

COMPOSITIO MATHEMATICA

H. BOEGEHOLD

M. HERZBERGER

Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden?

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 448-476

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__448_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden?

von

H. Boegehold und M. Herzberger

Jena

In einer Arbeit von Cl. Maxwell aus dem Jahre 1858¹⁾ findet sich der Lehrsatz, es sei abgesehen von einer trivialen Ausnahme, (Knotenpunktsystem s. S. [10] 457) unmöglich, einen Gegenstand durch ein optisches System in zwei Abständen scharf abzubilden. Aus dem ganzen Inhalt des Aufsatzes geht hervor, daß Maxwell hier unter einem optischen System ein Umdrehungssystem versteht. Der Ausdruck „ein Gegenstand in zwei Abständen“²⁾ kann so ausgelegt werden, als sei hier ein und derselbe Gegenstand nur verschoben oder zwei kongruente Gegenstände, genauer zwei kongruente Flächen gemeint. In diesem Falle ist der Satz richtig, wie aus unseren Ergebnissen folgt. In Maxwells Beweisführung wird aber von einer Kongruenz gar kein Gebrauch gemacht; seine Ausdrucksweise und die Zeichnungen müssen zu der Meinung führen, Maxwell habe es für unmöglich gehalten, zwei verschiedene Flächen, wie sie auch aussehen mögen, auf nicht triviale Weise scharf abzubilden. Der eine von uns hat bei der Neuausgabe des Czapskischen Lehrbuchs Maxwells Worte auch so ausgelegt (3. Aufl., S. 216/7), aber bemerkt, daß sie nur mit einigen Einschränkungen richtig seien. Er hat auf den Fall der einzelnen Kugelfläche verwiesen, die zwei Flächen (sich selbst und die aplanatische Kugelfläche) scharf abbildet³⁾, ferner darauf, daß

¹⁾ On the general laws of optical instruments. [Scient. Pap. I, 271–285, Prop. IX.]

²⁾ „an object at two different distances“.

³⁾ Es ist merkwürdig, daß Maxwell in derselben Abhandlung die Abbildung der aplanatischen Kugelfläche als Beispiel für die scharfe Abbildung *einer* Fläche erwähnt. Er hat anscheinend nicht beachtet, daß die brechende Kugelfläche sich auch auf sich selbst scharf abbildet.

Bruns ein Eikonal für die scharfe und sogar ebene Abbildung der unendlich fernen Ebene durch ein holosymmetrisches System erhält, das dann wegen der Symmetrie auch die Dingbrennebene scharf abbilden muß. Die Darstellung im Czapskischen Lehrbuch kann aber nur als Hinweis auf die Schwierigkeiten der Fragestellung, nicht als ihre Erledigung angesehen werden, eine solche wollen wir im vorliegenden Aufsatz versuchen.

Maxwell hat in seiner Arbeit einen Satz bewiesen, der sich, wie folgt, fassen läßt: Werden zwei im Endlichen liegende Flächen scharf abgebildet, so muß das aus den beiden Flächen und dem dazwischen liegenden Raum bestehende Gebilde im Dingraum dem entsprechenden Gebilde im Bildraum im Verhältnis $n':n$ ähnlich sein. Vergrößern wir also das dingseitige Gebilde im Verhältnis $n:n'$, so kann man es mit dem entsprechenden bildseitigen Gebilde zur Deckung bringen. Hierbei sind zwei Fälle denkbar.

- 1) Jede Dingfläche fällt auf die entsprechende Bildfläche. Dies ist der einzige von Maxwell betrachtete Fall, und damit kommt man in der Tat auf Knotenpunktsysteme.
- 2) Die erste Dingfläche fällt auf die zweite Bildfläche und umgekehrt. Dabei kann natürlich nicht jeder Dingstrahl mit seinem Bildstrahl zur Deckung gebracht werden. Wir zeigen im ersten Teil unserer Arbeit, daß dies nur bei bestimmten Flächenpaaren möglich ist; die Abbildung des Flächenpaares, die durch eine einzelne Kugelfläche vermittelt wird, erscheint hierbei als Sonderfall.

Unsere Untersuchungen sind so angelegt, daß sie uns auch den Fall der Abbildung der unendlich fernen Ebene mit zu behandeln gestatten.

Die Untersuchungen des ersten Teils geben uns nur notwendige Bedingungen, die die abgebildeten Flächenpaare erfüllen müssen. Im zweiten Teile wird nun gezeigt, daß es in jedem der von uns behandelten Fälle ein Eikonal gibt, das eine derartige Abbildung vermittelt.

Im dritten Teile behandeln wir einige weitere Aufgaben, zeigen unter anderem, daß die Abbildung dreier Flächen in Nichtknotenpunktsystemen unmöglich ist. Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß es uns nicht gelungen ist, die Ergebnisse auf nicht rotationssymmetrische Folgen zu übertragen.

§ 1.

Die Grundgleichungen bei Abbildung zweier Flächen.

Gegeben seien (Figur 1) zwei rotationssymmetrische Flächen, von denen wir voraussetzen wollen, daß sie scharf abgebildet werden. Sie mögen die Achse in S_1 und S_2 schneiden. Wir wählen auf jeder von beiden Flächen einen beliebig gegebenen Punkt P_1 und P_2 . (Wir setzen nicht voraus, daß beide Punkte in der gleichen Meridianebene liegen.) Die Bildpunkte seien P'_1, P'_2 .

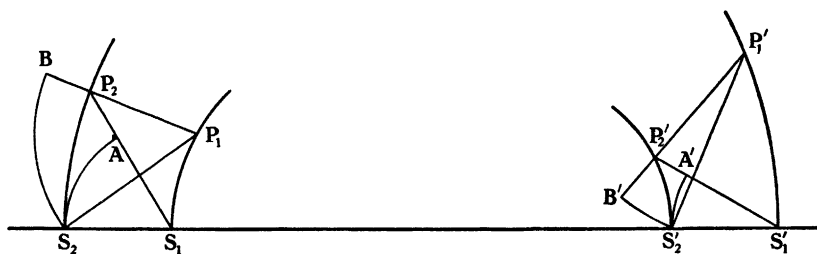


Abb. 1.

Zwei Dingflächen S_1P_1 und S_2P_2 werden auf $S'_1P'_1$ und $S'_2P'_2$ scharf abgebildet. $S_2A, S_2B; S'_2A', S'_2B'$ sind Wellenflächen. S_1P_1, S_2P_2 liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene.

Wir betrachten die Strahlen S_1P_2, P_1S_2, P_1P_2 . Wir legen durch S_2 eine Kugel um P_1 , die den Strahl P_1P_2 in B treffe und eine Kugel um S_1 , die den Strahl S_1P_2 in A treffe. Dasselbe Verfahren führe im Bildraum zu A' und B' .

Führen wir für den Lichtweg zwischen zwei Punkten P und Q die Abkürzung

$$(1) \quad \int_P^Q n ds = (P, Q)$$

ein, so folgt aus dem Satz von Fermat, daß (P_2, P'_2) und ebenso (S_2, S'_2) auf allen Ding- und Bildpunkt verbindenden Lichtwegen denselben Wert hat:

$$(2) \quad \begin{aligned} (P_2, P'_2) &= (P_2, B) + (B, B') + (B', P'_2) = \\ &= (P_2, A) + (A, A') + (A', P'_2). \end{aligned}$$

Für (S_2, S'_2) folgt mit Hilfe des Satzes von Malus:

$$(3) \quad (B, B') = (S_2, S'_2) = (A, A');$$

das gibt

$$(4) \quad \boxed{(P_2, B) - (P_2, A) = (P'_2, B') - (P'_2, A')}$$

Diese wichtige Formel bildet den Ausgangspunkt aller unserer Untersuchungen.

Alle vier Flächen liegen im Endlichen.

Nehmen wir zunächst wie in Figur 1 an, beide Ding- und beide Bildflächen liegen im Endlichen. Dann kann man die Punkte A und B aus (4) eliminieren.

Es ist

$$(5) \quad \begin{aligned} (P_2, B) &= (P_2, P_1) + (P_1, B) = (P_2, P_1) + (P_1, S_2), \\ (P_2, A) &= (P_2, S_1) + (S_1, A) = (P_2, S_1) + (S_1, S_2). \end{aligned}$$

Gleichung (4) läßt sich in diesem Fall auf die Form bringen:

$$(6) \quad \begin{aligned} (P_2, P_1) + (P_1, S_2) - (P_2, S_1) - (S_1, S_2) &= \\ = (P'_2, P'_1) + (P'_1, S'_2) - (P'_2, S'_1) - (S'_1, S'_2). \end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir noch keinen Gebrauch von der Drehungssymmetrie gemacht, obige Gleichungen gelten also auch für die Abbildung zweier Flächen durch beliebige Systeme. Wir führen jetzt Zylinder-Koordinaten ein. Aus der Drehungssymmetrie folgt, daß Dingpunkt und Bildpunkt das gleiche Azimut haben. Die kartesischen Koordinaten der vier Punkte sind nun für

$$(7) \quad \begin{aligned} P_1: & h_1 \cos \varphi_1, \quad h_1 \sin \varphi_1, \quad z_1; & P'_1: & h'_1 \cos \varphi_1, \quad h'_1 \sin \varphi_1, \quad z'_1; \\ P_2: & h_2 \cos \varphi_2, \quad h_2 \sin \varphi_2, \quad z_2; & P'_2: & h'_2 \cos \varphi_2, \quad h'_2 \sin \varphi_2, \quad z'_2. \end{aligned}$$

Hierin sind h_1^2, z_1 und z'_1 wegen der scharfen Abbildung und der Drehungssymmetrie Funktionen von h_1^2 allein, ebenso kann man h_2^2, z_2 und z'_2 als reine Funktionen von h_1^2 darstellen.

