flächenelementes $f^{\nu\mu} d\sigma$ in sich selbst zurückgeführt wird. N. u. h. Bedingung ist, daß in x_0^{κ}

$$1.79 \quad f^{\nu\mu} N_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} v^{\lambda}$$

für jede Wahl von $f^{\nu\mu}$ und v^{λ} verschwindet, d.h. also daß

$$1.80 \quad N_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = 0$$

ist in x_0^{κ} .

Die Punktübertragungen.

Der Zusammenhang besitze jetzt kein kovariantes Differential. Ordnet man dann dem analytischen Punkte $x_0^{\kappa} + dx^{\kappa}$ dennoch den Feldwert $v^{\kappa} + dv^{\kappa}$ zu, wo dv^{κ} durch (1.76) gegeben ist, so stellt dieser Feldwert wegen (1.77) kein projektives Vektorfeld vom Exzeß Null im zu $x_0^{\kappa} + dx^{\kappa}$ gehörigen Punkte der H_n mehr dar, d. h. jedem projektiven Vektor in x_0^{κ} ist ein projektiver Vektor in $x_0^{\kappa} + dx^{\kappa}$ zugeordnet, der sich bei Verschiebung von x_0^{κ} und $x_0^{\kappa} + dx^{\kappa}$ über ihre Strahlen in X_{n+1} (vgl. S. [5] 5) in nicht einfacher Weise ändert. Soll wenigstens der dem übertragenen projektiven Vektor in der lokalen P_n von $x_0^{\kappa} + dx^{\kappa}$ zugeordnete *Punkt*, also das Ideal $[v^{\kappa} + dv^{\kappa}]$ stets bei $\mathfrak{F}$ unverändert bleiben, so muß der Zusatzterm von (1.77) proportional v^{κ} sein, d.h. $P_{\cdot\lambda}^{\kappa}$ muß bis auf einen skalaren Faktor gleich $\mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}$ sein:

$$1.81 \quad P_{\cdot\lambda}^{\kappa} = p \mathcal{A}_{\lambda}^{\kappa}.$$

In diesem Falle sagen wir, daß eine *Punktübertragung* existiert. Es folgt:

Jeder symmetrische lokal normalisierbare Zusammenhang ist eine Punktübertragung.

Der Punkt $[x^{\kappa}]$ geht bei einer Punktübertragung über in

$$1.82 \quad [x^{\kappa} - dx^{\mu} (Q_{\mu}^{\kappa} - \mathcal{A}_{\mu}^{\kappa})].$$

Dafür, daß dieser Punkt bis auf einen Zahlenfaktor die selben Bestimmungszahlen hat wie $[x^{\kappa}]$, ist n.u.h., daß

$$1.83 \quad Q_{\cdot\mu}^{\times} = \mathcal{A}_{\mu}^{\times} + q_{\mu} x^{\times}$$

ist, wo q_{μ} ein beliebiger projektiver Vektor ist. Eine solche Punktübertragung nennen wir *speziell*. Es folgt:

Jeder symmetrische lokal normalisierbare Zusammenhang ist eine spezielle Punktübertragung.

Das einfachste Beispiel einer speziellen Punktübertragung bietet die P_n , alle lokalen P_n fallen zusammen mit der P_n selbst, und bei der Übertragung bleibt jeder Punkt an Ort und Stelle.

Im Allgemeinen ist der Zusammenhang durch die Punktübertragung nicht eindeutig bestimmt, da letztere sich nicht ändert bei der Transformation

$$1.84 \quad {}' \Pi_{\mu\lambda}^{\times} = \Pi_{\mu\lambda}^{\times} + s_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda}^{\times},$$

wo s_{μ} ein beliebiger kovarianter projektiver Vektor ist.

Die Transformation (1.84) ist die allgemeinste, die die Punktübertragung invariant läßt. Der Punkt $[v^{\times}]$ geht nämlich über in den Punkt

$$1.85 \quad [v^{\times} - {}' \Pi_{\mu\lambda}^{\times} v^{\lambda} dx^{\mu}],$$

und dies ist dann und nur dann bis auf Infinitesimale zweiter Ordnung derselbe Punkt wie $[v^{\times} - \Pi_{\mu\lambda}^{\times} v^{\lambda} dx^{\mu}]$, wenn $[({}' \Pi_{\mu\lambda}^{\times} - \Pi_{\mu\lambda}^{\times}) v^{\lambda} dx^{\mu}]$ für jede Wahl von v^{λ} und dx^{μ} mit $[v^{\times}]$ zusammenfällt, d.h. wenn (1.84) gilt. *Eine Punktübertragung ist also ein bis auf eine Transformation der Form (1.84) bestimmter Zusammenhang, der der Gleichung (1.81) genügt.*

Aus (1.84) folgt

$$1.86 \quad \begin{aligned} {}' S_{\mu\lambda}^{\times} &= S_{\mu\lambda}^{\times} + s_{[\mu} \mathcal{A}_{\lambda]}^{\times} \\ {}' P_{\cdot\lambda}^{\times} &= P_{\cdot\lambda}^{\times} + x^{\mu} s_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda}^{\times} \\ {}' Q_{\cdot\mu}^{\times} &= Q_{\cdot\mu}^{\times} + s_{\mu} x^{\times}. \end{aligned}$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Bedingungen die $\Pi_{\mu\lambda}^{\times}$ einer *speziellen Punktübertragung* zu genügen haben, damit sich s_{μ} so wählen läßt, daß die ${}' \Pi_{\mu\lambda}^{\times}$ einen lokal normalisierbaren Zusammenhang darstellen. Diese ${}' \Pi_{\mu\lambda}^{\times}$ wollen wir mit $\overset{0}{\Pi}_{\mu\lambda}^{\times}$ bezeichnen, und die zugehörigen Größen S , P und Q mit $\overset{0}{S}$, $\overset{0}{P}$ und $\overset{0}{Q}$. Es soll also gelten:

$$1.87 \quad \overset{0}{P}_{\cdot\lambda}^{\times} + \overset{0}{Q}_{\cdot\lambda}^{\times} = 2 \mathcal{A}_{\lambda}^{\times}.$$

Da wir von einer speziellen Punktübertragung ausgehen, ist

$$\begin{aligned}
 1.88 \quad P^\kappa_{\cdot\lambda} &= p \mathcal{A}^\kappa_\lambda \\
 Q^\kappa_{\cdot\mu} &= \mathcal{A}^\kappa_\mu + q_\mu x^\kappa,
 \end{aligned}$$

und da $P^\kappa_{\cdot\lambda} x^\lambda = Q^\kappa_{\cdot\mu} x^\mu$ ist, besteht zwischen p und q_μ die Beziehung

$$1.89 \quad p = 1 + q_\mu x^\mu.$$

Die Unbekannte s_μ genügt also der Gleichung

$$1.90 \quad p \mathcal{A}^\kappa_\lambda + x^\mu s_\mu \mathcal{A}^\kappa_\lambda + \mathcal{A}^\kappa_\lambda + q_\lambda x^\kappa + s_\lambda x^\kappa = 2 \mathcal{A}^\kappa_\lambda,$$

und diese Gleichung ist infolge (1.89) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$1.91 \quad s_\lambda = -q_\lambda$$

ist. Damit haben wir den Satz erhalten:

Zu jeder speziellen Punktübertragung gehört ein und nur ein lokal normalisierbarer Zusammenhang.

Für diesen Zusammenhang, den wir den *ausgezeichneten* nennen, ist

$$\begin{aligned}
 1.92 \quad P^\kappa_{\cdot\lambda} &= \mathcal{A}^\kappa_\lambda; \quad x^\mu \overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda} \stackrel{h}{=} 0; \\
 Q^\kappa_{\cdot\lambda} &= \mathcal{A}^\kappa_\lambda; \quad x^\lambda \overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda} \stackrel{h}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Dafür, daß dieser Zusammenhang symmetrisch ist, scheint zunächst n.u.h., daß

$$1.93 \quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} = q_{[\mu} \mathcal{A}^\kappa_{\lambda]}$$

ist. Es ist aber schon n.u.h., wenn $S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa}$ überhaupt die halbsymmetrische Form hat:

$$1.94 \quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} = S_{[\mu} \mathcal{A}^\kappa_{\lambda]}.$$

Denn bei Überschiebung dieser Gleichung mit x^μ ergibt sich

$$1.95 \quad P^\kappa_{\cdot\lambda} - Q^\kappa_{\cdot\lambda} = x^\mu S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} - x^\kappa S_\lambda,$$

woraus unter Berücksichtigung von (1.88) und (1.89) hervorgeht, daß von selbst schon

$$1.96 \quad S_\mu = q_\mu$$

ist. Nennen wir nun eine Punktübertragung *symmetrisch*, wenn irgend einer der zugehörigen Zusammenhänge symmetrisch ist, d.h. also, wenn $S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa}$ die halbsymmetrische Form hat, so gilt also der Satz:

Zu jeder symmetrischen speziellen Punktübertragung gehört ein und nur ein lokal normalisierbarer Zusammenhang und dieser Zusammenhang ist symmetrisch.

Es sei jetzt eine spezielle Punktübertragung gegeben. Ein

zugehöriger Zusammenhang $\Pi_{\mu\lambda}^\kappa$ sei irgendwie gewählt. Wir übertragen einen beliebigen Punkt $[v^\kappa]$ von x_0^κ nach $x_0^\kappa + dx_1^\kappa$, wobei der Feldwert

$$1.97 \quad [v^\kappa - \Pi_{\mu\lambda}^\kappa v^\lambda dx_1^\mu] = [v^\lambda](\mathcal{A}_\lambda^\kappa - \Pi_{\mu\lambda}^\kappa dx_1^\mu)$$

entsteht, und sodann nach $x^\kappa + dx_1^\kappa + dx_2^\kappa$, was zur Entstehung des Feldwertes

$$1.98 \quad [v^\lambda](\mathcal{A}_\lambda^\varrho - \Pi_{\nu\lambda}^\varrho dx_1^\nu)(\mathcal{A}_\varrho^\kappa - \Pi_{\mu\varrho}^\kappa dx_2^\mu - \partial_\nu \Pi_{\mu\varrho}^\kappa dx_1^\nu dx_2^\mu)$$

Anlaß gibt. Denselben Prozeß wiederholen wir mit Vertauschung von dx_1^κ und dx_2^κ . Dafür, daß die beiden übertragenen Punkte bis auf Infinitesimale dritter Ordnung zusammenfallen, ist n. u. h., daß

$$1.99 \quad [v^\lambda]\{\mathcal{A}_\lambda^\kappa - \Pi_{\mu\lambda}^\kappa dx_1^\mu - \Pi_{\mu\lambda}^\kappa dx_2^\mu + \Pi_{\mu\varrho}^\kappa \Pi_{\nu\lambda}^\varrho dx_1^\nu dx_2^\mu - \partial_\nu \Pi_{\mu\lambda}^\kappa dx_1^\nu dx_2^\mu\}$$

demselben Ausdruck mit Vertauschung von d_1 und d_2 proportional ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$1.100 \quad dx_1^\nu dx_2^\mu N_{\nu\mu\lambda}^\kappa v^\lambda : : v^\kappa \quad (: : = \text{proportional zu})$$

ist. Der Ausdruck links ist kein projektiver Vektor, da er bei $\mathfrak{F}$ übergeht in *

$$1.101 \quad \begin{aligned} & \varrho v^\lambda dx_1^\nu dx_2^\mu N_{\nu\mu\lambda}^\kappa + x^\nu dx_2^\mu N_{\nu\mu\lambda}^\kappa v^\lambda d_1 \varrho + x_1^\mu dx_1^\nu N_{\nu\mu\lambda}^\kappa v^\lambda d_2 \varrho = \\ & = \varrho v^\lambda dx_1^\nu dx_2^\mu N_{\nu\mu\lambda}^\kappa - v^\kappa (d_2 d_1 \varrho - d_1 d_2 \varrho). \end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck geht aber hervor, daß die Proportionalität (1.100) trotzdem bei $\mathfrak{F}$ invariant ist. Fordern wir nun die Proportionalität für jede Wahl von v^κ , dx_1^ν und dx_2^μ , so folgt als n.u.h. Bedingung

$$1.102 \quad \begin{aligned} 0 &= O_{\nu\mu\lambda}^\kappa = N_{\nu\mu\lambda}^\kappa - n N_{\nu\mu\varrho}^\kappa \mathcal{A}_\lambda^\varrho \\ &= N_{\nu\mu\lambda}^\kappa - 2n \partial_{[\nu} \Pi_{\mu]\varrho}^\varrho \mathcal{A}_\lambda^\varrho \end{aligned}$$

in x_0^κ . $O_{\nu\mu\lambda}^\kappa$ heißt der *Krümmungsprojektor* der Punktübertragung. Man beweist leicht, daß

$$1.103 \quad x^\nu O_{\nu\mu\lambda}^\kappa = 0$$

ist. Der Krümmungsprojektor ist invariant bei der Transformation (1.84), also unabhängig von der Wahl des zur Punktübertragung gehörigen Zusammenhangs. Ist sie überall Null, so kehrt jeder Punkt bei Übertragung längs des Randes jedes Flächenelementes in sich zurück. Die Übertragung heißt dann *integrabel*. Es gibt

noch einen anderen bei (1.84) invarianten Krümmungsprojektor, nämlich der, welcher zum einzigen der Übertragung zugeordneten lokal normalisierbaren Zusammenhang gehört. Aus (1.84) und (1.91) ergibt sich leicht, daß für diesen gilt

$$1.104 \quad \overset{0}{N}_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = N_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa - 2\partial_{[\nu}q_{\mu]}\mathcal{A}_{\lambda}{}^\kappa.$$

Im Allgemeinen sind $O_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ und $\overset{0}{N}_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ ungleich, da ja $\overset{0}{N}_{\nu\mu\lambda}{}^\lambda$ nicht zu verschwinden braucht. Wir zeigen aber, daß bei einer symmetrischen speziellen Punktübertragung $\overset{0}{N}_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ verschwindet, wenn $O_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ gleich Null ist. Überschiebt man nämlich (1.102) mit x^λ , so ergibt sich unter Berücksichtigung von (1.88)

$$1.105 \quad 2x^\lambda\partial_{[\nu}II_{\mu]\lambda}{}^\kappa + 2x^\lambda II_{[\nu|\varrho|}^\kappa II_{\mu]\lambda}{}^\varrho = 2nx^\kappa\partial_{[\nu}II_{\mu]\varrho}{}^\varrho$$

oder

$$1.106 \quad 2\partial_{[\nu}(q_{\mu]}x^\kappa) + 2S_{\nu\mu}{}^\kappa + 2II_{[\nu|\varrho|}^\kappa q_{\mu]}x^\varrho = 2nx^\kappa\partial_{[\nu}II_{\mu]\varrho}{}^\varrho$$

oder

$$1.107 \quad 2x^\kappa\partial_{[\nu}q_{\mu]} + 2q_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]}{}^\kappa + 2S_{\nu\mu}{}^\kappa = 2nx^\kappa\partial_{[\nu}II_{\mu]\varrho}{}^\varrho,$$

woraus unter Berücksichtigung von (1.93) hervorgeht, daß

$$1.108 \quad n\partial_{[\nu}II_{\mu]\varrho}{}^\varrho = \partial_{[\nu}q_{\mu]}$$

ist. Damit haben wir aber bewiesen, daß der zu einer integrierbaren symmetrischen speziellen Punktübertragung gehörige lokal normalisierbare Zusammenhang integrierbar ist, anders gesagt:

Eine H_n mit einer integrierbaren symmetrischen speziellen Punktübertragung ist eine P_n .

Fordern wir, weniger allgemein, daß nur der Berührungspunkt bei Übertragung längs des Randes jedes Flächenelementes in sich zurückkehrt, so tritt an Stelle von (1.100):

$$1.109 \quad dx^\nu dx^\mu N_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa x^\lambda : : x^\kappa$$

oder, unter Berücksichtigung von (1.88),

$$1.110 \quad dx^\nu dx^\mu (+2q_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]}{}^\kappa - 2S_{\mu\nu}{}^\kappa) : : x^\kappa,$$

gültig für jede Wahl von dx^ν und dx^μ . Diese Gleichung ist aber dann und nur dann erfüllt, wenn $S_{\mu\lambda}{}^\kappa$ bis auf einen Term von der Form $q_{\mu\lambda}x^\kappa$, $q_{(\mu\lambda)} = 0$, die halbsymmetrische Form hat. Aus den Transformationsgleichungen (1.86) folgt dann für den ausgezeichneten lokal normalisierbaren Zusammenhang

$$1.111 \quad \overset{0}{S}_{\mu\lambda}{}^\kappa = q_{\mu\lambda}x^\kappa; \quad x^\mu q_{\mu\lambda} = 0.$$

Wir haben also bewiesen:

Eine spezielle Punktübertragung ist dann und nur dann bis auf einen Term von der Form $q_{\mu\lambda}x^\lambda$ mit den Bedingungsgleichungen $q_{(\mu\lambda)} = 0$, $x^\mu q_{\mu\lambda} = 0$ symmetrisch, wenn der Berührungspunkt bei Übertragung längs des Randes jedes Flächenelementes in sich zurückkehrt.

Um auch die geometrische Bedeutung vollständiger Symmetrie zu erhalten, betrachten wir einmal diejenige Abbildung der lokalen P_n in x_0^λ auf die H_n , bei welcher der Punkt $[v^\lambda]$ der P_n mit dem Punkt $[v^\lambda]$ der H_n korrespondiert. Diese „natürliche“ Abbildung ist nun leider nicht invariant bei Koordinatentransformationen, da sich v^λ in der P_n transformiert mit $\mathcal{A}_\lambda^{\lambda'}$ für $x^\lambda = x_0^\lambda$, in der H_n aber mit $\mathcal{A}_\lambda^{\lambda'}$ für $x^\lambda = v^\lambda$. Sonst würde diese Abbildung, durchgeführt für alle lokalen P_n , eine Abbildung aller dieser P_n aufeinander festlegen, die durch die Gleichung $[v^\lambda] \rightarrow [v^\lambda]$ charakterisiert wäre. Nun ist aber eine lineare Punktübertragung durch die Gleichung

$$1.112 \quad [v^\lambda] \rightarrow [v^\lambda - \Pi_{\mu\lambda}^\lambda v^\lambda dx^\mu]$$

festgelegt, und die skizzierte Abbildung kann also nur dann eine lineare Punktübertragung sein, wenn $\Pi_{\mu\lambda}^\lambda$ überall verschwindet, was nur in einer P_n bei Verwendung gewöhnlicher projektiver Koordinaten stattfindet. Wir können aber, weniger allgemein, verlangen, daß die Punktübertragung sich wenigstens für $[x^\lambda]$ stets auf die natürliche reduziert, und daß dies außerdem auch für einen beliebigen Punkt $[v^\lambda]$ in $[x_0^\lambda]$ zutrifft, vorausgesetzt daß das Koordinatensystem der Wahl des Punktes $[x_0^\lambda]$ in geeigneter Weise angepaßt ist. Die erste Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Punktübertragung *speziell* ist. Benutzen wir dann den ausgezeichneten lokal normalisierbaren Zusammenhang und die zu x_0^λ gehörigen Normalkoordinaten, so geht (1.112) über in

$$1.113 \quad [v^\lambda] \rightarrow [v^\lambda - \overset{0}{S}_{\mu\lambda}^\lambda v^\lambda dx^\mu],$$

und es geht daraus hervor, daß zur Erfüllung der zweiten Forderung n.u.h. ist, daß $\overset{0}{S}_{\mu\lambda}^\lambda$ verschwindet. Wir haben also bewiesen:

Eine Punktübertragung ist dann und nur dann speziell, wenn sich die Übertragung des Berührungspunktes stets auf die natürliche Abbildung reduziert. Eine spezielle Punktübertragung ist dann

und nur dann symmetrisch, wenn sie sich in jedem Punkt auf die natürliche Abbildung in Bezug auf die zu diesem Punkte gehörigen Normalkoordinaten reduziert.

Die Übertragungen von Vektordichten vom Gewicht n.

Die Punktübertragungen stehen in merkwürdiger Beziehung zu den kontravarianten projektiven Vektordichten vom Gewicht $n = \frac{1}{n+1}$ ²¹⁾. Die Übertragungsparameter $A_{\mu\lambda}^{\kappa}$ dieser Größen sind infolge (1.60)

$$1.114 \quad A_{\mu\lambda}^{\kappa} = \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa} - n \Pi_{\mu\varrho}^{\varrho} A_{\lambda}^{\kappa}, \quad (\text{also } A_{\mu\varrho}^{\varrho} = 0)$$

und dieser Ausdruck ist bei (1.84) invariant. Auch verschwindet infolge (1.81) die Überschiebung mit x^{μ} , d.h. für Vektordichten dieser Art gibt es ein kovariantes Differential und infolgedessen eine Übertragung. Umgekehrt sind die $\Pi_{\mu\lambda}^{\kappa}$ durch die $A_{\mu\lambda}^{\kappa}$ bestimmt bis auf eine Transformation von der Form (1.84) und aus $A_{\mu\lambda}^{\kappa} x^{\mu} = 0$ folgt (1.81).

In der Tat, bildet man die Ausdrücke

$$1.115 \quad A_{\mu\lambda}^{\kappa} + \frac{1}{n} A_{\varrho\mu}^{\varrho} A_{\lambda}^{\kappa},$$

so transformieren diese sich wie die Parameter eines Zusammenhanges, und die Lösung von (1.114) lautet also

$$1.116 \quad \Pi_{\mu\lambda}^{\kappa} = A_{\mu\lambda}^{\kappa} + \frac{1}{n} A_{\varrho\mu}^{\varrho} A_{\lambda}^{\kappa} + t_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa},$$

wo t^{λ} ein beliebiger projektiver Vektor ist.

Es gilt also der Satz:

Eine Punktübertragung ist gleichbedeutend mit einer Übertragung von kontravarianten projektiven Vektordichten vom Gewicht n.