Für $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$ bekommt man die Koordinaten der Flächenscheitel:

$$(8) \quad \begin{aligned} S_1: & 0, 0, z_1^0; & S'_1: & 0, 0, z_1'^0; \\ S_2: & 0, 0, z_2^0; & S'_2: & 0, 0, z_2'^0. \end{aligned}$$

Setzt man (7) und (8) in (6) ein, so erhält man

$$(9) \quad \begin{aligned} & n\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + (z_1 - z_2)^2} - 2h_1h_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ & - n\sqrt{h_1^2 + (z_1 - z_2^0)^2} - n\sqrt{h_2^2 + (z_1^0 - z_2)^2} + n\sqrt{(z_1^0 - z_2^0)^2} = \\ & = n'\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + (z'_1 - z'_2)^2} - 2h'_1h'_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ & - n'\sqrt{h_1'^2 + (z'_1 - z_2'^0)^2} - n'\sqrt{h_2'^2 + (z_1'^0 - z'_2)^2} + n'\sqrt{(z_1'^0 - z_2'^0)^2} \end{aligned}$$

Gleichung (9) gilt für alle Werte von h_1, h_2 und $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Differentiation nach $(\varphi_1 - \varphi_2)$ gibt

$$(10) \quad \frac{n^2 h_1 h_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{n \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + (z_1 - z_2)^2} - 2 h_1 h_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{n'^2 h'_1 h'_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{n' \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + (z'_1 - z'_2)^2} - 2 h'_1 h'_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Gleichung (10) schließlich kann für beliebige Werte von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ nur erfüllt sein, wenn die beiden Gleichungen gelten:

$$(11) \quad n^2 h_1 h_2 = n'^2 h'_1 h'_2,$$

$$n^2 (h_1^2 + h_2^2) + n^2 (z_1 - z_2)^2 = n'^2 (h_1'^2 + h_2'^2) + n'^2 (z'_1 - z'_2)^2.$$

Dieses wichtige Gleichungspaar, das auch bei Maxwell steht, wird uns im folgenden Teil noch weiter beschäftigen.

Zunächst wollen wir jedoch sehen, was aus unseren Gleichungen wird, wenn eine oder mehrere unserer Flächen ins Unendliche rücken.

Die erste Dingfläche liegt im Unendlichen.

Wir müssen hier auf Formel (4) zurückgehen. Rückt die erste Dingfläche ins Unendliche, so verwandelt sich (s. Fig. 2) die Kugelfläche $S_2 A$ in die zur Achse senkrechte Ebene durch S_2 .

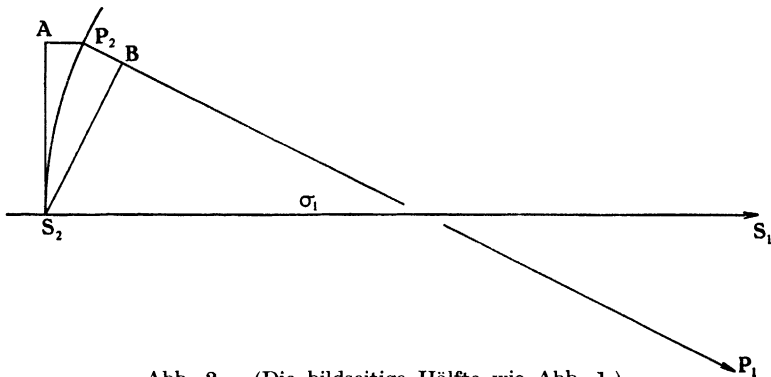


Abb. 2. (Die bildseitige Hälfte wie Abb. 1.)

Eine Dingfläche $S_1 P_1$ liegt im Unendlichen (unmöglich, wenn $S_1' P_1'$ und $S_2' P_2'$ im Endlichen liegen).

A ist dann der Schnittpunkt des durch P_2 gehenden achsenparallelen Strahls mit dieser Ebene. Die Kugelfläche $S_2 B$ verwandelt sich in die durch S_2 gehende Ebene, die auf der durch den unendlich fernen Punkt P_1 bestimmten Strahlrichtung $P_1 P_2$ senkrecht steht.

Sei die Strahlrichtung durch ihr Azimut φ_1 und den Winkel mit der Achse gegeben, dann findet man ⁴⁾ die Koordinaten:

$$(12) \quad \begin{aligned} A &: h_2 \cos \varphi_2, h_2 \sin \varphi_2, z_2^0 \\ B &: h_2 \cos \varphi_2 - e \cos \varphi_1 \sin \sigma_1, h_2 \sin \varphi_2 - e \sin \varphi_1 \sin \sigma_1, z_2 + e \cos \sigma_1 \\ P_2 &: h_2 \cos \varphi_2, h_2 \sin \varphi_2, z_2 \end{aligned}$$

mit

$$(13) \quad e = h_2 \sin \sigma_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - (z_2 - z_2^0) \cos \sigma_1.$$

Wir finden

$$(14) \quad \begin{aligned} (P_2, B) &= ne = nh_2 \sin \sigma_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - n(z_2 - z_2^0) \cos \sigma_1 \\ (P_2, A) &= -n(z_2 - z_2^0). \end{aligned}$$

Gleichung (4) ergibt also in unserem Fall:

$$(15) \quad \begin{aligned} &nh_2 \sin \sigma_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - n(z_2 - z_2^0)(\cos \sigma_1 - 1) = \\ &= \frac{n' \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + (z_1' - z_2')^2 - 2h_1'h_2' \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} -}{-n' \sqrt{h_1'^2 + (z_1' - z_2^0)^2} - n' \sqrt{h_2'^2 + (z_1^0 - z_2')^2} + n' \sqrt{(z_1^0 - z_2^0)^2}}. \end{aligned}$$

Differentiation nach $(\varphi_1 - \varphi_2)$ führt nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $\sin (\varphi_1 - \varphi_2)$ auf die Gleichung:

$$(16) \quad nh_2 \sin \sigma_1 = \frac{n'^2 h_1' h_2'}{n' \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + (z_1' - z_2')^2 - 2h_1'h_2' \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}}.$$

Gleichung (16) müßte für alle Werte von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ gültig sein. Das ist aber unmöglich. Wir haben also

Satz 1.

Werden zwei Flächen durch ein drehsymmetrisches optisches System scharf abgebildet, so kann unmöglich eine der beiden Ding- oder Bildflächen allein im Unendlichen liegen.

Die erste Dingfläche und die erste Bildfläche liegen im Unendlichen.

Gleichung (4) ergibt in diesem Fall (wir haben eine brennpunktlose Abbildung vor uns):

$$(17) \quad \begin{aligned} &nh_2 \sin \sigma_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - n(z_2 - z_2^0)(\cos \sigma_1 - 1) = \\ &= n'h_2' \sin \sigma_1' \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - n'(z_2' - z_2^0)(\cos \sigma_1' - 1). \end{aligned}$$

⁴⁾ Das Vorzeichen von σ_1 ist dem Gebrauch der Optik entsprechend angenommen worden; in der Geometrie pflegt man es entgegengesetzt zu wählen.

Diese Gleichung kann unabhängig von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ nur bestehen, wenn gleichzeitig gilt:

$$(18) \quad \begin{aligned} n' h'_2 \sin \sigma'_1 &= n h_2 \sin \sigma_1, \\ n' (z'_2 - z'_2{}^0) (\cos \sigma'_1 - 1) &= (n z_2 - z_2^0) (\cos \sigma_1 - 1). \end{aligned}$$

Die erste Dingfläche und die zweite Bildfläche liegen im Unendlichen.

Es geht (Abb. 3, S. [26] 473) die zweite Dingfläche durch den Dingbrennpunkt $\bar{F}$, die erste Bildfläche durch den Bildbrennpunkt F' . Man betrachte einen Strahl $\bar{P}_2 P'_1$, sowie die Strahlen von $\bar{F}$ nach P'_1 und von $\bar{P}_2$ nach F' . Da die zweite Dingfläche die unendlich ferne Ebene zum Bild hat, müssen die von $\bar{P}_2$ ausgehenden Strahlen $\bar{P}_2 P'_1$ und $\bar{P}_2 F'$ bildseitig parallel sein. Wir errichten in F' die auf dieser gemeinsamen Richtung senkrechte Ebene. Sie bildet für das von $\bar{P}_2$ kommende Bündel eine Wellenfläche, der durch P'_1 gehende Strahl möge sie im Punkte B' kreuzen. Der achsenparallele durch $\bar{P}_2$ eintretende Strahl möge die achsen-senkrechte Ebene durch $\bar{F}$ in $\bar{A}$ durchstoßen. Ebenso bildseitig der achsenparallele durch P'_1 austretende Lichtstrahl die achsen-senkrechte Ebene durch F' im Punkt A' . (Es ist zu beachten, daß die beiden so konstruierten Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, ebenso wie A' , B' nicht in der gleichen Meridianebene zu liegen brauchen.) Dann gilt wegen des Satzes von Malus

$$(19) \quad (\bar{P}_2, \bar{A}) + (\bar{A}, F') = (\bar{P}_2, F') = (\bar{P}_2, B').$$