Aus (1.83) folgt, daß die Punktübertragung dann und nur dann speziell ist, wenn

$$1.117 \quad A_{\mu\lambda}^{\kappa} x^{\lambda} + \frac{1}{n} A_{\varrho\mu}^{\varrho} x^{\kappa} + t_{\mu} x^{\kappa} = g_{\mu} x^{\kappa}$$

ist, d.h. also wenn sich $A_{\mu\lambda}^{\kappa} x^{\lambda}$ schreiben läßt

$$1.118 \quad A_{\mu\lambda}^{\kappa} x^{\lambda} + \frac{1}{n} A_{\varrho\mu}^{\varrho} x^{\kappa} = u_{\mu} x^{\kappa},$$

²¹⁾ Da $\varepsilon = r + (n+1)f + d$ ist (vgl. S. [7] 7), ist der Grad bei diesem Gewicht für holonome Bezugssysteme gerade gleich Null.

in welcher Gleichung u_μ ein projektiver Vektor ist. In diesem Falle gibt es einen zugehörigen lokal normalisierbaren Zusammenhang, für dessen Parameter $\overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda}$ man leicht findet

$$1.119 \quad \overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda} = A^\kappa_{\mu\lambda} + \frac{1}{n} A^\varrho_{\varrho[\mu} A^\kappa_{\lambda]} - u_\mu A^\kappa_\lambda.$$

Die Punktübertragung ist dann und nur dann symmetrisch, wenn $\overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda}$ halbsymmetrisch ist. Aus (1.116) folgt aber (bei Alternation und Faltung über $\kappa\lambda$), daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$1.120 \quad A^\kappa_{[\mu\lambda]} + \frac{1}{n} A^\varrho_{\varrho[\mu} A^\kappa_{\lambda]} = 0$$

ist. Aus (1.96) folgt dann aber $q_\mu = t_\mu$, also $u_\mu = 0$, und daraus geht hervor, daß die $\overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda}$ in der Tat symmetrisch sind. Aus (1.117) und (1.120) folgt als n.u.h. Bedingung für eine *spezielle und symmetrische* Punktübertragung

$$1.121 \quad \begin{cases} A^\varrho_{\varrho\mu} x^\mu = 0 \\ A^\kappa_{[\mu\lambda]} + \frac{1}{n} A^\varrho_{\varrho[\mu} A^\kappa_{\lambda]} = 0. \end{cases}$$

Geodätische Linien.

Ist eine Punktübertragung gegeben, so kann man im Lokalraum von $[x^\kappa_0]$ einen beliebigen Punkt $[v^\kappa]$ wählen und jetzt zu dem Lokalraum des Punktes $[x^\kappa_0 + dx^\kappa]$ übergehen, wobei dx^κ so gewählt ist, daß $[x^\kappa_0 + dx^\kappa]$ auf der Geraden durch $[x^\kappa_0]$ und $[v^\kappa]$ liegt. Dabei geht dann $[v^\kappa]$ über in den Punkt $[v^\kappa - \overset{0}{\Pi}^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu]$ des neuen Lokalraumes. Dieser Prozeß läßt sich, Kontinuität und Differenzierbarkeit der betreffenden Funktionen vorausgesetzt, ad infinitum wiederholen und liefert eine Kurve durch x^κ_0 , deren Form nur von der Lage des Punktes $[v^\kappa]$ abhängt. Eine solche Kurve heißt eine geodätische Linie der Punktübertragung.

Durch jeden Punkt der H_n gehen also in jeder Richtung ∞^1 geodätische Linien. Die Gleichung lautet

$$1.122 \quad dx^\mu \nabla_\mu v^\kappa : : v^\kappa,$$

und diese Gleichung ist infolge der Relation $P^\kappa_{\cdot\lambda} = p_{\cdot\lambda}^\kappa$ nicht nur invariant bei $\mathfrak{F}$, sondern läßt sich auch ersetzen durch

$$1.123 \quad v^\mu \nabla_\mu v^\kappa : : v^\kappa,$$

oder bei geeigneter Normierung des Vektors v^κ auch durch

$$1.124 \quad v^\mu \nabla_\mu v^\kappa = 0.$$

Wir wollen nun ausgehen von zwei Punkten $[v^\mathfrak{x}]$ und $[v^\mathfrak{x} + \alpha x_0^\mathfrak{x}]$ im Lokalraum von $[x_0^\mathfrak{x}]$ auf derselben Geraden durch $[x_0^\mathfrak{x}]$. Die beiden zu diesen Punkten gehörigen geodätischen Linien fallen dann und nur dann zusammen, wenn auch $[v^\mathfrak{x} - \Pi_{\mu\lambda}^\mathfrak{x} v^\lambda dx^\mu]$, $[v^\mathfrak{x} + \alpha x_0^\mathfrak{x} - \Pi_{\mu\lambda}^\mathfrak{x} v^\lambda dx^\mu - \alpha(Q_{\mu}^\mathfrak{x} - \mathcal{A}_\mu^\mathfrak{x})dx^\mu]$ und $[x_0^\mathfrak{x} + dx^\mathfrak{x}]$ auf einer und derselben Geraden liegen. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, daß

$$1.125 \quad Q_{\mu}^\mathfrak{x} = q\mathcal{A}_\mu^\mathfrak{x} + q_\mu x^\mathfrak{x}$$

ist, wo q und q_μ beliebig sind. Wir haben also den Satz erhalten:

Zu einer speziellen Punktübertragung gibt es durch jeden Punkt in jeder Richtung nur eine geodätische Linie.

Ist ein allgemeiner Zusammenhang gegeben, so kann man auch hier geodätische Linien bilden, indem man, ausgehend von einem Punkt $[v^\mathfrak{x}]$ im Lokalraum von $x_0^\mathfrak{x}$, die Gleichung

$$1.126 \quad v^\mu \nabla_\mu v^\mathfrak{x} = 0$$

ansetzt und jetzt in der Richtung der Geraden durch $[x_0^\mathfrak{x}]$ und $[v^\mathfrak{x}]$ fortschreitend ein Feld $[v^\mathfrak{x}]$ zu bestimmen sucht, das wenigstens in dem in dieser Weise erreichbaren Gebiet der Gleichung genügt. Normiert man den Anfangswert $v^\mathfrak{x}$ irgendwie, so ist jedenfalls

$$1.127 \quad dx^\mathfrak{x} = \varepsilon x^\mathfrak{x} + \eta v^\mathfrak{x},$$

wo die Infinitesimalen ε und η sich bei $\mathfrak{F}$ folgendermaßen transformieren:

$$1.128 \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon + d \log \varrho; \quad \eta \rightarrow \eta.$$

Es ist also

$$1.129 \quad dv^\mathfrak{x} = dx^\mu \partial_\mu v^\mathfrak{x} = (\varepsilon x^\mu + \eta v^\mu)(\nabla_\mu v^\mathfrak{x} - \Pi_{\mu\lambda}^\mathfrak{x} v^\lambda) \\ = (\varepsilon P_{\lambda}^\mathfrak{x} - dx^\mu \Pi_{\mu\lambda}^\mathfrak{x}) v^\lambda = \varepsilon v^\mathfrak{x} - \eta \Pi_{\mu\lambda}^\mathfrak{x} v^\mu v^\lambda,$$

aus welcher Gleichung ersichtlich ist, daß der Punkt $[v^\mathfrak{x} + dv^\mathfrak{x}]$ im Lokalraum von $[x_0^\mathfrak{x} + dx^\mathfrak{x}]$ nur von der Lage des Punktes $[v^\mathfrak{x}]$ und nicht von der Normierung von $[v^\mathfrak{x}]$ abhängt. Wir haben also bewiesen, daß es auch bei einem beliebigen Zusammenhang eine Punktübertragung gibt, aber nur in der Richtung vom Berührungspunkte nach dem Punkte selbst. Für den Fall einer Punktübertragung, $P_{\lambda}^\mathfrak{x} = p\mathcal{A}_\lambda^\mathfrak{x}$, werden die hier abgeleiteten geodätischen Linien identisch mit den früheren.

Soll es auch hier durch jeden Punkt in jeder Richtung nur eine

geodätische Linie geben, so muß die Form der geodätischen Linie unabhängig sein von der Wahl von $[v^\kappa]$ auf der gewählten Geraden. Man beweist leicht, daß dazu n.u.h. ist, daß

$$1.130 \quad P^\kappa_{\cdot\lambda} + Q^\kappa_{\cdot\lambda} = r\mathcal{A}^\kappa_\lambda + r_\lambda x^\kappa \quad {}^{22})$$

ist, wo r und r_λ beliebig sind.

Nehmen wir an, daß (1.130) erfüllt ist, so bestimmen die geodätischen Linien umgekehrt den Zusammenhang nicht eindeutig. Sie ändern nämlich ihre Form nicht, wenn in (1.129) irgend ein Term hinzukommt, der entweder mit v^κ oder mit x^κ proportional ist. Aus dieser Gleichung folgt also für die allgemeinste *bahntreue* Transformation der $\Pi^\kappa_{\mu\lambda}$:

$$1.131 \quad {}'\Pi^\kappa_{\mu\lambda} = \Pi^\kappa_{\mu\lambda} + Z_{\mu\lambda}x^\kappa + \mathcal{A}^\kappa_{\mu z_\lambda} + \mathcal{A}^\kappa_{\lambda z_\mu} + U_{\mu\lambda}x^\kappa$$

mit den Nebenbedingungen

$$1.132 \quad Z_{[\mu\lambda]} = 0; \quad U_{(\mu\lambda)}x^\kappa = 0.$$

Wir wollen jetzt versuchen, einem gegebenen System von geodätischen Linien, das so beschaffen ist, daß durch jeden Punkt je eine geodätische Linie in jeder Richtung geht, eine symmetrische spezielle Punktübertragung zuzuordnen. Die Symmetrieforderung bestimmt $U_{\mu\lambda}x^\kappa$ eindeutig. Wir erfüllen zunächst diese Forderung. Es ist dann wegen (1.130)

$$1.133 \quad P^\kappa_{\cdot\lambda} = Q^\kappa_{\cdot\lambda} = q\mathcal{A}^\kappa_\lambda + q_\lambda x^\kappa,$$

und es bleibt noch eine Transformation von der Form

$$1.134 \quad {}'\Pi^\kappa_{\mu\lambda} = \Pi^\kappa_{\mu\lambda} + Z_{\mu\lambda}x^\kappa + \mathcal{A}^\kappa_{\mu z_\lambda} + \mathcal{A}^\kappa_{\lambda z_\mu}.$$

Da $P^\kappa_{\cdot\lambda}$ und $Q^\kappa_{\cdot\lambda}$ beide in $\mathcal{A}^\kappa_\lambda$ übergehen sollen, folgt

$$1.135 \quad \mathcal{A}^\kappa_\lambda = q\mathcal{A}^\kappa_\lambda + q_\lambda x^\kappa + x^\mu Z_{\mu\lambda}x^\kappa + x^\kappa z_\lambda + x^\mu z_\mu \mathcal{A}^\kappa_\lambda$$

oder

$$1.136 \quad \begin{aligned} x^\mu Z_{\mu\lambda} &= -q_\lambda - z_\lambda \\ x^\mu z_\mu &= 1 - q. \end{aligned}$$

Werden $Z_{\mu\lambda}$ und z_λ irgendwie diesen Gleichungen entsprechend gewählt, so hat man einen symmetrischen Zusammenhang mit $P^\kappa_{\cdot\lambda} = Q^\kappa_{\cdot\lambda} = \mathcal{A}^\kappa_\lambda$ erhalten, aber derselbe ist nur bestimmt bis auf eine Transformation der Form (1.134) mit

$$1.137 \quad \begin{aligned} x^\mu Z_{\mu\lambda} &= -z_\lambda \\ x^\mu z_\mu &= 0 \end{aligned}$$

²²⁾ D. VAN DANTZIG, 1932.4.

als Bedingungsgleichungen. Zur näheren Festlegung stellen wir die Bedingung, daß der einmal gefaltete Krümmungsprojektor der Punktübertragung, $O_{\kappa\mu\lambda}^{\dots\kappa}$, verschwinden soll:

$$1.138 \quad N_{\kappa\mu\lambda}^{\dots\kappa} - nN_{\lambda\mu\varrho}^{\dots\varrho} = 0.$$

Da bei einem symmetrischen Zusammenhang

$$1.139 \quad N_{\nu\mu\kappa}^{\dots\kappa} = -2N_{\kappa[\nu\mu]}^{\dots\kappa} \quad {}^{23})$$

ist, ist (1.138) hier gleichbedeutend mit

$$1.140 \quad * \quad N_{\kappa\mu\lambda}^{\dots\kappa} = 0.$$

Die aufgestellte Bedingung ergibt infolge (1.134) und (1.137)

$$1.141 \quad Z_{\mu\lambda} - \nabla_{\mu}z_{\lambda} + z_{\mu}z_{\lambda} = -\frac{1}{n^2-1}(nN_{\kappa\mu\lambda}^{\dots\kappa} + N_{\kappa\lambda\mu}^{\dots\kappa}),$$

woraus folgt

$$1.142 \quad (n+1)\nabla_{[\mu}z_{\lambda]} = N_{\kappa[\mu\lambda]}^{\dots\kappa} = -\frac{1}{2}N_{\mu\lambda\kappa}^{\dots\kappa},$$

eine Gleichung, die infolge der Bianchischen Identität integrabel ist und z_{λ} bis auf einen Gradientenvektor bestimmt. Durch z_{λ} ist $Z_{\mu\lambda}$ eindeutig bestimmt, z_{λ} läßt sich aber ohne Aufstellung weiterer Forderungen nicht eindeutig bestimmen.