Ebenso müssen die in P'_1 mündenden Strahlen dingseitig parallel sein. Wir betrachten die beiden Strahlen durch $\bar{P}_2$ und $\bar{F}$ und errichten in $\bar{F}$ eine zur gemeinsamen Richtung senkrechte Ebene (Wellenfläche), die den durch $\bar{P}_2$ gehenden Strahl in $\bar{B}$ schneidet. Wir finden

$$(19a) \quad (\bar{F}, A') + (A', P'_1) = (\bar{F}, P'_1) = (\bar{B}, P'_1).$$

Die Sätze von Fermat und Malus geben

$$(20) \quad (\bar{A}, F') = (\bar{F}, F') = (\bar{F}, A').$$

Betrachten wir den von $\bar{P}_2$ nach P'_1 laufenden Strahl. Wir haben

$$(21) \quad (\bar{P}_2, P'_1) = (\bar{P}_2, \bar{B}) + (\bar{B}, P'_1) = (\bar{P}_2, B') + (B', P'_1)$$

oder

$$(21a) \quad (\bar{P}_2, \bar{B}) - (B', P'_1) = (\bar{P}_2, B') - (\bar{B}, P'_1),$$

Die rechte Seite ist wegen (19) bis (20)

$$(\bar{P}_2, B') - (\bar{B}, P'_1) = (\bar{P}_2, \bar{A}) - (A', P'_1),$$

also:

$$(22) \quad (\bar{P}_2, \bar{B}) - (\bar{P}_2, \bar{A}) = - (P'_1, B') + (P'_1, A').$$

Nun führen wir wieder Koordinaten ein. Es sei ein Strahl gekennzeichnet durch die Koordinaten $h_2, \varphi_2, z_2; h'_1, \varphi'_1, z'_1$ seiner Durchstoßungspunkte mit der zweiten Ding- und der ersten Bildfläche; und seine Richtung σ_1, φ_1 im Dingraum, σ'_2, φ'_2 im Bildraum, dann gibt Gleichung (22) die (17) entsprechende Gleichung:

$$(23) \quad \begin{aligned} & n h_2 \sin \sigma_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - n(z_2 - z_2^0)(\cos \sigma_1 - 1) = \\ & = - n' h'_1 \sin \sigma'_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + n'(z'_1 - z_1^0)(\cos \sigma'_2 - 1), \end{aligned}$$

eine Gleichung, die unabhängig von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ nur bestehen kann, wenn gleichzeitig gilt

$$(24) \quad \begin{aligned} & n' h'_1 \sin \sigma'_2 = - n h_2 \sin \sigma_1, \\ & n'(z'_1 - z_1^0)(\cos \sigma'_2 - 1) = - n(z_2 - z_2^0)(\cos \sigma_1 - 1), \end{aligned}$$

oder, da h'_1 nur von σ_1 , σ'_2 nur von h_2 abhängen kann:

$$(25) \quad \begin{aligned} & \frac{n' h'_1}{\sin \sigma_1} = - \frac{n h_2}{\sin \sigma'_2} = n' f = - n f' = \text{const.} \\ & \frac{n'(z'_1 - z_1^0)}{1 - \cos \sigma_1} = - \frac{n(z_2 - z_2^0)}{1 - \cos \sigma'_2} = n' g = - n g' = \text{const.} \end{aligned}$$

Daß die erste Konstante mit der Brennweite zusammenhängt, erkennt man aus der Gaußischen Optik, indem man zum Grenzwert für $\sigma_1 \rightarrow 0$ übergeht. Die Bezeichnung der zweiten Konstanten auf zweierlei Weise ist nur aus Symmetriegründen gewählt.

§ 2.

Welche Gestalt müssen zwei durch ein Drehungssystem abgebildete Flächen haben?

a) *beide Flächen liegen im Endlichen.*

Wir nehmen zunächst wieder an, beide Flächen liegen im Endlichen. Dann haben wir als Grundgleichungen (Formel 11)

$$(26) \quad \boxed{\begin{aligned} & n^2(h_1^2 + h_2^2) + n^2(z_1 - z_2)^2 = n'^2(h_1'^2 + h_2'^2) + n'^2(z'_1 - z'_2)^2 \\ & n^2 h_1 h_2 = n'^2 h_1' h_2' \end{aligned}}$$

Betrachten wir zunächst die zweite Gleichung. Halten wir P_1 fest und ändern P_2 , so muß das Verhältnis $\beta'_2 = \frac{h'_2}{h_2}$ konstant bleiben. Ebenso folgt die Konstanz von $\beta'_1 = \frac{h'_1}{h_1}$. β'_1 und β'_2 sind die Maßstäbe, mit denen je ein sagittales Linienelement durch P_1 und P_2 (und daher der ganze Parallelkreis) scharf abgebildet wird. Wir bezeichnen diese Größe als sagittalen Abbildungsmaßstab und haben

Satz 2. Werden zwei endliche Flächen durch ein optisches System scharf abgebildet, so ist der sagittale Abbildungsmaßstab für jede der beiden Flächen eine Konstante und zwar gleich der Gaußischen Vergrößerung im Flächenscheitel. Zwischen den beiden Vergrößerungen besteht die Beziehung

$$(27) \quad n'^2 \beta'_1 \beta'_2 = n^2,$$

eine Verallgemeinerung der Formel, die von Herzberger (Strahlenoptik S. 134 (7)) für das Seidelsche Gebiet abgeleitet wurde.

Es erweist sich in dieser Arbeit als zweckmäßig, anstelle von β' die Größe $\mu = \frac{n'}{n} \beta'$ zu benutzen. Wir haben dann

$$(28) \quad \begin{aligned} n' h'_1 &= \mu n h_1, \\ n' h'_2 &= \frac{1}{\mu} n h_2, \end{aligned}$$

also

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \frac{1}{\mu}.$$

Wir untersuchen zunächst, ob unsere Gleichungen durch ein brennpunktloses, dann ob sie durch ein nicht brennpunktloses System zu erfüllen sind. Im ersten Falle muß $\beta'_1 = \beta'_2$ sein. Es wird also aus Gleichung (27) und (28)

$$(29) \quad \mu_1 = \mu_2 = \pm 1,$$

also

$$\begin{aligned} n' h'_1 &= \pm n h_1, \\ n' h'_2 &= \pm n h_2. \end{aligned}$$

Setzen wir das in (26) ein, so haben wir

$$(30) \quad n(z_2 - z_1) = \pm n'(z'_2 - z'_1).$$

Da z_2 und z'_2 nur von h'_2 , z_1 und z'_1 nur von h_1 abhängen, findet man

$$(31) \quad \begin{aligned} n(z_2 - z_2^0) &= \pm n' (z'_2 - z_2'^0), \\ n(z_1 - z_1^0) &= \pm n' (z'_1 - z_1'^0), \end{aligned}$$

oder in Worten:

Beide Dingflächen werden ähnlich und ähnlich liegend (oder spiegelsymmetrisch) im Maßstab $n : n'$ vergrößert abgebildet. Wir haben hier den von Maxwell 1853 untersuchten Fall. Ding- und Bildstrahlen sind (bis auf eine etwaige Spiegelung) parallel. Ein solches System ist brennpunktlos, es bildet den ganzen Dingraum scharf und ähnlich im Verhältnis der Brechzahlen vergrößert ab. Für dieses häufig in der Literatur behandelte System (s. Czapski, S. 213–215, Sätze von Bruns und Klein) hat der eine von uns (Strahlenoptik S. 102) den Namen *Knotenpunktsystem* eingeführt, da jeder Punkt als Knotenpunkt angesehen werden kann. Wir haben

Satz 3. Werden in einem brennpunktlosen System zwei im Endlichen gelegene Flächen scharf abgebildet, so ist das System ein Knotenpunktsystem, das den ganzen Raum scharf abbildet.

Wir betrachten jetzt die nicht brennpunktlosen Systeme, die zwei endliche Flächen scharf abbilden. Diese Flächen müssen, wegen (26) und (28) der Gleichung genügen

$$(32) \quad (n^2 h_1^2 - n'^2 h_2'^2)(1 - \mu^2) + n^2 (z_1 - z_2)^2 - n'^2 (z'_1 - z'_2)^2 = 0.$$

Hierin hängen z_1 und z'_1 nur von h_1 , z_2 und z'_2 nur von h'_2 ab.

Differenzieren wir (32) nach $(nh_1)^2$, so ergibt sich

$$(33) \quad (1 - \mu^2) + 2n^2(z_1 - z_2) \frac{dz_1}{d(nh_1)^2} - 2n'^2(z'_1 - z'_2) \frac{dz'_1}{d(nh_1)^2} = 0.$$

Differentiation von (33) nach $(n'h'_2)^2$ gibt schließlich

$$(34) \quad \frac{d(nz_1)}{d(nh_1)^2} \cdot \frac{d(nz_2)}{d(n'h'_2)^2} = \frac{d(n'z'_1)}{d(nh_1)^2} \cdot \frac{d(n'z'_2)}{d(n'h'_2)^2}.$$

Da z_1 und z'_1 nur von h_1 , z_2 und z'_2 nur von h'_2 abhängen, können wir eine Konstante τ so bestimmen, daß gilt

$$(35) \quad \frac{d(n'z'_1)}{d(nz_1)} = \frac{d(nz_2)}{d(n'z'_2)} = \tau$$

oder aufgelöst:

$$(36) \quad \begin{aligned} n' (z'_1 - z_1'^0) &= \tau n (z_1 - z_1^0) \\ n (z_2 - z_2^0) &= \tau n' (z'_2 - z_2'^0) \end{aligned}$$

oder in Worten

Satz 4. Werden zwei endliche Flächen durch ein Umdrehungssystem scharf abgebildet, so ist für zwei beliebige konjugierte Punkte das Verhältnis π , der axiale Abbildungsmaßstab ($\pi = \frac{n}{n'} \tau$) konstant. Zwischen den beiden axialen Abbildungsmaßstäben besteht die (28) entsprechende Gleichung.

$$(37) \quad \pi_1 \cdot \pi_2 = \frac{n^2}{n'^2}, \quad \text{also}$$

$$\tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \frac{1}{\tau}.$$

Wir sehen, jede der beiden Bildflächen entsteht aus der zugehörigen Dingfläche durch eine Dehnung im Verhältnis π in Richtung der Achse und eine Dehnung im Verhältnis β' senkrecht dazu.