Der projektive Zusammenhang für Projektoren der X_n .

Auch die partielle Ableitung von Projektoren der X_n nach ξ^h läßt sich zu einer kovarianten Ableitung ergänzen. Wir wollen eine mit dem kontravarianten Punktfeld v^a invariant verbundene Ableitung $\nabla_b v^a$ festlegen ²⁴⁾. Da sich infolge (1.38) die Bestimmungszahlen von $\nabla_0 v^a$ wie die eines projektiven Vektors transformieren,

$$1.143 \quad \nabla_0 v^{a'} = \Pi_{0'a}^{b'a'} \nabla_b v^a = \Pi_a^{a'} \nabla_0 v^a,$$

stellen die Gleichungen

$$1.144 \quad \begin{aligned} \nabla_j v^a &= \partial_j v^a + \Pi_{jb}^a v^b \\ \nabla_0 v^a &= \gamma v^a = \Pi_{0b}^a v^b; \quad \Pi_{0b}^a = * \gamma \Pi_b^a = * \gamma \delta_b^a \end{aligned}$$

die allgemeinste lineare Ableitung dar, vorausgesetzt daß γ ein

²³⁾ Vgl. 1924.6, S. 88.

²⁴⁾ Diese Idee geht auf T. Y. THOMAS, 1925.2, 4, und O. VEULEN, 1928.2, zurück. Die von diesen Autoren eingeführten Ableitungen entstehen für $\gamma = -n$ bzw. $\gamma = 1$. Vgl. J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, 1930.1.

(nicht notwendig konstanter) Skalar ist und die Π_{jb}^a sich folgendermaßen transformieren

$$1.145 \quad \Pi_{j'b'}^{a'} = A_{j'}^j \Pi_{a'b'}^{a'b} \Pi_{jb}^a + \Pi_{a'}^a \partial_{j'} \Pi_{b'}^b. \quad 24a)$$

Aus (1.144) folgt für die kovariante Ableitung einer Dichte vom Gewicht $\mathfrak{f}$

$$1.146 \quad \begin{aligned} \nabla_j \mathfrak{p}^{(a)} &= \partial_j \mathfrak{p}^{(a)} - \mathfrak{f} \Pi_{jb}^b \mathfrak{p}^{(a)} \\ \nabla_0 \mathfrak{p}^{(a)} &= -(n+1) \mathfrak{f} \gamma \mathfrak{p}^{(a)}, \end{aligned}$$

also für eine projektive Vektordichte der X_n vom Gewicht $\mathfrak{f}$

$$1.147 \quad \begin{aligned} \nabla_j v^a &= \partial_j v^a + \Pi_{jb}^a v^b - \mathfrak{f} \Pi_{jb}^b v^a \\ \nabla_0 v^a &= (1 - (n+1)\mathfrak{f}) \gamma v^a, \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, daß $\nabla_0 v^a$ dann und nur dann für jede Wahl von v^a verschwindet, wenn $\mathfrak{f} = n$ ist. Nun ist nur in dem Falle Überschiebung von $\nabla_b v^a$ und $d\xi^h$ ein invarianter Prozeß, und es existiert also auch nur in dem Falle ein kovariantes Differential. Daraus folgt:

Ein projektiver Zusammenhang für Projektoren der X_n ist stets eine Übertragung für kontravariante projektive Vektordichten der X_n vom Gewicht n .

Der Ausdruck

$$1.148 \quad d\xi^h \nabla_h v^a$$

ist nicht invariant, wenn v^a einen projektiven Vektor darstellt, sondern geht bei Transformation der ξ^h nach (1.37, 38) über in

$$1.149 \quad \begin{aligned} d\xi^{h'} \nabla_{h'} v^{a'} &= d\xi^h A_h^{h'} (A_{h'}^l \nabla_l v^a) \Pi_a^{a'} - n d\xi^h A_h^{h'} \Pi_a^{a'} (\partial_{h'} \log \Delta^A) \nabla_0 v^a \\ &= \Pi_a^{a'} d\xi^h \nabla_h v^a - \gamma n v^{a'} d\xi^h \partial_h \log \Delta^A. \end{aligned}$$

Ordnet man also dem Punkte $\xi^h + d\xi^h$ den Feldwert

$$1.150 \quad v^a - d\xi^h \Pi_{hb}^a v^b$$

zu, so ist dadurch zwar keine Vektorübertragung festgelegt, aber, da das Zusatzglied in (1.149) zu $v^{a'}$ proportional ist, wenigstens eine Punktübertragung. Wie in der H_n , so gilt also auch hier, daß eine Punktübertragung dasselbe ist wie eine Übertragung von kontravarianten projektiven Vektordichten vom Gewicht n . Aber im Gegensatz zur H_n gilt:

Jeder projektive Zusammenhang in der X_n ist eine Punktübertragung.

^{24a)} H. WEYL, 1929.1, S. 719; J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, 1930.2, S. 144 und 148.

Die Punktübertragung ändert sich nicht, wenn die Parameter des Zusammenhangs folgende Transformation erleiden

$$1.151 \quad 'II_{cb}^a = II_{cb}^a + t_c II_b^a, \quad t_c \text{ beliebig.}$$

Denn bei diesen Transformationen bleibt die projektive Vektordichtenübertragung (1.147) für $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$ invariant.

Die geodätischen Linien in X_n .

Die Gleichungen

$$1.152 \quad \mathfrak{v}^c \nabla_c \mathfrak{v}^a : : \mathfrak{v}^a$$

charakterisieren das zur Punktübertragung gehörige Bahnkurvensystem. Das Gewicht von $\mathfrak{v}^a$ beeinflusst die Form der Gleichungen nicht. Wir setzen voraus, daß durch jeden Punkt in jeder Richtung eine und nur eine geodätische Linie geht. Dazu ist n.u.h. daß II_{c0}^a sich in der Form $\alpha II_c^a + \beta_c x^a$ schreiben läßt. Die allgemeinste Transformation der II_{cb}^a , die die Form von (1.152) invariant läßt, ist

$$1.153 \quad 'II_{cb}^a = II_{cb}^a + u_c II_b^a + u_b II_c^a + V_{cb}^{\cdot\cdot a}, \quad V_{0i}^{\cdot\cdot h} : : \delta_i^h, \quad V_{i0}^{\cdot\cdot 0} = u_i,$$

wo u_b beliebig ist und $V_{cb}^{\cdot\cdot a}$ alternierend und übrigens beliebig. Versucht man jetzt aus den zu einem Bahnkurvensystem gehörigen Punktübertragungen eine einzige durch Einführung besonderer invarianter Bedingungen auszuzeichnen, so zeigt sich ein merkwürdiger Unterschied mit der H_n , indem diese Auszeichnung tatsächlich gelingt. Man hat nur aus den $'II_{cb}^a$ den bei (1.151) invarianten Krümmungsprojektor $'N_{acb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ zu bilden und zu fordern, daß $'N_{acb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ verschwindet:

Ein Bahnkurvensystem bestimmt eindeutig eine Punktübertragung der X_n .

Wir wollen den Beweis dieses Theorems, das von Cartan²⁵⁾ und Schouten²⁶⁾ herrührt, hier nicht bringen, da es in der Literatur schon von verschiedenen Seiten beleuchtet wurde²⁷⁾. Dagegen verdient der merkwürdige Gegensatz zwischen H_n und X_n nähere Betrachtung. Wir werden zeigen, daß die eindeutig bestimmte Punktübertragung in der X_n auch von der H_n aus erreicht werden kann, indem die Unbestimmtheit von z_λ in der Punktübertragung der H_n gerade kompensiert wird durch die Unbestimmtheit in der Abbildung der lokalen P_n auf die lokalen $\overset{x}{P}_n$.

²⁵⁾ 1924.1.

²⁶⁾ 1924.4.

²⁷⁾ Vgl. J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, 1930.1, 2.

Beziehungen zwischen den Punktübertragungen in H_n und X_n .

Da es sich sowohl in H_n als in X_n um Übertragung von projektiven Vektordichten vom Gewicht n handelt, berechnen wir aus der durch (1.50) vermittelten Abbildung der projektiven Vektoren von P_n auf die projektiven Vektoren von $\overset{x}{P}_n$ die korrespondierende Abbildung dieser Vektordichten:

$$1.154 \quad v^a = \mathfrak{V}_x^a v^x.$$

Wählen wir σ_λ (1.53) so, daß $x^0 = 1$ wird, d.h. $\sigma_\lambda x^\lambda = 0$, so ist α die Determinante der $\mathcal{A}_\lambda^a$ in (1.50) und infolgedessen ist

$$1.155 \quad \begin{aligned} \mathfrak{V}_\lambda^h &= \alpha^{-n} \partial_\lambda \xi^h \\ \mathfrak{V}_\lambda^0 &= -\alpha^{-n} (n \partial_\lambda \log \alpha + \sigma_\lambda). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist σ_λ noch frei wählbar bis auf die Forderung $x^\lambda \sigma_\lambda = 0$.

Wir nehmen jetzt an, es sei ein Bahnkurvensystem festgelegt. Infolgedessen ist in H_n eine symmetrische spezielle Übertragung von projektiven Vektordichten vom Gewicht n bestimmt bis auf eine Transformation der Form

$$1.156 \quad A_{\mu\lambda}^x \rightarrow A_{\mu\lambda}^x + Z_{\mu\lambda} x^x + \mathcal{A}_\mu^x z_\lambda$$

mit (wegen (1.137) und (1.141))

$$1.157 \quad x^\mu z_\mu = 0; \quad Z_{\mu\lambda} x^\lambda + z_\mu = 0; \quad Z_{\mu\lambda} - \nabla_\mu z_\lambda + z_\mu z_\lambda = 0.$$

Ist ein geometrisches Objekt σ_λ vorhanden, so können die lokale P_n und $\overset{x}{P}_n$ aufeinander abgebildet werden. Die Übertragungsparameter Ξ_{cb}^a der kontravarianten projektiven Vektordichten vom Gewicht n der X_n sind dann mit den Übertragungsparametern $A_{\mu\lambda}^x$ verknüpft durch die Gleichung

$$1.158 \quad \Xi_{cb}^a = \mathcal{A}_c^\mu \mathfrak{V}_{xb}^{a\lambda} A_{\mu\lambda}^x - \mathcal{A}_c^\mu \mathfrak{V}_b^{\lambda} \partial_\mu \mathfrak{V}_\lambda^a,$$

woraus folgt

$$1.159 \quad \Xi_{0b}^a = 0.$$

Wir wählen jetzt für σ_λ

$$1.160 \quad \sigma_\lambda = -\frac{1}{n} A_{\varrho\lambda}^0,$$

ein geometrisches Objekt mit der Transformationsweise (1.55),

das der Gleichung $x^\lambda \sigma_\lambda = 0$ genügt (1.121). Infolge (1.160) gilt

$$1.161 \quad \Xi_{j0}^0 = 0; \quad \Xi_{j0}^k = A_j^k.$$

Bei einer Transformation (1.156) ändert sich auch die Abbildung von P_n auf $\overset{x}{P}_n$, denn σ_λ geht über in

$$1.162 \quad {}'\sigma_\lambda = \sigma_\lambda - z_\lambda.$$

Die zugehörige Transformation von Ξ_{cb}^a läßt sich dann aus (1.158) bestimmen. Es zeigt sich, daß

$$1.163 \quad \begin{aligned} {}'\Xi_{cb}^k &= \Xi_{cb}^k \\ {}'\Xi_{jk}^0 &= \Xi_{jk}^0 + (n+1) \mathcal{A}_{jk}^{\mu\lambda} [-Z_{\mu\lambda} + V_\mu z_\lambda - z_\mu z_\lambda] = \Xi_{jk}^0 \end{aligned} \quad *$$

ist wegen (1.157).

Die Unbestimmtheit in der Punktübertragung der H_n wird also gerade kompensiert durch die Unbestimmtheit in der Abbildung von P_n auf $\overset{x}{P}_n$, woraus hervorgeht, daß ein System von geodätischen Linien eine Übertragung für Punkte der $\overset{x}{P}_n$ eindeutig festlegt. Diese durch (1.158) und (1.160) bestimmte Übertragung bekommt man auch, wenn man (1.159), (1.161) und das Verschwinden von $'N_{a\dot{b}\dot{b}}^{\dot{a}}$ fordert, was sofort aus (1.158) und $O_{\dot{\kappa}\dot{\nu}\dot{\lambda}}^{\dot{\kappa}} = 0$ hervorgeht. *

II. Einbettung und Einspannung.

*Einbettung und Einspannung einer H_m in H_n .*²⁸⁾

Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in H_n sei gegeben durch die Gleichungen

$$2.1 \quad x^\kappa = f^\kappa(y^a), \quad a, \dots, g = 0, \dots, m.$$

Die y^a sind *homogene* Koordinaten im Innenraum, die der Gruppe $\mathfrak{S}_{m+1}$ unterliegen. Der Innenraum ist also eine H_m . Die f^κ sind *homogene* Funktionen irgend eines Grades der y^a . Der Rang der Matrix $\partial_b x^\kappa$, $\left(\partial_b = \frac{\partial}{\partial y^b}\right)$, soll der höchste, also gleich $m+1$ sein.

Ist nun $f(y^a)$ irgendwelche homogene Funktion der y^a , so stellt

$$2.2 \quad x^\kappa = f(y^a) f^\kappa(y^a)$$

dieselbe H_m dar. Wir nutzen diesen Umstand aus, um x^κ vom Grade 1 in y^a zu machen. Beim Grade 0 würden die x^κ Ortsfunktionen in H_m , also Funktionen von gewöhnlichen nicht

²⁸⁾ D. VAN DANTZIG, 1932.2.

homogenen Koordinaten in H_m werden. Dies ist scheinbar verlockend, würde aber den Rang von $\partial_b x^\kappa$ um eins heruntersetzen und damit den Vorteil, den die Verwendung homogener Koordinaten auch im Innenraum bringt, wieder aufheben. Wählt man statt 1 einen beliebigen Grad $r \neq 0$, so bringt dies keinen besonderen Vorteil oder Nachteil, man muß nur die Zahl r durch die ganze Rechnung hindurchschleppen, ohne daß aber r eine wesentliche Bedeutung bekäme. Wir wählen also $r = 1$ und legen damit $f(y^a)$ fest bis auf einen skalaren Faktor vom Grade 0 in y^a . Diesen Faktor nennen wir ϱ , die Gruppe der Punkttransformationen, der x^κ also noch unterliegt, wenn $f^\kappa(y^a)$ vom Grade 1 in y^a gewählt ist, wie oben, $\mathfrak{F}$.

Alle geometrischen Objekte seien nun definiert in Bezug auf folgende vier Gruppen:

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{H}_{n+1} \text{ in } H_n: & x^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} x^\kappa; \quad A_{\kappa}^{\kappa'} = \partial_\kappa x^{\kappa'}, \\
 \mathfrak{F} \text{ in } H_n: & x^\kappa \rightarrow \varrho x^\kappa, \\
 \mathfrak{H}_{m+1} \text{ in } H_m: & y^{a'} = B_a^{a'} y^a; \quad B_a^{a'} = \partial_a y^{a'}, \\
 \mathfrak{F}' \text{ in } H_m: & y^a \rightarrow \varrho' y^a.
 \end{array}$$

Demzufolge gibt es jetzt zwei Gradzahlen, den Außengrad r bei $\mathfrak{F}$ und den Innengrad r_i bei $\mathfrak{F}'$. Für x^κ ist $r = r_i = 1$, für y^a dagegen $r = 0$, $r_i = 1$.

Wir betrachten folgende Größen:

1. *Projektordichten der H_n* , die nur griechische Indizes tragen und auf S. [6] 6 definiert sind. Für diese Größen ist $r = r_i$.
2. *Projektordichten der H_m* , die nur lateinische Indizes tragen und sich in Bezug auf $\mathfrak{H}_{m+1}$ und $\mathfrak{F}'$ genau so verhalten wie die vorigen Größen in Bezug auf $\mathfrak{H}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}$. Den Außengrad r lassen wir vorläufig noch ganz frei. In Bezug auf $\mathfrak{F}$ transformieren sich diese Größen folgendermaßen:

Skalare vom Außengrade r : $p \rightarrow \varrho^r p$.

Kovariante Vektoren vom Außengrade r :

$$w_b \rightarrow \varrho^r w_a (\mathcal{B}_b^a + y^a \partial_b \log \varrho);$$

einfaches Beispiel:

$$2.4 \quad \partial_b p \rightarrow \partial_b (\varrho^r p) = \varrho^r (\partial_a p) (\mathcal{B}_b^a + y^a \partial_b \log \varrho).$$

Kontravariante Vektoren vom Außengrade r :

$$v^a \rightarrow \varrho^r v^b (\mathcal{B}_b^a - y^a \partial_b \log \varrho);$$

einfaches Beispiel:

$$2.5 \quad y^a \rightarrow \varrho y^b (\mathcal{B}_b^a - y^a \partial_b \log \varrho) = \varrho y^a.$$

*Projektordichten vom Gewicht $\mathfrak{k}$ und vom Außengrade $\mathfrak{r}$:
z.B.*

$$2.6 \quad P_{\cdot b}^a \rightarrow \varrho^{\mathfrak{r}} P_{\cdot a}^c (\mathcal{B}_c^a - y^a \partial_c \log \varrho) (\mathcal{B}_b^d + y^d \partial_b \log \varrho)^{29}.$$

3. *Verbindungsgrößen*, die griechische und lateinische Indizes tragen und sich transformieren wie Produkte von Größen der H_n und der H_m .

Es gibt bei diesen Größen zwei Valenzendifferenzen, die äußere $\mathfrak{d}$ und die innere, sich auf lateinische Indizes beziehende, $\mathfrak{d}_i$, und ebenso zwei Gewichte, das innere, $\mathfrak{k}_i$, und das äußere, $\mathfrak{k}$. Auf Größen angewandte Operationen, die hier vorkommen, sind nur Addition, Multiplikation und Anwendung der Operatoren ∂_λ und ∂_b , eventuell zu kovarianten Operatoren ergänzt durch Einführung geeigneter Zusammenhangsparameter. Da aber die Transformationsweise dieser Parameter bei $\mathfrak{F}$ stets so gewählt werden muß, daß sich das Zusatzglied in derselben Weise transformiert wie der Term mit ∂_λ bzw. ∂_b , kann man sich zur Beurteilung der Änderung der Zahlen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + (n+1)\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{d}'_i = \mathfrak{d}_i + (m+1)\mathfrak{k}_i$ bei Differentiation auf die Wirkung von ∂_λ und ∂_b beschränken. Bei Addition bleiben diese vier Zahlen ungeändert, bei Multiplikation werden sie addiert, und bei ∂_λ und ∂_b ergeben sich die Änderungen

$$2.7 \quad \begin{array}{ccccc} & \mathfrak{r} & \mathfrak{d}' & \mathfrak{r}_i & \mathfrak{d}'_i \\ \partial_\lambda & \mathfrak{r} - 1 & \mathfrak{d}' + 1 & \mathfrak{r}_i - 1 & \mathfrak{d}'_i \\ \partial_b & \mathfrak{r} & \mathfrak{d}' & \mathfrak{r}_i - 1 & \mathfrak{d}'_i + 1. \end{array}$$

Daraus folgt, daß die bei ∂_λ und ∂_b invarianten linearen Kombinationen der vier Zahlen alle Summen von Vielfachen von $\mathfrak{r} + \mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{r}_i + \mathfrak{d}'_i + \mathfrak{d}'$ sind. Diese Ausdrücke nennen wir *äußeren* und *inneren Exzeß*:

$$2.8 \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \mathfrak{r} + \mathfrak{d} + (n+1)\mathfrak{k}, \\ \varepsilon_i &= \mathfrak{r}_i + \mathfrak{d}_i + (m+1)\mathfrak{k}_i + \mathfrak{d} + (n+1)\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Gehen wir nun aus von x^α , y^a und irgendwelchen Größen der H_n mit äußerem und auch innerem Exzeß Null und einem in H_n definierten Zusammenhang, so wird sowohl der äußere als der innere Exzeß von allen mit Hilfe der zugelassenen Operationen abgeleiteten Größen verschwinden. Sind also von einer Größe irgend

²⁹⁾ Das Gewicht hat also bei dieser Transformation keinen Einfluß, da die Determinante von $\mathcal{B}_b^a \pm y^a \partial_b \log \varrho$ wegen $y^a \partial_a \log \varrho = 0$ gleich $+1$ ist.

vier der Zahlen r , δ , $\mathfrak{f}$, r_i , δ_i und $\mathfrak{f}_i$ gegeben, so lassen sich die zwei anderen berechnen. Da δ und δ_i sich sofort ablesen lassen, wenn die Größe niedergeschrieben ist, geben wir nur die Zahlenkombination $\{r, \mathfrak{f}; r_i, \mathfrak{f}_i\}$ und nennen diese den *Index* der Größe.