Wir legen den Koordinatenursprung, über den wir bisher noch nicht verfügt haben, ding- und bildseitig in den zugehörigen Brennpunkt. Dann erhält man nach den Gesetzen der Gaußschen Optik (s. z.B. Czapski S. 47 (15c) oder Strahlenoptik S. 65 (21))

$$(38) \quad \begin{aligned} n z_1^0 &= \frac{n f'}{\mu}, & n' z_1'^0 &= -n f' \mu, \\ n z_2^0 &= n f' \mu, & n' z_2'^0 &= -\frac{n f'}{\mu}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (36) ein, so haben wir

$$(39) \quad \begin{aligned} n' z_1' - \tau n z_1 &= -\frac{n f'}{\mu} (\mu^2 + \tau) = -c, \\ n z_2 - \tau n' z_2' &= \frac{n f'}{\mu} (\mu^2 + \tau) = c, \end{aligned}$$

wo c nur eine abgekürzte Schreibweise ist.

Gleichung (39) kann dazu dienen, in (32) zwei der Größen z_1, z_1', z_2, z_2' zu eliminieren. Wir finden

$$(40) \quad \begin{aligned} (\tau n' z_2' + c - n z_1)^2 - (n' z_2' + c - \tau n z_1)^2 + (n^2 h_1^2 - n'^2 h_2'^2)(1 - \mu^2) &= 0, \\ (\tau n z_2 - n' z_1' - c)^2 - (\tau n' z_1' + c - n z_2)^2 + (n'^2 h_1'^2 - n^2 h_2^2) \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} \tau^2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zerfallen in die vier folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & n^2 z_1^2 (1 - \tau^2) - 2 n z_1 c (1 - \tau) + n^2 h_1^2 (1 - \mu^2) = K_1 \\
 & n^2 z_2^2 \frac{1 - \tau^2}{\tau^2} - 2 n z_2 c \frac{1 - \tau}{\tau^2} + n^2 h_2^2 \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} = K_2 \\
 & n'^2 z_1'^2 \frac{1 - \tau^2}{\tau^2} + 2 n' z_1' c \frac{1 - \tau}{\tau^2} + n'^2 h_1'^2 \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} = K_2 \\
 & n'^2 z_2'^2 (1 - \tau^2) + 2 n' z_2' c (1 - \tau) + n'^2 h_2'^2 (1 - \mu^2) = K_1.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Die Werte der Konstanten ergeben sich, wenn man in (41) $h = 0$ setzt. Das gibt, unter Beachtung von (38) und (39)

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{n^2 f'^2}{\mu^2} (\tau - 1) (2\mu^2 + \tau - 1) \\
 K_2 &= n^2 f'^2 \mu^2 \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{\tau} - \frac{2}{\mu^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Wir erkennen aus Gleichung (41)

Satz 5. Werden durch ein nicht brennpunktloses System zwei Flächen scharf abgebildet, so sind beide Ding- und beide Bildflächen rotationssymmetrische Flächen zweiter Ordnung, und zwar ist die zweite Bildfläche der ersten Dingfläche, die erste Bildfläche der zweiten Dingfläche im Maßstab $n : n'$ ähnlich.

Man erhält aus der Gleichung der ersten Ding- oder Bildfläche die der zweiten, indem man τ durch $\frac{1}{\tau}$ und μ durch $\frac{1}{\mu}$ ersetzt.

Wir wollen jetzt die Gleichungen (41) noch ein wenig weiter untersuchen. Ausgeschlossen werden muß $\tau = 1$, da hier alle vier Flächen in Punkte entarten. Wohl bedarf aber einer Untersuchung der Fall

$$\tau = -1.
 \tag{43}$$

Hier werden alle vier Flächen Paraboloiden, deren Brennpunkte im Systembrennpunkt liegen. Wir finden aus (41) unter Beachtung von (39) und (42)

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(-2 \frac{f'}{\mu} \right) \left(z_1 - \frac{f'}{\mu} \right) = h_1^2 \\
 & 2 (-2 \mu f') (z_2 - \mu f') = h_2^2 \\
 & 2 (-2 \mu f) (z_1' - \mu f) = h_1'^2 \\
 & 2 \left(-2 \frac{f}{\mu} \right) \left(z_2' - \frac{f}{\mu} \right) = h_2'^2.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Ist $\tau \neq -1$, so kann man die Gleichungen unserer vier Flächen, wie folgt, auf die Normalform bringen

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & \left(z_1 - \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} f' \right)^2 + h_1^2 \frac{1 - \mu^2}{1 - \tau^2} = \left(\frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} f' \right)^2 \\
 & \left(z_2 - \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} f' \right)^2 + h_2^2 \frac{1 - \mu^2}{1 - \tau^2} \frac{\tau^2}{\mu^2} = \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu(1 + \tau)} \tau f' \right)^2 \\
 & \left(z_1' - \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} f \right)^2 + h_1'^2 \frac{1 - \mu^2}{1 - \tau^2} \frac{\tau^2}{\mu^2} = \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu(1 + \tau)} \tau f \right)^2 \\
 & \left(z_2' - \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} f \right)^2 + h_2'^2 \frac{1 - \mu^2}{1 - \tau^2} = \left(\frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} f \right)^2.
 \end{aligned}$$

Von den durch (45) dargestellten Flächen ist nur der Teil brauchbar, der durch die Punkte (38) geht. Die Halbachse (Mittelpunkt-Scheitel) hat also ein wohlbestimmtes Vorzeichen. Der auf der rechten Seite unter der Klammer stehende Ausdruck gibt den Wert der Halbachse mit dem richtigen Vorzeichen an.

Wir haben

Satz 6. Werden zwei Flächen durch ein optisches nicht brennpunktloses System scharf abgebildet, so haben beide Ding- und beide Bildflächen denselben Mittelpunkt.

Alle vier Flächen sind Hyperboloide für

$$(46) \quad \frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} < 0,$$

Ellipsoide für

$$(47) \quad \frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} > 0.$$

Insbesondere sind alle vier Flächen Kugeln für

$$(48) \quad \tau = \pm \mu.$$

Dann gibt (45)

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & (z_1 \mp f')^2 + h_1^2 = \left(\frac{1 \mp \mu}{\mu} f' \right)^2 \\
 & (z_2 \mp f')^2 + h_2^2 = ((\mu \mp 1) f')^2 \\
 & (z_1' \mp f)^2 + h_1'^2 = ((\mu \mp 1) f)^2 \\
 & (z_2' \mp f)^2 + h_2'^2 = \left(\frac{1 \mp \mu}{\mu} f \right)^2.
 \end{aligned}$$

Wir sehen: für die durch (49) gegebenen Kugeln fällt der Mittelpunkt stets in den positiven (negativen) Knotenpunkt.

Dies ist übrigens der einzige Fall, wo alle vier Flächen einander ähnlich sind.

Unter die durch (49) dargestellten Flächen fällt auch der bekannte Fall der Abbildung der aplanatischen Flächen durch Brechung an einer einzelnen Kugelfläche. Lassen wir das obere

Vorzeichen in (49) gelten und setzen $\mu = \frac{n'}{n}$, so finden wir

$$\begin{aligned}
 (z_1 - f')^2 + h_1^2 &= \left(\frac{n - n'}{n'} f' \right)^2 \\
 (z_2 - f')^2 + h_2^2 &= \left(\frac{n' - n}{n} f' \right)^2 \\
 (z'_1 - f)^2 + h_1'^2 &= \left(\frac{n - n'}{n'} f' \right)^2 \\
 (z'_2 - f)^2 + h_2'^2 &= \left(\frac{n' - n}{n} f' \frac{n^2}{n'^2} \right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Für $\tau \rightarrow 0$ entarten zwei der durch (45) gegebenen Flächen in Ebenen.

Wir finden

$$\begin{aligned}
 (z_1 - f' \mu)^2 + h_1^2 (1 - \mu^2) &= \left(\frac{1 - \mu^2}{\mu} f' \right)^2 \\
 z_2 &= f' \mu \\
 z'_1 &= f \mu \\
 (z'_2 - f \mu)^2 + h_2'^2 (1 - \mu^2) &= \left(\frac{1 - \mu^2}{\mu} f \right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Ebenso entarten für $\tau \rightarrow \infty$ die beiden anderen Flächen in Ebenen

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{f'}{\mu} \\
 \left(z_2 - \frac{f'}{\mu} \right)^2 + h_2^2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) &= \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu} f' \right)^2 \\
 \left(z'_1 - \frac{f}{\mu} \right)^2 + h_1'^2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) &= \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu} f \right)^2 \\
 z'_2 &= \frac{f}{\mu}.
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Zu beachten ist, daß von den Flächen zweiter Ordnung jeweils

nur der Zweig eine Rolle spielt, der durch die Punkte (38) hindurchgeht! Wir bestimmen jetzt unter Berücksichtigung dieser Tatsache die Scheitelkrümmung unserer Flächen. Wir finden

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{1}{n R_1} &= -\frac{1}{n f'} \frac{\mu}{1-\tau}, & \frac{1}{n' R'_1} &= -\frac{1}{n f'} \frac{\tau}{\mu} \frac{1}{1-\tau}, \\ \frac{1}{n R_2} &= \frac{1}{n f'} \frac{\tau}{\mu} \frac{1}{1-\tau}, & \frac{1}{n' R'_2} &= \frac{1}{n f'} \frac{\mu}{1-\tau}. \end{aligned}$$

Demnach ist die Krümmung der zweiten Bildfläche der der ersten Dingfläche entgegengesetzt gerichtet, ebenso die Krümmung der ersten Bildfläche der Krümmung der zweiten Dingfläche. Beide Dingflächen sind für positives τ in entgegengesetzter, für negatives in gleicher Richtung gekrümmt, ebenso die Bildflächen.