Die erste Verbindungsgröße, die wir ableiten, ist

$$2.9 \quad \mathcal{B}_b^\kappa = \partial_b x^\kappa; \quad \{1, 0; 0, 0\}.$$

Bei $\mathfrak{F}$ transformiert sie sich folgendermaßen:

$$2.10 \quad \mathcal{B}_b^\kappa \rightarrow \varrho \mathcal{B}_a^\kappa (\mathcal{B}_b^a + y^a \partial_b \log \varrho).$$

Die Gleichung

$$2.11 \quad v^\kappa = \mathcal{B}_b^\kappa v^b$$

definiert eine eindeutige Abbildung der kontravarianten projektiven Vektoren der lokalen P_m von H_m auf die Vektoren dieser Art einer P_m in der lokalen P_n von H_n . Diese beiden P_m werden identifiziert und entsprechende Größen mit demselben Kernbuchstaben bezeichnet. Insbesondere entsprechen sich y^a und x^κ (auf H_m):

$$2.12 \quad x^\kappa = y^b \partial_b x^\kappa = y^b \mathcal{B}_b^\kappa = y^\kappa.$$

Die Kernbuchstaben x und y behalten wir aber beide bei. Wird in jeder lokalen P_n eine P_{n-m-1} definiert, die mit P_m keinen Punkt gemeinsam hat, so heißt die H_m *eingespannt*. Analytisch geschieht dies durch Festlegung einer Größe $\mathcal{B}_\lambda^\kappa$ der H_n , deren κ -Gebiet mit der P_m zusammenfällt, deren λ -Gebiet die P_{n-m-1} festlegt, und die der Gleichung

$$2.13 \quad \mathcal{B}_\kappa^\kappa = m + 1$$

genügt. Mittels $\mathcal{B}_\lambda^\kappa$ läßt sich eine Verbindungsgröße $\mathcal{B}_\lambda^a$ festlegen mit Hilfe der Gleichungen

$$2.14 \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_\mu^a \mathcal{B}_b^\mu &= \mathcal{B}_b^a, \\ \mathcal{B}_c^\kappa \mathcal{B}_\lambda^\kappa &= \mathcal{B}_\lambda^\kappa. \end{aligned}$$

Der Index von $\mathcal{B}_\lambda^a$ ist $\{-1, 0; 0, 0\}$. Die Gleichung

$$2.15 \quad w_\lambda = \mathcal{B}_\lambda^a w_a$$

definiert eine eindeutige Abbildung der kovarianten projektiven Vektoren von H_m auf die Vektoren dieser Art von H_n , deren Hyperebene die ausgezeichnete P_{n-m-1} von P_n enthält. Auch hier führen wir die Identifizierung durch und bezeichnen

korrespondierende Größen mit demselben Kernbuchstaben. Von jetzt an lassen sich also alle Größen der H_m und auch alle Verbindungsgrößen mit den Indizes $\varkappa, \dots, \tau$ schreiben.

Der induzierte Zusammenhang.

Es sei jetzt in H_n ein Zusammenhang gegeben. Durch die Gleichung

$$(2.16) \quad V'_c v^a = \mathcal{B}_{c\varkappa}^{\mu a} V_\mu v^\varkappa$$

ist in der H_m ein Zusammenhang definiert, den wir den *induzierten* nennen³⁰⁾. Aus (2.16) folgt für die Parameter $\Pi'_{cb}{}^a$ dieses Zusammenhangs

$$(2.17) \quad \Pi'_{cb}{}^a = \mathcal{B}_{cb\varkappa}^{\mu \lambda a} \Pi_{\mu \lambda}^\varkappa + \mathcal{B}_c^a \partial_c \mathcal{B}_b^g,$$

woraus folgt

$$(2.18) \quad \begin{aligned} S'_{cb}{}^a &= \mathcal{B}_{cb\varkappa}^{\mu \lambda a} S_{\mu \lambda}^\varkappa \\ P'_{cb}{}^a &= \mathcal{B}_{cb}^{a \lambda} P_{\lambda}^\varkappa \\ Q'_{cb}{}^a &= \mathcal{B}_{cb}^{a \mu} Q_{\mu}^\varkappa \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor:

Ein induzierter Zusammenhang ist dann und nur dann für jede H_m in H_n

1. symmetrisch,
2. lokal normalisierbar,
3. eine Vektorübertragung,
4. eine Punktübertragung,
5. eine spezielle Punktübertragung,

wenn der Zusammenhang der H_n die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Ist also die H_n eine P_n , so sind die induzierten Zusammenhänge in allen eingespannten eingebetteten Mannigfaltigkeiten symmetrische und spezielle Punktübertragungen. Diese Punktübertragungen haben hier eine einfache geometrische Deutung. Jedem Punkt y^a der H_m ist durch die Einspannung eine bestimmte P_{n-m-1} in der P_n zugeordnet, und die Abbildung der Punkte der lokalen (tangierenden) P_m von y^a auf die der benachbarten P_m ist nichts Anderes als die Projektion mittels der P_{n-m} , die durch diese P_{n-m-1} und den zu projizierenden Punkt geht.

³⁰⁾ In 1933.4 konstruiert V. HLAVATÝ für eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in einer P_n einen projektiven Zusammenhang. Er benutzt aber für diese Mannigfaltigkeit keine homogenen Koordinaten.

Die H_{n-1} in H_n .

Als Beispiel der Einbettungstheorie gehen wir jetzt von einer H_n mit einer symmetrischen speziellen Punktübertragung aus und betrachten eine eingebettete H_{n-1} , die vorläufig nicht *eingespannt* wird. ∇_μ sei der kovariante Differentialoperator des zugehörigen lokalnormalisierbaren Zusammenhangs. Unsere Resultate müssen also für den speziellen Fall, daß die H_n eine P_n wird, übergehen in die bekannten Resultate der gewöhnlichen projektiven Differentialgeometrie, wie sie z.B. dargestellt sind in dem bekannten Lehrbuch von Fubini und Čech³¹⁾. Der Unterschied in der Behandlungsweise liegt vor allem darin, daß wir im Außenraum krummlinige homogene Koordinaten zulassen und auch im Innenraum homogene Koordinaten verwenden. Die ersten gestatten die Verallgemeinerung von P_n auf H_n , die letztgenannten ermöglichen einen einfacheren Aufbau, da $\partial_b x^\alpha$ den höchsten Rang n bekommt.

Wir betrachten folgende Größen:

I. Die Verbindungsgröße $\mathcal{B}_b^\alpha$.

$$2.19 \quad \mathcal{B}_b^\alpha = \partial_b x^\alpha \quad \{1, 0; 0, 0\}.$$

II. Die kovariante projektive Vektordichte T_λ , definiert durch die Gleichung

$$2.20 \quad T_\lambda = \mathcal{B}_{[0}^\lambda \dots \mathcal{B}_{n-1]}^{n-1} \mathcal{A}_\lambda^n \quad \{n, -1; 0, 1\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$2.21 \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_b^\lambda T_\lambda &= 0, \\ x^\lambda T_\lambda &= y^b \mathcal{B}_b^\lambda T_\lambda = 0, \end{aligned}$$

und $[T_\lambda]$ ist also die tangierende Hyperebene der H_{n-1} in der lokalen P_n . Infolgedessen ist

$$2.22 \quad \mathcal{B}_{cb}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} T_{\lambda]} = 0.$$

III. Die projektive Tensordichte h_{cb} , definiert durch die Gleichung

$$2.23 \quad h_{cb} = \mathcal{B}_{cb}^{\mu\lambda} V_\mu T_\lambda \quad \{n+1, -1; -1, 1\}.$$

Aus (2.22) und der Symmetrie der Übertragung in H_n folgt, daß diese Größe tatsächlich symmetrisch ist. Da

$$2.24 \quad \begin{aligned} y^c h_{cb} &= x^\mu \mathcal{B}_b^\lambda V_\mu T_\lambda = \mathcal{B}_b^\lambda x^\mu (\partial_\mu T_\lambda - \Pi_{\mu\lambda}^\alpha T_\alpha + \Pi_{\mu\varrho}^\varrho T_\lambda) \\ &= n \mathcal{B}_b^\lambda T_\lambda = 0 \end{aligned}$$

³¹⁾ G. FUBINI und E. ČECH, 1927.1.

ist, ist der Rang von h_{cb} kleiner als n . Wir betrachten jetzt nur die Punkte der H_{n-1} , in denen dieser Rang gleich $n - 1$ ist ³²⁾. Für $H_n = P_n$ korrespondiert $h_{ab}dy^a dy^b$ mit der ersten Fundamentalform der H_{n-1} in nicht homogenen Koordinaten.

IV. Die projektive Tensordichte H^{ab} , definiert durch die Gleichung

$$2.25 \quad H^{ab} = \mathfrak{E}^{aa_2 \dots a_n} \mathfrak{E}^{bb_2 \dots b_n} h_{a_2 b_2} \dots h_{a_n b_n} \{n^2 - 1, 1 - n; 1 - n, n + 1\},$$

wo $\mathfrak{E}^{a_1 \dots a_n}$ die kontravariante n -Vektordichte vom Gewicht $+1$ ist, hat den Rang 1 und muß folglich bis auf einen Dichtenfaktor gleich $y^a y^b$ sein (2.24).

V. Die projektive Dichte h , definiert durch die Gleichung

$$2.26 \quad h = \frac{H^{ab}}{y^a y^b} \{n^2 - 1, 1 - n; -n - 1, n + 1\}.$$

Diese Dichte soll jetzt verwendet werden zur Normalisierung von h_{ba} und T_λ . Wir definieren

VI. die projektive Tensordichte g_{ba} :

$$2.27 \quad g_{ba} = |h|^{-n} h_{ba} \{2, -2n; 0, 0\};$$

VII. die projektive Vektordichte t_λ :

$$2.28 \quad t_\lambda = |h|^{-n} T_\lambda \{1, -2n; 1, 0\};$$

und es ist dann wegen (2.23) und (2.24)

$$2.29 \quad \begin{aligned} g_{cb} &= \mathcal{B}_{cb}^{\mu\lambda} \nabla_\mu t_\lambda \\ y^c g_{cb} &= 0. \end{aligned}$$

Definieren wir jetzt

VIII. die Verbindungsgröße $b_{c\lambda}$ mittels der Gleichung

$$2.30 \quad b_{c\lambda} = \mathcal{B}_c^\mu \nabla_\mu t_\lambda \{1, -2n; 0, 0\},$$

so folgt wegen der Symmetrie von g_{cb}

$$2.31 \quad g_{cb} = \mathcal{B}_b^\lambda b_{c\lambda} = \mathcal{B}_c^\lambda b_{b\lambda}$$

und aus (2.29)

$$2.32 \quad x^\lambda b_{c\lambda} = y^b \mathcal{B}_b^\lambda b_{c\lambda} = y^b g_{bc} = 0.$$

³²⁾ Ähnliches geschieht ja auch in der affinen Differentialgeometrie, vgl. z.B. 1924.6, S. 138.

Die Gleichung (2.25) läßt sich auch schreiben

$$2.33 \quad gy^a y^b = \mathfrak{G}^{aa_2} \cdots a_n \mathfrak{G}^{bb_2} \cdots b_n g_{a_2 b_2} \cdots g_{a_n b_n}, \quad g = h \cdot |h|^{-\frac{n-1}{n+1}},$$

und daraus geht hervor, daß es

IX. eine projektive Tensordichte D^{ab} gibt, definiert durch die Gleichung

$$2.34 \quad \mathfrak{G}^{a_1} \cdots a_n \mathfrak{G}^{b_1} \cdots b_n g_{a_1 b_1} \cdots g_{a_n b_n} = g D^{[a_1 [b_1 y^{a_2} y^{b_2}]},$$

mit dem Index $\{-2, +2n; 0, 0\}$, die bis auf Transformationen von der Form

$$2.35 \quad D^{ab} \rightarrow D^{ab} + y^{(a} v^{b)}$$

mit beliebigen v^b festgelegt ist. Aus (2.34) folgt leicht, daß

$$2.36 \quad D^{ac} g_{cb} = \mathcal{B}_b^a + y^a w_b, \quad w_b y^b = -1$$

ist, wo w_b unbestimmt bleibt. Auch diese letzte Gleichung könnte zusammen mit der Symmetriebedingung für D^{ab} zur Definition von D^{ab} dienen.