Aus (53) folgt

$$(54) \quad P = \frac{1}{n' R'_1} - \frac{1}{n R_1} = \frac{1}{n' R'_2} - \frac{1}{n R_2} = \frac{1}{n f'} \frac{\mu^2 - \tau}{\mu(1-\tau)}.$$

Gleichung (54) bedeutet insofern eine gewisse Kontrolle unserer Rechnung, als nach Petzval die linke Seite unserer Gleichung gleich der „Petzvalsumme“ des abbildenden Systems sein muß, also eine Systemkonstante. Die „Petzvalsumme“ verschwindet, d.h. die Petzvalbedingung ist erfüllt für

$$(55) \quad \mu^2 = \tau.$$

Dieser Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß die axiale Dehnung gleich ist der Gaußischen Axialvergrößerung α' im Scheitel. Ausdrücklich sei jedoch hier nochmal darauf hingewiesen, daß in Nichtknotenpunktsystemen bei Abbildung zweier Flächen es sich als unmöglich erweist, daß eine im Endlichen liegende Ebene scharf und eben abgebildet wird; vielmehr können nur (Gleichung 51/2) die erste Ding- und die zweite Bildfläche oder die zweite Ding- und die erste Bildfläche eben sein. In dem durch (55) gekennzeichneten Fall gibt (53) übrigens

$$(56) \quad \frac{1}{n R_1} = \frac{1}{n' R'_1} = -\frac{1}{n R_2} = -\frac{1}{n' R'_2} = -\frac{1}{n f'} \frac{\mu}{1-\mu^2}, \text{ also } \begin{matrix} R_1 = -R_2 \\ R'_1 = -R'_2. \end{matrix}$$

Einen Sonderfall wollen wir noch besonders hervorheben. Wir wollen untersuchen, ob es möglich ist, daß in einem nicht brennpunktlosen System die beiden Dingflächen und daher auch die beiden Bildflächen durch denselben Punkt der Achse gehen. Dann muß, wegen Satz (2)

$$(57) \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu = \pm 1$$

werden; d.h. beide Flächen müssen durch einen der Knotenpunkte gehen. Setzen wir das in (41) ein, so erhält man für $\tau^2 \neq 1$:

$$(58) \quad \begin{aligned} (z_1 \mp f')^2 &= 0, \\ (z_2 \mp f')^2 &= 0, \end{aligned}$$

ebenso bildseitig. Beide Ding- und beide Bildflächen fallen mit den Knotenebenen zusammen. Die Betrachtung des Eikonals wird zeigen, daß dies in einem nicht brennpunktlosen System nicht vorkommt.

Besonders zu betrachten ist (da $\tau = +1$ von vornherein fortfällt) $\tau = -1$. Gleichung (44) lehrt uns, daß in diesem Fall die erste und zweite Dingfläche, wie die erste und zweite Bildfläche, zusammenfallen und übergehen in das doppelt abgebildete Drehparaboloid

$$(59) \quad \begin{aligned} 2(\mp 2f')(z \mp f') &= h^2 \\ 2(\mp 2f)(z \mp f) &= h'^2, \end{aligned}$$

dessen Scheitelkrümmung sich zu

$$(60) \quad \frac{1}{nR} = \mp \frac{1}{2nf'}, \quad \frac{1}{n'R'} = \pm \frac{1}{2nf'}$$

ergibt. Ebenso fallen die beiden Ding- und Bildflächen zusammen, wenn man in (49) $\mu = \mp 1$ setzt. Ding- und Bildfläche werden dann zu Kugeln durch den anderen Knotenpunkt.

Die Scheitelkrümmungen werden ebenfalls durch (60) gegeben. Auch dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem, was der eine von uns (Herzberger, Strahlenoptik S. 134, Formel (10)–(13)) für das Seidelsche Gebiet bereits nachgewiesen hat. Wir haben also den

Satz 7. In einem Nichtknotenpunktsystem können nicht zwei getrennte Flächen scharf abgebildet werden, die durch denselben Punkt der Achse gehen.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Sonderfälle zu behandeln, daß eine der Ding- und eine der Bildebenen die unendlich ferne Ebene ist.

b). *Die unendlich ferne Ebene wird scharf auf sich selbst abgebildet.*

Unsere Abbildung ist brennpunktlos. Ein Parallelstrahlenbündel beliebiger Richtung muß nach Durchgang durch das System wieder ein Parallelstrahlenbündel sein; insbesondere hängt

der Winkel σ' , den ein Bildstrahl mit der Achse bildet, nur vom Winkel des Dingstrahls mit der Achse ab. Unsere Grundformel (18) gibt

$$(61) \quad \frac{n' h'_2}{n h_2} = \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma'_1} = \mu = \text{const.}$$

oder mit Worten den Satz 3 entsprechenden

Satz 8. Wird in einem brennpunktlosen System außer der unendlich fernen Ebene noch eine endliche Fläche scharf abgebildet, so ist für die Abbildung die sagittale Vergrößerung konstant gleich der Gaußischen Vergrößerung.

Formel (18) gibt entsprechend

$$(62) \quad \frac{n' (z'_2 - z_2^0)}{n (z_2 - z_2^0)} = \frac{\cos \sigma_1 - 1}{\cos \sigma'_1 - 1} = \tau = \text{const.},$$

entsprechend zu (36). Gleichung (62) und (61) sind aber nur für $\sigma_1 = \sigma'_1$ miteinander verträglich, dies führt auf ein Knotenpunktsystem. Der einzige Fall, wo außerdem beide Gleichungen (18) zu erfüllen sind, ist:

$$(63) \quad \begin{aligned} n' z'_2 &= n' z_2^0, \\ n z_2 &= n z_2^0, \end{aligned}$$

d.h. der Fall, daß die im Endlichen gelegene Ding-, wie Bildfläche eben sind.

Satz 9. Werden in einem brennpunktlosen Nichtknotenpunktsystem die unendlich ferne Ebene und eine endliche Fläche scharf abgebildet, so müssen Ding- und Bildfläche eben sein.

Ein Beispiel für eine solche Abbildung bietet die Brechung an einer ebenen Fläche. Hier wird die unendlich ferne Ebene scharf abgebildet, und die brechende Ebene selbst. Wir haben

$$\mu = \frac{n'}{n}.$$

Wir machen noch auf Gleichung (61) aufmerksam. Da ein- und austretende Strahlen der Sinusbedingung genügen, können sie nicht gleichzeitig der Airyschen Tangentenbedingung genügen.

Die Abbildung der unendlich fernen Ebene erfolgt also in diesem Fall nicht verzeichnungsfrei.

c). Erste Dingfläche und zweite Bildfläche im Unendlichen.

Sind die erste Dingfläche und die zweite Bildfläche die unendlich fernen Ebenen, dann müssen die Strahlen einer festen Richtung ($\varphi_1 \sigma_1$) sich in einem festen Punkt (φ_1, h'_1) der Bildfläche treffen. h'_1 ist also eine Funktion allein von σ_1 , ebenso muß h_2

eine Funktion von σ'_2 allein sein. Wir haben die Grundgleichungen (25)

$$(64) \quad \begin{aligned} \frac{n' h'_1}{\sin \sigma_1} &= -\frac{n h_2}{\sin \sigma'_2} = n' f = -n f', \\ \frac{n' (z'_1 - z_1^0)}{\cos \sigma_1 - 1} &= -\frac{n (z_2 - z_2^0)}{\cos \sigma'_2 - 1} = -n' g = n g'. \end{aligned}$$

Nimmt man wieder beiderseits die Brennpunkte als Koordinatenanfang, so ist $z_2^0 = z_1^0 = 0$. Durch Elimination von σ_1, σ'_2 erhält man die Gleichungen der Flächen

$$(65) \quad \begin{aligned} (z_2 - g')^2 + \left(\frac{g'}{f'}\right)^2 h_2^2 &= g'^2, \\ (z'_1 - g)^2 + \left(\frac{g}{f}\right)^2 h_1^2 &= g^2. \end{aligned}$$

Satz 10. Werden in einem nicht brennpunktlosen System die unendlich fernen Ebenen scharf abgebildet, so sind die ihnen entsprechenden Flächen Ellipsoide durch den Brennpunkt, deren laterale Achsen gleich den Brennweiten im anderen Raum sind. Für $g=f$ gehen die Ellipsoide in Kugeln, für $g=0$ in Ebenen durch die Brennpunkte über.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß obige Ellipsoide auch in den Flächen von Formel (45) enthalten sind. Man muß nur dort

$$(66) \quad \tau = \frac{g}{f} \mu = \frac{g'}{f'} \mu$$

einführen, und hinterher μ gleich Null setzen.

Formel (65) gibt auch eine Bestätigung eines von Bruns nur für symmetrische Instrumente ausgesprochenen Satzes (Das Eikonol S. 378), daß in einem solchen System zwar eine scharfe und sogar ebene Abbildung ($g=0$!) der unendlich fernen Ebene möglich ist, aber keine verzeichnungsfreie.

§ 3.

Das Eikonol für scharfe Abbildung zweier Flächen.

Wir haben in § 2 folgendes festgestellt:

Bildet ein optisches System zwei Flächen scharf ab, so sind beide Ding- und beide Bildflächen von der in diesem Abschnitt beschriebenen Gestalt, und es müssen die dort aufgeführten Beziehungen zwischen ihnen bestehen. Wir haben bisher noch keine Gewißheit, daß wirklich eine Abbildung besteht, die zwei beliebige nach § 2 zulässige Dingflächen auf die entsprechenden

Bildflächen scharf abbildet. Es wird die Aufgabe dieses Abschnitts sein, für alle diese Abbildungen ein Eikonal zu finden, d.h. eine Funktion der Koordinaten, die eine optisch mögliche Abbildung der Lichtstrahlen gewährleistet, die obigen Forderungen genügt. Beginnen wir zunächst mit dem „trivialen“ Fall des Knotenpunktsystems. Wir legen den Koordinatenanfang ding- und bildseitig in je zwei konjugierte Achsenpunkte. Seien x, y , bzw. x', y' die Koordinaten der Durchstoßungspunkte mit den Ebenen $z=0$, $z'=0$, ξ, η, ζ ; ξ', η', ζ' die Richtungskosinus eines Dingstrahls und des zugehörigen Bildstrahls, und führen wir zur Abkürzung die Größen

$$(64) \quad \begin{aligned} a &= x^2 + y^2 \\ b &= 2n'(x\xi' + y\eta') \\ c &= n'^2(\xi'^2 + \eta'^2) \end{aligned}$$

ein. Dann ist das gemischte Eikonal V (der Lichtweg vom Durchstoßungspunkt mit der Ebene bis zum Fußpunkt des vom bildseitigen Ursprung auf den Bildstrahl gefälltten Lotes) eine Funktion von a, b, c allein, und es bestehen nach Bruns (s. z.B. Herzberger, Strahlenoptik S. 59) die Gleichungen:

$$(65) \quad \begin{aligned} n\xi &= -2V_a x - 2V_b n'\xi', & n\eta &= -2V_a y - 2V_b n'\eta', \\ x' &= -2V_b x - 2V_c n'\xi', & y' &= -2V_b y - 2V_c n'\eta'. \end{aligned}$$

Das positive Knotenpunktsystem ist dann (jeder Punkt positiver Knotenpunkt) gekennzeichnet durch

$$(66) \quad \left. \begin{aligned} \xi &= \xi', & nx &= n'x' \\ \eta &= \eta', & ny &= n'y' \end{aligned} \right\} \text{ also } \begin{aligned} 2V_a &= 2V_c = 0 \\ 2V_b &= -\frac{n}{n'}, \end{aligned}$$

das gibt

$$(67) \quad V = -\frac{1}{2} \frac{n}{n'} b + \text{const.}$$

Ebenso führt ein negatives Knotenpunktsystem auf das Eikonal

$$(68) \quad V = \frac{1}{2} \frac{n}{n'} b + \text{const.}$$

und die Brunsischen Gleichungen

$$(69) \quad \begin{aligned} \xi &= -\xi', & n'x' &= -nx, \\ \eta &= -\eta', & n'y' &= -ny. \end{aligned}$$

Einen Sonderfall des negativen Knotenpunktsystems bietet

die Spiegelung an einer Ebene ($n' = -n$). Wir haben

$$(70) \quad V = \frac{b}{2} + \text{const.}, \quad \begin{aligned} \xi &= -\xi', & x' &= x, \\ \eta &= -\eta', & y' &= y. \end{aligned}$$

Ebenso einfach können wir den Fall einer brennpunktlosen Abbildung behandeln, in dem außer der unendlich fernen Ebene noch eine endliche Fläche (die dann wie ihre Bildfläche nach Satz 9 eben sein muß) scharf abgebildet wird. Sei die zugehörige Vergrößerung $\beta' = \frac{n}{n'}\mu$, und legen wir den Koordinatenursprung ding- wie bildseitig in den Achsenpunkt der scharf abgebildeten endlichen Ebene, so folgt für die Brunsischen Gleichungen aus (61)

$$(71) \quad \left. \begin{aligned} x' &= \beta' x \\ n\xi &= \beta' n' \xi' \end{aligned} \right\} \text{ also } \begin{aligned} V_a &= V_c = 0 \\ V_b &= -\frac{1}{2}\beta', \end{aligned}$$

das gibt

$$(72) \quad V = -\frac{1}{2}\beta' b + \text{const.}$$

Der praktisch wichtige Sonderfall des Eikonals für Brechung an einer Ebene folgt hieraus für $\beta' = 1$

$$(73) \quad \begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}b \\ x' &= x, & n\xi &= n'\xi' \\ y' &= y, & n\eta &= n'\eta'. \end{aligned}$$

Wenn wir von diesen, leicht gesondert zu behandelnden Fällen absehen, kann die zu betrachtende Abbildung nur nichtbrennpunktlos sein. Wir müssen also imstande sein, für diese Abbildung das Winkeleikonal W zu berechnen. Das Winkeleikonal W (der Lichtweg zwischen den Fußpunkten der vom Ursprung auf Ding- und Bildstrahl gefälltten Lote) ist allein eine Funktion der Strahlrichtungen. Er hängt in rotationssymmetrischen Systemen nur von den drei Größen

$$(74) \quad \begin{aligned} a &= n^2(\xi^2 + \eta^2), & \text{also } n\xi &= \sqrt{n^2 - a}, \\ b &= 2nn'(\xi\xi' + \eta\eta'), \\ c &= n'^2(\xi'^2 + \eta'^2), & \text{also } n'\xi' &= \sqrt{n'^2 - c} \end{aligned}$$

ab. Die Brunsischen Gleichungen schreiben sich

$$(75) \quad \begin{aligned} x &= 2W_a n\xi + 2W_b n'\xi' \\ x' &= -2W_b n\xi - 2W_c n'\xi', \end{aligned}$$

ebenso für y, y' .

Wir nehmen jetzt zunächst an, beide Dingflächen (und beide Bildflächen) liegen im Endlichen. Dann hat nach dem Satz von Fermat der Lichtweg zwischen einem Dingpunkt der ersten Fläche und seinem Bildpunkt auf allen verbindenden Strahlen den gleichen Wert. Wir können schreiben

$$(76) \quad \begin{aligned} (1, 1') &= (1, 2) + (2, 2') + (2', 1') = \\ &= (1, 2^a) + (2^a, 2^{a'}) + (2^{a'}, 1'). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(77) \quad \begin{aligned} (1, 2) &= n \sqrt{h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2}, \\ (1', 2') &= n' \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 - 2h_1'h_2' \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2' - z_1')^2}. \end{aligned}$$

Unsere Grundformel (11) lehrt uns

$$(78) \quad \begin{aligned} (1, 2) &= (1', 2'), \\ (1, 2^a) &= (1', 2^{a'}), \end{aligned}$$

d.h.

$$(79) \quad (2, 2') = (2^a, 2^{a'}) = (1, 1'),$$

oder in Worten

Satz 11. Werden zwei (endliche) Flächen durch ein optisches System scharf abgebildet, so hat der Lichtweg zwischen erster Ding- und erster Bildfläche auf allen Strahlen einen konstanten Wert, und dieser ist numerisch gleich dem Lichtweg zwischen einem beliebigen Dingpunkt der zweiten Fläche und seinem Bildpunkt.

Das Winkeleikonal ist dann der Lichtweg zwischen den Fußpunkten der vom jeweiligen Ursprung auf die Strahlen gefällten Lote. Seien x, y, z und x', y', z' Koordinaten eines Punktes der ersten Dingfläche und seines Bildpunktes, der auf der ersten Bildfläche liegen muß, l die Länge des nach Satz 11 konstanten Lichtweges zwischen beiden, dann ergibt sich

$$(80) \quad W = l + n(x\xi + y\eta + z\zeta) - n'(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta').$$

Wir legen den Ursprung ding- wie bildseitig in den Brennpunkt, dann haben wir nach (39)

$$(81) \quad \begin{aligned} nx &= nh_1 \cos \varphi_1, & n'x' &= \mu nh_1 \cos \varphi_1, \\ ny &= nh_1 \sin \varphi_1, & n'y' &= \mu nh_1 \sin \varphi_1, \\ nz &= nz_1, & n'z' &= \tau nz_1 - \frac{nf'}{\mu}(\mu^2 + \tau). \end{aligned}$$

Unser Winkeleikonal schreibt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 (82) \quad & \xi - \mu \xi' = \mathfrak{L} \\
 & \eta - \mu \eta' = \mathfrak{M} \\
 & \zeta - \tau \zeta' = \mathfrak{N}
 \end{aligned}$$

setzen:

$$\begin{aligned}
 (83) \quad W = & l + n h_1 (\mathfrak{L} \cos \varphi_1 + \mathfrak{M} \sin \varphi_1) + n z_1 \mathfrak{N} + \\
 & + \frac{n f'}{\mu} (\mu^2 + \tau) \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}}.
 \end{aligned}$$

Es bleibt uns noch die Aufgabe, in (83) die Größen h_1, φ_1, z_1 durch a, b, c und die drei Parameter τ, μ, f' auszudrücken⁵⁾.