Aus $\mathcal{B}_b^x$ und $b_{b\lambda}$, die beide vom Range n sind, läßt sich nun merkwürdigerweise eine projektive Tensordichte $a_{\lambda x}$ der H_n vom Range $n+1$ ableiten:

X. Wir setzen an

$$2.37 \quad a_{\lambda x} \mathcal{B}_b^\lambda = b_{bx},$$

aus welcher Gleichung folgt, daß $\{0, -2n; 0, 0\}$ der Index von $a_{\lambda x}$ ist. Wir treffen hier also zum ersten Mal eine reine Ortsfunktion an. Um die Gleichung (2.37) zu lösen, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$2.38 \quad v_\lambda \mathcal{B}_b^\lambda = u_b \quad (\text{Index von } u_b \text{ beliebig}),$$

deren allgemeinste explizite Lösung bekanntlich lautet

$$2.39 \quad v_\lambda = n u_{[0} \mathcal{A}_{|\lambda|}^{[0} \mathcal{B}_1^1 \cdots \mathcal{B}_{n-1}^{n-1} p^{n]} + q t_\lambda,$$

wo p^x eine beliebig aber fest gewählte Vektordichte mit dem Index $\{-n, 1; 0, -1\}$ ist, die nicht gerade das erste Glied annulliert, was durch die Normalisierungsgleichung $p^x T_x = 1$ erzwungen werden kann, und q eine beliebige frei veränderliche Dichte ist mit einem Index, der aus dem Index von u_b entsteht durch Subtraktion des Indexes von $\mathcal{B}_b^x$ und von t_λ . Änderung der Wahl von p^x beeinflusst das Resultat nicht, da sie stets durch Änderung von q aufgehoben werden kann. Drosseln wir nun in (2.37) den Index x ab

$$2.40 \quad a_{(\kappa)\lambda} \mathcal{B}_b^\lambda = b_{b(\kappa)},$$

so folgt als allgemeinste Lösung, wenn wir in dem Resultat die Abdrosselung wieder aufheben

$$2.41 \quad a_{\kappa\lambda} = n b_{[0|\kappa} \mathcal{A}_{\lambda]}^{[0} \mathcal{B}_1^1 \dots \mathcal{B}_{n-1}^{n-1]} p^{n]} + r_\kappa t_\lambda,$$

wo p^κ dieselbe Bedeutung hat wie oben und r_κ ein beliebiger projektiver Vektor mit dem Index $\{-1, 0; -1, 0\}$ ist.

Es soll jetzt r_κ so gewählt werden, daß $a_{\lambda\kappa}$ symmetrisch wird.

Neben (2.37) soll also auch gelten

$$2.42 \quad \mathcal{B}_b^\kappa a_{\kappa\lambda} = b_{b\lambda}.$$

Nun folgt aber schon aus (2.37), daß

$$2.43 \quad \mathcal{B}_b^\kappa a_{\kappa\lambda} \mathcal{B}_a^\lambda = \mathcal{B}_b^\kappa b_{a\kappa} = g_{ab} = b_{b\lambda} \mathcal{B}_a^\lambda$$

ist, so daß nur noch erreicht werden muß, daß die Überschiebung der Gleichung (2.42) mit irgend einem Vektor v^λ , der *nicht* im κ -Gebiet von $\mathcal{B}_b^\kappa$ liegt, eine Identität wird. Wählen wir zu diesem Zweck den ohnehin schon festgewählten Vektor p^κ , so soll also

$$2.44 \quad \mathcal{B}_b^\kappa a_{\kappa\lambda} p^\lambda = b_{b\lambda} p^\lambda$$

sein. Aus (2.41) folgt aber unter Berücksichtigung der Normierungsgleichung für p^κ

$$2.45 \quad a_{\kappa\lambda} p^\lambda = r_\kappa t_\lambda p^\lambda = g^{-\frac{1}{2}} r_\kappa,$$

und daraus geht in Verbindung mit (2.44) hervor, daß

$$2.46 \quad r_\kappa \mathcal{B}_b^\kappa = g^{\frac{1}{2}} b_{b\lambda} p^\lambda$$

ist, eine Gleichung, die r_κ bis auf ein Vielfaches von t_λ bestimmt. Es ist jetzt also $a_{\lambda\kappa}$ bis auf eine Transformation von der Form

$$2.47 \quad a_{\lambda\kappa} \rightarrow a_{\lambda\kappa} + \sigma t_\lambda t_\kappa$$

festgelegt. Die Determinante von $a_{\lambda\kappa}$ hat unabhängig von dieser näheren Festlegung den Wert $+1$. $a_{\lambda\kappa}$ hat also den Rang $n+1$ und die Gleichung

$$2.48 \quad a_{\lambda\kappa} X^\lambda X^\kappa = 0$$

stellt in der lokalen P_n ein System von ∞^1 Quadriken dar. Da

$$2.49 \quad a_{\lambda\kappa} x^\lambda = a_{\lambda\kappa} \mathcal{B}_a^\lambda y^a = b_{a\kappa} y^a = y^a \mathcal{B}_a^\mu \nabla_\mu t_\kappa = x^\mu \nabla_\mu t_\kappa = x^\mu \partial_\mu t_\kappa = t_\kappa$$

ist, tangieren diese Quadriken alle die Hyperebene $[t_\lambda]$. Für $H_n = P_3$ sind dies die Quadriken von Darboux³³⁾.

³³⁾ G. FUBINI und E. ČECH, 1927.1, I, S. 125.

XI. Aus $a_{\lambda\kappa}$ leitet sich die Projektordichte p_{cba} ab mittels der Gleichung

$$2.50 \quad p_{cba} = \mathcal{B}_{cba}^{\mu\lambda\kappa} \nabla_\mu a_{\lambda\kappa} \quad \{2, -2n; -1, 0\}.$$

Da $\mathcal{B}_{cba}^{\mu\lambda\kappa} \nabla_\mu t_\lambda t_\kappa$ identisch verschwindet, ist p_{cba} vollständig bestimmt. Aus der Definitionsgleichung folgt ferner, daß p_{cba} in ba symmetrisch ist. Da der Außengrad von $a_{\lambda\kappa}$ gleich Null ist, ist

$$2.51 \quad y^c p_{cba} = \mathcal{B}_{ba}^{\lambda\kappa} x^\mu \nabla_\mu a_{\lambda\kappa} = \mathcal{B}_{ba}^{\lambda\kappa} x^\mu \partial_\mu a_{\lambda\kappa} = 0.$$

Ferner ist

$$2.52 \quad y^b p_{cba} = \mathcal{B}_{ca}^{\mu\kappa} x^\lambda \nabla_\mu a_{\lambda\kappa} = \mathcal{B}_{ca}^{\mu\kappa} (\nabla_\mu t_\kappa - a_{\mu\lambda}) = 0,$$

sodaß die Überschiebung von p_{cba} mit y^a über jeden Index verschwindet.

Wir beweisen jetzt, daß

$$2.53 \quad D^{ba} p_{cba} = 0$$

ist. Der Ausdruck links ist infolge (2.52) unabhängig von der näheren Festlegung von D^{ba} . Aus (2.36) und (2.31) folgt

$$2.54 \quad D^{ba} \mathcal{B}_{ba}^{\lambda\kappa} b_{c\lambda} = \mathcal{B}_c^{\kappa} + x^\kappa w_c.$$

Aus dieser Gleichung und der Umkehrung von (2.37)

$$2.55 \quad {}^{-1}a^{\kappa\lambda} b_{c\lambda} = \mathcal{B}_c^{\kappa}$$

folgt

$$2.56 \quad D^{ba} \mathcal{B}_{ba}^{\lambda\kappa} = {}^{-1}a^{\lambda\kappa} + 2x^{(\lambda} v^{\kappa)},$$

wo v^κ irgend eine beliebige Lösung der Gleichung

$$2.57 \quad v^\lambda b_{c\lambda} = w_c$$

ist. In (2.56) ist v^κ nur bis auf ein Zusatzglied von der Form λx^κ bestimmt und auch ${}^{-1}a^{\lambda\kappa}$ ist noch unbestimmt. (2.56) ergibt, eingesetzt in (2.53),

$$\begin{aligned} 2.58 \quad D^{ba} p_{cba} &= \mathcal{B}_c^\mu {}^{-1}a^{\kappa\lambda} \nabla_\mu a_{\kappa\lambda} + 2\mathcal{B}_c^\mu x^\kappa v^\lambda \nabla_\mu a_{\kappa\lambda} \\ &= \mathcal{B}_c^\mu \partial_\mu \log \text{Det } (a_{\kappa\lambda}) + 2\mathcal{B}_c^\mu v^\lambda (\nabla_\mu t_\lambda - a_{\mu\lambda}) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

wegen (2.30) und (2.42)³⁴⁾.

Die Größe p_{cba} ist im Allgemeinen nicht symmetrisch in cb . Es ist nämlich

³⁴⁾ Für $H_n = P_n$: G. FUBINI und E. ČECH, 1927.1. II, S. 607.

$$2.59 \quad p_{[cb]a} = \mathcal{B}_{[cb]a}^{\mu\lambda\kappa} \nabla_\mu \nabla_\lambda t_\kappa = -\frac{1}{2} \mathcal{B}_{cba}^{\mu\lambda\kappa} N_{\mu\lambda\kappa}{}^{\cdot\cdot} e_{t_Q} = -\frac{1}{2} \mathcal{B}_{cba}^{\mu\lambda\kappa} O_{\mu\lambda\kappa}{}^{\cdot\cdot} e_{t_Q}.$$

$p_{[cb]a}$ verschwindet also dann und nur dann für jede H_{n-1} in der H_n , wenn die H_n eine P_n ist. In dem Falle ist p_{cba} symmetrisch und korrespondiert

$$2.60 \quad p_{cba} dy^c dy^b dy^a$$

mit der bekannten zweiten Differentialform der H_{n-1} in nicht-homogenen Koordinaten ³⁵⁾).

XII. Aus $a_{\lambda\kappa}$ leitet sich die Verbindungsgröße $q_{cb\lambda}$ ab mittels der Gleichung

$$2.61 \quad q_{cb\lambda} = \mathcal{B}_{cb}^{\nu\mu} \nabla_\nu a_{\mu\lambda}; \quad \{1, -2n; -1, 0\}.$$

Sie ist bis jetzt nicht vollständig bestimmt, da sie bei der Transformation (2.47) übergeht in

$$2.62 \quad q_{cb\lambda} + \sigma g_{cb} t_\lambda.$$

Diese Unbestimmtheit ermöglicht nun die vollständige Festlegung von $a_{\lambda\kappa}$. Es ist

$$2.63 \quad \mathcal{B}_a^\mu D^{cb} q_{cb\mu} = D^{cb} p_{cba} = D^{cb} p_{cab} = \\ = D^{cb} \{p_{acb} - \mathcal{B}_{cab}^{\nu\mu\lambda} O_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot} e_{t_Q}\} = -D^{cb} \mathcal{B}_{cab}^{\nu\mu\lambda} O_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot} e_{t_Q}.$$

Schreiben wir also

$$2.64 \quad r_\nu = D^{cb} \mathcal{B}_{cb}^{\mu\lambda} O_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot} e_{t_Q},$$

so ist dieser Vektor vollständig bestimmt, und es ist

$$2.65 \quad D^{cb} q_{cb\mu} = r_\mu + \tau t_\mu,$$

wo τ nicht von der näheren Wahl von D^{cb} abhängt, sondern nur von der näheren Wahl von $a_{\lambda\kappa}$. Man kann also σ in (2.47) in einer und nur einer Weise so wählen, daß

$$2.66 \quad D^{cb} q_{cb\mu} = r_\mu$$

ist. Damit ist $a_{\lambda\kappa}$ vollständig festgelegt. Das eindeutig bestimmte $a_{\lambda\kappa}$ zeichnet eine der ∞^1 Quadriken in der lokalen P_n aus. Diese nichtdegenerierte Quadrik ist für $H_n = P_3$ die Quadrik von Lie, die von Čech verallgemeinert wurde für $H_n = P_n$ ³⁶⁾. In diesem Falle ist natürlich $r_\mu = 0$.