Zu diesem Zwecke beachten wir folgendes:

Da die erste Dingfläche scharf abgebildet werden soll, muß für alle durch einen ihrer Punkte gehenden Strahlen die Kosinusbedingung sowohl in meridionaler, wie sagittaler Richtung erfüllt sein. Wegen Satz (11) ist aber für alle Richtungen $dE = 0$, wir erhalten also zwei Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
 (84) \quad n' \cos \varepsilon' ds' - n \cos \varepsilon ds = 0 = & n' (\xi' dx' + \eta' dy' + \zeta' dz') - \\
 & - n (\xi dx + \eta dy + \zeta dz).
 \end{aligned}$$

Differenzieren wir (81) nach den beiden Parametern h und φ und beachten (82), dann gibt (84) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (85) \quad & (\mathfrak{L} \cos \varphi_1 + \mathfrak{M} \sin \varphi_1) dh_1 + \mathfrak{N} dz_1 = 0, \\
 & \mathfrak{L} \sin \varphi_1 - \mathfrak{M} \cos \varphi_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung unserer Dingfläche (45) schreiben wir in der Form

$$(86) \quad (z_1 - s)^2 + \lambda h_1^2 = m^2$$

mit

$$\begin{aligned}
 (87) \quad s = & \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} f', \\
 \lambda = & \frac{1 - \mu^2}{1 - \tau^2}, \\
 m = & \frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} f'.
 \end{aligned}$$

⁵⁾ Die folgende Herleitung des Eikonals ist im Grunde von Bruns angegeben (sogar in dem allgemeinen Fall, daß der Lichtweg zwischen Ding- und Bildfläche noch eine Funktion des Dingpunktes, also nicht konstant ist), vergl. die Merkregel CZAPSKI S. 230. Es lag uns daran, darauf hinzuweisen, daß diese Merkrege sich aus dem Kosinussatz ableiten läßt.

Differentiation von (86) gibt

$$(88) \quad (z_1 - s) dz_1 + \lambda h_1 dh_1 = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung (85) läßt sich ableiten:

$$\mathfrak{L} \cos \varphi_1 + \mathfrak{M} \sin \varphi_1 = \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2}.$$

Dann folgt aus der ersten Gleichung (85), (86) und (88)

$$(89) \quad \begin{aligned} z_1 &= s + \frac{m \mathfrak{N} \lambda}{\sqrt{\mathfrak{N}^2 \lambda^2 + \lambda(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2)}}, \\ h_1 &= \frac{m \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2}}{\sqrt{\mathfrak{N}^2 \lambda^2 + \lambda(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2)}}. \end{aligned}$$

Setzen wir das in (83) ein, so erhalten wir

$$(90) \quad \begin{aligned} W &= l + \frac{nm}{\lambda} \sqrt{\lambda(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2) + \lambda^2 \mathfrak{N}^2} + \\ &\quad + ns \mathfrak{N} + \frac{nf'}{\mu} (\mu^2 + \tau) \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Abkürzungen λ , s und m durch ihre Werte aus (87) ersetzen:

$$(91) \quad \begin{aligned} W &= l + \frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} nf' \sqrt{\mathfrak{N}^2 + \frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2)} + \\ &\quad + nf' \frac{\mu^2 + \tau}{\mu(1 + \tau)} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Gleichung (91) gibt das Winkeleikonal, wenn der Bezugspunkt ding- und bildseitig im Brennpunkt liegt. Schalten wir den Fall des Paraboloids ($\tau = -1$), für den (91) sowieso unbestimmt wird, aus, so können wir den Ursprung auch in den Mittelpunkt legen. Dann gibt Gleichung (91)

$$(92) \quad W = l + \frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} nf' \sqrt{\mathfrak{N}^2 + \frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2)}.$$

Unter Beachtung von (82) und (74) finden wir schließlich aus (92)

$$(93) \quad \begin{aligned} W &= l + \frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} nf' \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{a}{n^2} - \mu \frac{b}{nn'} + \mu^2 \frac{c}{n'^2} \right) + \left(\sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} - \tau \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right)^2} = \\ &= l + \frac{1 - \mu^2}{\mu(1 + \tau)} nf' \sqrt{1 + \tau^2 + \frac{\mu^2 - \tau^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{a}{n^2} + \frac{c}{n'^2} \right) - \frac{1 - \tau^2}{1 - \mu^2} \mu \frac{b}{nn'} - \frac{2\tau}{nn'} \sqrt{(n^2 - a)(n'^2 - c)}}. \end{aligned}$$

Wir haben zu beachten, daß die Wurzel in (93) ein ganz bestimmtes Vorzeichen hat. Setzen wir in (93) $a = b = c = 0$, so muß W wegen (80) in

$$(94) \quad W_{a=b=c=0} = l + nz_1^0 - n'z_1^{0'} = l + \frac{1-\mu^2}{\mu} \frac{1-\tau}{1+\tau} nf'$$

übergehen. (Man beachte die Bemerkungen über die Zusammengehörigkeit der Zweige bei Gleichung (45)).

Daß unser durch (93) dargestelltes Eikonal die Aufgabe erfüllt, unsere erste Dingfläche auf die zugehörige erste Bildfläche scharf abzubilden, folgt aus der Herleitung, insbesondere aus Gleichung (80). Wir müssen nachweisen, daß auch die zweite Fläche auf die zugehörige Bildfläche scharf abgebildet wird. Man erkennt das am schnellsten wie folgt. Die Gleichungen der zweiten Ding- und Bildfläche entstehen aus denen der ersten, indem man überall μ durch $\frac{1}{\mu}$, τ durch $\frac{1}{\tau}$ ersetzt. Haben wir nachgewiesen, daß W sich nicht ändert, wenn wir in ihm μ durch $\frac{1}{\mu}$, τ durch $\frac{1}{\tau}$ ersetzen, so ist unsere Aufgabe erfüllt. Das gelingt am leichtesten bei der Gleichung (93₂), wenn wir nur beachten, daß bei der oben gegebenen Form der Darstellung im zweiten Fall die Wurzel das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten muß.

Darmit haben wir unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst. Es bleibt uns nur übrig, einige Sonderfälle zu betrachten, und insbesondere zu untersuchen, was aus dem Eikonal wird, wenn die in (92) gegebene Funktion aus irgendwelchen Gründen eine besondere Form annimmt.

Wir betrachten zunächst den Sonderfall, daß alle vier Flächen Kugeln sind. Dann ist τ gleich $+\mu$ oder $-\mu$. Wir behandeln den ersten Fall und finden, wenn der Ursprung jeweils im Mittelpunkt liegt:

$$\begin{aligned} W &= l + \frac{1-\mu}{\mu} nf' \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = \\ (95) \quad &= l + \frac{1-\mu}{\mu} nf' \sqrt{\frac{a}{n^2} - \mu \frac{b}{nn'} + \mu^2 \frac{c}{n'^2} + \left(\sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} - \mu \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right)^2} = \\ &= l + \frac{1-\mu}{\mu} nf' \sqrt{1 + \mu^2 - \frac{\mu}{nn'} b - 2 \frac{\mu}{nn'} \sqrt{(n^2 - a)(n'^2 - c)}}. \end{aligned}$$

Insbesondere bekommen wir für die Brechung an einer Kugel-
fläche $\left(\mu = \frac{n'}{n} \right)$

$$(96) \quad W = \frac{n-n'}{n'} f' \sqrt{n^2 + n'^2 - b - 2 \sqrt{(n^2 - a)(n'^2 - c)}}$$

in Übereinstimmung mit Strahlenoptik S. 177 (16).

Die zweite Ding- und die erste Bildfläche werden Ebenen für $\tau = 0$. Die Mittelpunktsgleichung für W gibt dann

$$(97) \quad W = l + \frac{1-\mu^2}{\mu} n f' \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \left(\frac{a}{n^2} + \frac{c}{n'^2} \right) - \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{b}{n n'}}.$$

Die erste Ding- und die zweite Bildfläche entarten in Ebenen für $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$. Das gibt

$$(98) \quad W = l + \frac{1-\mu^2}{\mu} n f' \sqrt{1 - \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{a}{n^2} + \frac{c}{n'^2} \right) + \frac{\mu}{1-\mu^2} \frac{b}{n n'}}.$$

Daß für $\tau = 1$ kein vernünftiges Eikonal besteht, erkennt man aus Gleichung (93₂), da in diesem Fall W von b unabhängig wäre, was bekanntlich verboten ist (s. Strahlenoptik S. 178 (25)).

Den Fall $\tau = -1$ müssen wir noch gesondert behandeln. Hier können wir natürlich nicht von der Mittelpunktsgleichung ausgehen, sondern müssen auf die Brennpunktsgleichung (91) zurückgreifen. Gleichung (91) gibt einen unbestimmten Ausdruck.

Wir finden in üblicher Weise

$$(99) \quad \begin{aligned} W &= l + n f' \left[\frac{\frac{1}{\mu} \frac{a}{n^2} - \frac{b}{n n'} + \mu \frac{c}{n'^2}}{\sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}}} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} + \mu \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right] = \\ &= l + \frac{f' n n' \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) - b + \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \sqrt{(n^2 - a)(n'^2 - c)}}{n' \left(\sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right)}. \end{aligned}$$

Der Fall, daß ein Paraboloid durch ein optisches System doppelt abgebildet wird, führt ($\mu = \pm 1$, $\tau = -1$) auf die Eikonale

$$(100) \quad W = l - n f' \frac{\frac{b}{n n'} \mp 2 \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n^2} \right) \left(1 - \frac{c}{n'^2} \right)} \right]}{\sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}}}.$$

Dagegen würde im Falle $\mu = \pm 1$, $\tau \neq 1$ für W eine Konstante herauskommen. Man kann dies auch nachprüfen, indem man das Winkeleikonal für die scharfe, ebene und ähnliche Abbildung der

Knotenebene unter Annahme eines festen Lichtwegs zwischen Ding- und Bildebene nach dem Verfahren von S. [21—22] 468—469 abzuleiten sucht; man käme auf $W = l$, d.h. das Winkeleikonal ist unbrauchbar, die Abbildung brennpunktlos. Leitet man das gemischte Eikonal ab, so ergibt sich $V = -\frac{1}{2} \frac{n}{n'} b + \text{const.}$, wie (67), d.h. wir haben ein Knotenpunktsystem.

Es bleibt zum Schluß nur noch die Aufgabe, das Eikonal zu bestimmen für den Fall, daß beide unendlich fernen Ebenen scharf abgebildet werden.

Dieser Fall bedarf wieder einer gesonderten Überlegung, da der in (91) mit l bezeichnete konstante Lichtweg unendlich groß wird. Wir legen den Koordinatenanfang ding- und bildseitig in den Brennpunkt.

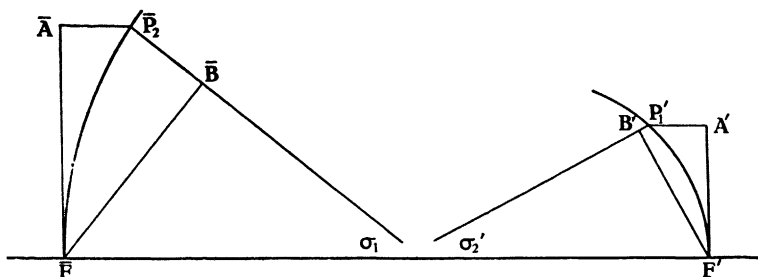


Abb. 3.

Die Flächen S_1P_1 und $S_2'P_2'$ liegen im Unendlichen.

Wir benutzen Formeln (19), (22). Für einen beliebigen Strahl, der die beiden Brennflächen in $\bar{P}_2$ und P_1' durchstoße, gilt (Abb. 3).

$$(101) \quad \begin{aligned} W &= (\bar{B}, B') = (\bar{B}, \bar{P}_2) + (\bar{P}_2, B') = (\bar{B}, \bar{P}_2) + (\bar{P}_2, F') = \\ &= (\bar{B}, \bar{P}_2) + (\bar{A}, F') - (\bar{A}, \bar{P}_2) = (\bar{B}, \bar{P}_2) + (\bar{F}, F') - (\bar{A}, \bar{P}_2), \end{aligned}$$

also, wenn wir für den konstanten Wert des Lichtwegs $\bar{F}F'$ den Wert k einführen,

$$(102) \quad W = k + (\bar{B}, \bar{P}_2) - (\bar{A}, \bar{P}_2) = k - (B', P_1') + (A', P_1')$$

oder, wenn wir zu Koordinaten übergehen,

$$(103) \quad \begin{aligned} W &= k + n(x\xi + y\eta + z\zeta) - nz = \\ &= k - n'(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta') + n'z'. \end{aligned}$$

Es gilt ferner (s. Formel (25))

$$(104) \quad \begin{aligned} x &= f'\xi', & x' &= f\xi, \\ y &= f'\eta', & y' &= f\eta. \end{aligned}$$

Das gibt in 103 eingesetzt

$$\begin{aligned}
 (105) \quad W &= k + n f' \frac{b}{2n n'} - n z \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} \right) = \\
 &= k + n f' \frac{b}{2n n'} + n' z' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Gleichung (25₂) lehrt schließlich bei unserer Koordinatenwahl

$$\begin{aligned}
 (106) \quad n' z'_1 &= -n g' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} \right) \\
 n z_2 &= n g' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right),
 \end{aligned}$$

so daß unser Endergebnis lautet

$$\begin{aligned}
 (107) \quad W &= k + n f' \frac{b}{2n n'} - n g' \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{n^2}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{n'^2}} \right), \\
 n f' &= -n' f, \\
 n g' &= -n' g.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir für alle von uns in § 2 betrachteten Abbildungen Eikonale gefunden, die eine entsprechende optische Abbildung vermitteln.

§ 4.

Ausblicke.

Wir bemerken zunächst, daß es unmöglich ist, in Nichtknotenpunktsystemen drei Flächen scharf abzubilden. Das folgt zunächst aus Gleichung (28₃) bzw. (27₂). Wir hätten dann

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_3},$$

also

$$(108) \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \pm 1,$$

Satz 12. In einem Nichtknotenpunktsystem können nicht drei Flächen scharf abgebildet werden.

Die nächste Frage, die wir stellen, lautet:

Wann kann noch ein dritter Achsenpunkt scharf abgebildet werden?

Möge dieser Achsenpunkt dingseitig in der Entfernung t , bildseitig in der Entfernung t' vom Mittelpunkt liegen. Seien z_1, z_2, z'_1, z'_2 die Koordinaten vom Mittelpunkt aus gemessen, dann gilt

$$(109) \quad \begin{aligned} n' h'_1 &= \mu n h_1, & n' z'_1 &= \tau n z_1, \\ n' h'_2 &= \frac{1}{\mu} n h_2, & n' z'_2 &= \frac{1}{\tau} n z_2. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Strahlen durch unseren Achsenpunkt müssen den Beziehungen genügen:

$$(110) \quad \frac{n' z'_1 - n' t'}{n' z'_2 - n' t'} = \frac{n' h'_1}{n' h'_2} = \mu^2 \frac{n h_1}{n h_2} = \frac{\tau n z_1 - n' t'}{\frac{n z_2}{\tau} - n' t'},$$

$$\frac{n z_1 - n t}{n z_2 - n t} = \frac{n h_1}{n h_2}.$$

Elimination von h_1 und h_2 gibt die folgende Gleichung, die für alle z_1, z_2 gelten muß

$$(111) \quad (\tau^2 - \mu^2) n^2 z_1 z_2 - n z_1 (\tau^2 n t - \mu^2 \tau n' t') - n z_2 (\tau n' t' - \mu^2 n t) + \tau n t n' t' (1 - \mu^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist in z_1, z_2 identisch erfüllt nur für

$$(112) \quad \begin{aligned} \tau &= \pm \mu, \\ t &= t' = 0. \end{aligned}$$

Satz 13. In einem Nichtknotenpunktsystem, das zwei Flächen scharf abbildet, ist es nicht möglich, daß ein weiterer Achsenpunkt scharf abgebildet wird; es sei denn, alle beiden Dingflächen sind konzentrische Kugeln. Deren Mittelpunkt wird scharf abgebildet, und zwar so, daß für $\tau = \mu$ Ding- und Bildstrahl parallel, im anderen Fall spiegelbildlich liegen. Der Mittelpunkt ist wegen

$$(113) \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{h_1}{z_1} = \frac{h_2}{z_2} = \pm \frac{h'_1}{z'_1} = \pm \frac{h'_2}{z'_2} = \pm \operatorname{tg} \sigma'$$

$$\sigma = \pm \sigma'$$

gleichzeitig aplanatischer Punkt, Hockinscher Punkt und orthoskopische Blende.

Da auf allen Strahlen durch den Mittelpunkt drei stigmatisch abgebildete Punkte liegen (die Schnittpunkte mit den beiden Dingflächen und der Mittelpunkt), so ist dieser gleichzeitig raumanastigmatische Blende nach W. Merté. (Vergl. hierzu die entsprechenden für das Seidelsche Gebiet [Strahlenoptik S. 124, 135, 139] abgeleiteten Sätze.)

Zum Schluß sei noch auf folgendes aufmerksam gemacht.

Werden zwei außer der Achse gelegene Punkte, die ein das

System durchsetzender Lichtstrahl⁶⁾ verbindet, scharf abgebildet, so wird aus Symmetriegründen je ein Parallelkreis scharf abgebildet. Man kann unter Anwendung des Verfahrens von Maxwell nachweisen, daß die beiden (sagittalen) Vergrößerungen der Bedingung

$$(114) \quad \beta'_1 = \beta'_2 = \frac{n^2}{n'^2}$$

genügen. (Verallgemeinerung des [Strahlenoptik S. 134 (7)] für das Seidelsche Gebiet als gültig nachgewiesenen Satzes). Man kann aber auch zeigen, daß der Lichtweg zwischen dem ersten Ring und Bildring entsprechend Satz 11 gleich ist dem Lichtweg zwischen zweitem Ring und Bildring.

Ferner sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß für alle in diesem Abschnitt betrachteten Systeme auf jeden Strahl zwei Stigmatpunkte liegen, (die Schnittpunkte mit beiden abgebildeten Flächen). Die Abbildung der Umgebung eines jeden Strahls ist im Sinne Gullstrands also stets orthogonal, die Nachbarstrahlen, die ding- und bildseitig den Nachbarstrahl schneiden (Stigmatstrahlen), liegen sowohl ding- wie bildseitig in zwei zueinander senkrechten Ebenen. Diese letzte Regel ist natürlich nicht auf den allein behandelten Fall der achsensymmetrischen Systeme beschränkt.

(Eingegangen den 25. Januar 1934.)

⁶⁾ Die Erfüllung dieser selbstverständlich erscheinenden Voraussetzung ist unbedingt notwendig für die Ableitung. Da die nachfolgenden Bemerkungen nicht gelten für zwei Flächenelemente, die auf derselben scharf abgebildeten Fläche liegen, kann man daraus schließen, daß die Strahlen, die derartige Punkte verbinden, optisch nicht abgebildet werden, eine Bemerkung, der noch weiter nachzugehen ist.