Wir schreiten jetzt zur Ableitung der Projektivnormalen.

³⁵⁾ G. FUBINI und E. ČECH, 1927, I, II, S. 606 u. f.

³⁶⁾ G. FUBINI und E. ČECH, 1927, I, II, S. 615.

XIII. Aus p_{cba} und D^{ab} läßt sich zunächst die invariante Dichte I gewinnen:

$$2.67 \quad I^2 = p_{c_1 b_1 a_1} p_{c_2 b_2 a_2} D^{c_1 c_2} D^{b_1 b_2} D^{a_1 a_2}, \text{ Index } I: \{-1, n; -1, 0\},$$

die wegen (2.51) und (2.52) von der näheren Wahl von D^{ab} unabhängig ist ³⁷⁾.

XIV. Aus I gewinnen wir den kovarianten projektiven Vektor der H_m :

$$2.68 \quad w_b = -\mathcal{B}_b^\mu I^{-1} \nabla_\mu I = -\partial_b \log I + n \mathcal{B}_b^\mu \Pi_{\mu 0}^0; \quad \{0, 0; -1, 0\},$$

der der Gleichung

$$2.69 \quad w_b y^b = 1$$

genügt und also eine P_{n-2} in der lokalen P_{n-1} darstellt, die *nicht* durch den Berührungspunkt geht.

XV. Die polare Gerade dieser P_{n-2} in Bezug auf die Quadrik von $a_{\lambda\kappa}$ ist gegeben durch die Gleichung

$$2.70 \quad n^\kappa b_{b\kappa} = w_b,$$

die n^κ bis auf ein Vielfaches von x^κ festlegt und somit die Gerade durch $[x^\kappa]$ und $[n^\kappa]$ eindeutig bestimmt. Diese Gerade ist die *Projektivnormale* ³⁸⁾.

XVI. Aus n^κ läßt sich jetzt $\mathcal{B}_\lambda^a$ bilden mittels der Gleichungen

$$2.71 \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda^a \mathcal{B}_b^\lambda &= \mathcal{B}_b^a \\ \mathcal{B}_\lambda^a \mathcal{B}_a^\kappa &= \mathcal{B}_\lambda^\kappa = \mathcal{A}_\lambda^\kappa - n^\kappa t_\lambda. \end{aligned}$$

Geht aber n^κ über in $n^\kappa + \alpha x^\kappa$, so geht $\mathcal{B}_\lambda^a$ über in $\mathcal{B}_\lambda^a - \alpha y^a t_\lambda$. Es bedarf also noch einer Normierung, und diese kann erreicht werden mittels der Gleichung

$$2.72 \quad \mathcal{B}_{\kappa a}^\mu \nabla_\mu n^\kappa = 0,$$

die n^κ und damit $\mathcal{B}_\lambda^a$ vollkommen festlegt. Damit ist dann eine feste Einspannung gefunden, aus welcher sich die in H_{n-1} induzierte Punktübertragung ableiten läßt, wie oben gezeigt wurde.

(Eingegangen den 4. Juli 1934.)

³⁷⁾ Normierung von x^κ mit I , so daß der Außengrad von x^κ verschwindet, ist nicht empfehlenswert, denn es wird dann auch der Innengrad von x^κ gleich Null, und der Rang von $\mathcal{B}_b^\mu$ wäre also nicht mehr gleich n (S. [38] 38).

³⁸⁾ 1927.1. I, S. 87 für $H_n = P_3$.

LITERATURVERZEICHNIS.

1921.

1. WEYL, H.: Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. [Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. 1921. 99—112.]

1922.

1. CARTAN, E.: Sur les espaces généralisés et la theorie de la relativité. [C. R. 174, 734—737.]
2. VEBLEN, O.: Projective and affine geometry of paths. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 8, 347—350.]

1923.

1. VEBLEN, O. und T. Y. THOMAS: The geometry of paths. [Trans. Amer. Math. Soc. 25, 531—608.]

1924.

1. CARTAN, E.: Sur les variétés à connexion projective. [Bull. Soc. Math. France 52, 205—241.]
2. CARTAN, E.: Sur la connexion projective des surfaces. [C. R. 178, 750—752.]
3. SCHOUTEN, J. A.: Projectieve en konforme invarianten bij halfsymmetrische overbrengingen. [Verslagen Akad. Amsterdam 34, 1300—1302.]
4. SCHOUTEN, J. A.: On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements. [Proceedings Akad. Amsterdam 27, 407—424.]
5. SCHOUTEN, J. A.: Sur les connexions conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König. [C. R. 178, 2044—2046.]
6. SCHOUTEN, J. A.: Der Ricci-Kalkül. [Berlin, 1924.]

1925.

1. THOMAS, J. M.: Note on the projective geometry of paths. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 11, 207—209.]
2. THOMAS, T. Y.: On the projective and aequi-projective geometries of paths. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 11, 199—203.]
3. THOMAS, T. Y.: Note on the projective geometry of paths. [Bull. Amer. Math. Soc. 31, 318—322.]
4. THOMAS, T. Y.: Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 11, 588—589.]
5. THOMAS, T. Y.: On the aequi-projective geometry of paths. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 11, 592—594.]
6. VEBLEN, O. und J. M. THOMAS: Projective normal coordinates for the geometry of paths. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 11, 204—207.]

1926.

1. SCHOUTEN, J. A.: Erlanger Programm und Übertragungslehre. [Rend. Palermo 50, 142—169.]
2. SCHOUTEN, J. A.: Über die Projektivkrümmung und die Konformkrümmung halbsymmetrischer Übertragungen. [In mem. N. I. Lobatschewsky II, Soc. Phys. math. Kazan, 90—98.]
3. SCHOUTEN, J. A.: Projective and conformal invariants of half symmetrical connections. [Proceedings Akad. Amsterdam 29, 334—336.]
4. THOMAS, T. Y.: A projective theory of affinely connected manifolds. [Math. Z. 25, 723—733 (Vergl. 1928.3).]

5. VEBLEN, O. und J. M. THOMAS: Projective invariants of affine geometry of paths. [Ann. of Math. (2) 27, 279—296.]

1927.

1. FUBINI, G. und E. ČECH: Geometria proiettiva differenziale I, II. [Bologna, N. Zanichelli.]

1928.

1. ROBERTSON, H. P.: Note on projective coordinates. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 14, 153—154.]
2. VEBLEN, O.: Projective tensors and connections. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 14, 154—166.]
3. HLAVATÝ, V.: Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas (1926.4). [Math. Z. 28, 142—146.]

1929.

1. WEYL, H.: On the foundation of general infinitesimal geometry. [Bull. Amer. Math. Soc. 35, 716—725.]
2. ROBERTSON, H. P. und H. WEYL: On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry. [Bull. Amer. Math. Soc. 35, 686—690.]
3. VEBLEN, O.: Generalized projective geometry. [Journal London Math. Soc. 42, 140—160.]
4. WHITEHEAD, J. H. C.: On a class of projectively flat affine connections. [Proc. London Math. Soc. 32, 93—112.]

1930.

1. SCHOUTEN, J. A. und ST. GOŁAB: Über projektive Übertragungen I. [Math. Z. 32, 192—214.]
2. SCHOUTEN, J. A. und ST. GOŁAB: Über projektive Übertragungen und Ableitungen II. [Ann. Mat. pura appl. (4) 8, 141—157.]
3. GOŁAB, ST.: Über verallgemeinerte projektive Geometrie. [Prace mat. fiz. Warszawa 37, 91—153.]
4. EISENHART, L. P.: Projective normal coordinates. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 16, 731—740.]
5. VEBLEN, O. und B. HOFFMANN: Projective relativity. [Physic. Rev. 36, 810—822.]
6. WHITEHEAD, J. H. C.: The representation of projective spaces. [Ann. of Math. (2) 32, 327—360.]
7. WHITEHEAD, J. H. C.: A method of obtaining normal representations for a projective connection. [Proc. Nat. Acad. U. S. A. 16, 754—760.]

1931.

1. BORTOLOTTI, E.: Connessioni proiettive. [Boll. Un. Mat. Ital. 9 (1930), 288—294, 10, 28—34, 83—90.]
2. HLAVATÝ, V.: Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve. [Math. Z. 34, 58—73.]
3. WHITEHEAD, J. H. C.: On a class of projectively flat connections. [Proc. London Math. Soc. (2) 32, 93—114.]

1932.

1. VEBLEN, O. und J. H. C. WHITEHEAD: The foundations of differential geometry. [Cambridge Tracts 29.]
2. DANTZIG, D. VAN: Theorie des projektiven Zusammenhangs n -dimensionaler Räume. [Math. Ann. 106, 400—454.]

3. SCHOUTEN, J. A. und D. VAN DANTZIG: Zur generellen Feldtheorie. [Z. f. Phys. **78**, 639—667.] (G. F. III.)
4. DANTZIG, D. VAN: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. I: Einordnung in die Affingeometrie. II: X_{n+1} mit eingliedriger Gruppe. [Proceedings Akad. Amsterdam **35**; 524—534, 535—542.]
5. BORTOLOTTI, E.: Sulle connessioni proiettive. [Rend. Palermo **56**, 1—57.]
6. BORTOLOTTI, E.: Spazi proiettivamente piani. [Ann. Mat. pura appl. (4) **11**, 111—134.]
7. HLAVATÝ, V. und ST. GOŁAB: Zur Theorie der Vektor- und Punktkonnexion. [Prace mat. fiz. Warszawa **39**, 119—130.]
8. WEITZENBÖCK, R.: Über den Reduktionssatz bei affinem und projektivem Zusammenhang. [Proceedings Akad. Amsterdam **35**, 1220—1229.]
9. HLAVATÝ, V.: Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} . [Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6) **16**; 109—114, 206—211, 299—304.]

1933.

1. SCHOUTEN, J. A. und D. VAN DANTZIG: On the projective connexions and their application to the general field theory. [Ann. of Math. (2) **34**, 271—312.] (G. F. VI.)
2. SCHOUTEN, J. A.: Zur generellen Feldtheorie. [Z. f. Phys. **81**; 129—138 (G. F. IV), 405—417 (G. F. V). **84**, 92—111 (G. F. VII).]
3. VEBLEN, O.: Projektive Relativitätstheorie. [Ergebn. d. Math. **2**, Heft 1.]
4. HLAVATÝ, V.: Invariants projectifs d'une hypersurface. [Rend. Palermo **57**, 402—430.]
5. HLAVATÝ, V.: Connexion projective et déplacement projectif. [Ann. Mat. pura appl. (4) **12**, 217—294.]

1934.

1. DANTZIG, D. VAN: On the general projective differential geometry III. Proceedings Akad. Amsterdam **37**, 150—155.]
2. STRUIK, D. J.: Theory of linear connections. [Ergebn. d. Math. **3**, Heft 2.]
3. SCHOUTEN, J. A. und J. HAANTJES: Autogeodätische Linien und Weltlinien. [Z. f. Phys. **89**, 357—369.] (G. F. VIII.)

Zusatz bei der Korrektur:

1935.

1. SCHOUTEN, J. A.: La theorie de la relativité projective. [Ann. de l'Inst. Henri Poincaré **5** (1), 51—88.]
 2. SCHOUTEN, J. A. und D. VAN DANTZIG: Was ist Geometrie? [Sém. pour le calcul vectoriel et tensoriel **2—3**, 1—48.]
 3. HLAVATÝ, V.: Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif courbe. [Mém. du sem. pour l'analyse vectoriel et tensoriel etc. à l'Université de Moscou. **2**, 119—144.]
-