Bull. Soc. math. France
130 (2), 2002, p. 309–336

R-MATRICE UNIVERSELLE POUR $U_h(D(2,1,x))$ ET INVARIANT D'ENTRELACS ASSOCIÉ

PAR HENRIK THYS

RÉSUMÉ. — En utilisant la méthode du double quantique, nous construisons une R-matrice universelle pour la quantification de la superalgèbre de Lie $D(2,1,x)$. Nous utilisons ce résultat pour construire un invariant d'entrelacs et nous montrons qu'il est égal à une spécialisation du polynôme de Dubrovnik introduit par Kauffman.

ABSTRACT (*Universal R-matrix for $U_h(D(2,1,x))$ and link invariant arising from it*)
Using the quantum double method, we construct a universal R-matrix for the quantization of the Lie superalgebra $D(2,1,x)$. We use this result to construct a link invariant and show it coincides with a specialization of Kauffman's Dubrovnik polynomial.

Introduction

Les groupes quantiques introduits autour de 1983–1985 par Drinfeld et Jimbo sont des déformations à un paramètre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples complexes. Techniquement, ces « quantifications » sont des algèbres de Hopf munies de « R-matrices universelles », c'est-à-dire d'éléments qui sont responsables de l'existence de solutions de la fameuse équation de Yang-Baxter et donc de représentations des groupes de tresses.

Texte reçu le 23 avril 2001, accepté le 23 octobre 2001

HENRIK THYS, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims • *E-mail :* `thys@univ-reims.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 17B37, 81R50, 57M27, 17B25, 16W35.

Mots clefs. — Supergroupe quantique, R-matrice universelle, double quantique, invariant de nœuds, superalgèbre de Lie.

Dans les années 1970, Victor Kac [5] a étudié une généralisation naturelle des algèbres de Lie semisimples, à savoir les superalgèbres de Lie. Dans la classification qu'il en donne, il y a celles que l'on peut appeler des superalgèbres « classiques » comme $\mathrm{sl}(n|m)$ ou $\mathrm{osp}(n|m)$ et il y a des superalgèbres exceptionnelles. Parmi ces dernières, il y a une famille, notée $D(2,1,x)$ dans [5], et que nous noterons D_x, dépendant d'un paramètre continu x. La superalgèbre de Lie D_x joue un rôle particulier en physique où elle fournit la seule théorie topologique quantique des champs (TQFT) de Chern-Simons pour laquelle la théorie conforme des champs (CFT) de dimension deux correspondante a une supersymétrie $N = 4$. Elle joue aussi un rôle particulier dans les travaux récents de Pierre Vogel [18] et de Jens Lieberum [11] sur les invariants de Vassiliev.

Après les algèbres de Lie semisimples, les superalgèbres de Lie ont également été quantifiées (par Gould *et al.*, Leites *et al.*, Scheunert, etc., *cf.* par exemple [1], [3], [14], [20]). Les quantifications obtenues sont des superalgèbres de Hopf munies de bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt.

Pour ce qui est de l'existence d'une R-matrice universelle pour les supergroupes quantiques, elle a été établie pour les quantifications de toutes les superalgèbres de Lie classifiées par Kac, à l'exception précisément de D_x. Dans cette partie, nous comblons cette lacune en construisant explicitement une R-matrice universelle pour la quantification $U_h(D_x)$.

La méthode utilisée est celle du double quantique introduite par Drinfeld, méthode dont se sont servis Rosso [13], Kirillov-Reshetikhin [9] et Levendorsky-Soibelman [10] pour les groupes quantiques. Cette méthode s'étend au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué. Nous définissons des analogues des vecteurs de racines positives et négatives pour $U_h(D_x)$. Nous définissons également l'analogue de la sous-algèbre positive U_+ (resp. sous-algèbre négative U_-) engendrée par les vecteurs de racines positives (resp. négatives), et nous construisons un accouplement de Hopf entre U_+ et U_-. Ensuite, nous calculons les relations de commutation entre les vecteurs de racines ainsi que leur coproduit. Ceci nous permet de construire des bases de U_+ et U_-, duales pour l'accouplement de Hopf. Nous en déduisons une R-matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

Une R-matrice universelle sur une quantification formelle munit la catégorie des modules topologiques d'une structure de catégorie rubanée au sens de Turaev, *cf.* [6], [22]. Dans le cas qui nous intéresse, ceci fournit pour chaque $U_h(D_x)$-module un invariant d'isotopie d'entrelacs parallélisés et orientés. En prenant un supermodule de dimension six, nous obtenons un invariant $\mathcal{I}$ d'entrelacs parallélisés non orientés, à valeurs dans $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, et nous montrons qu'il est égal à une spécialisation du polynôme de Dubrovnik introduit par Kauffman.

Le plan est le suivant. Les §§1.1 et 1.3 sont consacrés à des rappels sur les superalgèbres de Hopf et sur $U_h(D_x)$. Au §1.4 nous énonçons les résultats principaux (théorèmes 1.2 et 1.3). Le §2.1 est consacré à la construction d'un accouplement de Hopf et de ses propriétés et le §2.2 à la construction d'un double quantique $\mathcal{D}$. Au §3.1 nous établissons des relations vérifiées dans $\mathcal{D}$ et nous donnons la démonstration du théorème 1.2 au §3.2. Au §4.1, nous définissons un $U_h(D_x)$-module M de rang 6 et nous calculons le tressage correspondant à l'aide du théorème 1.2. Au §4.2, nous énonçons quelques propriétés de la catégorie rubanée associée à M, et nous terminons par la démonstration du théorème 1.3 au §4.3.

Cet article est tiré du troisième chapitre de ma thèse [16]. Je tiens à remercier J. Alev qui m'a encouragé à construire un invariant de nœud à partir de la R-matrice du §4.1 et C. Kassel pour son aide.

1. Énoncé des théorèmes principaux

Dans ce paragraphe, nous commençons par quelques rappels sur les superalgèbres de Hopf, l'équation de Yang-Baxter graduée et les R-matrices universelles. Nous donnons ensuite la définition de la superalgèbre de Hopf $U_h(D_x)$ qui est la quantification de la superalgèbre de Lie D_x. Nous terminerons par l'énoncé des théorèmes principaux.

Le contenu du §1.1 se trouve dans de nombreux articles. On pourra notamment consulter [1], [3], [14], [19], [20], [21].

1.1. Superalgèbres de Hopf tressées et double quantique. — On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Un *superespace vectoriel* V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *i.e.* d'une somme directe de deux espaces vectoriels $V = V_0 \oplus V_1$, où V_0 est la partie *paire* de V et V_1 la partie *impaire*. Les éléments de V_0 (resp. de V_1) sont dits *homogènes pairs* (resp. *homogènes impairs*). Si $v \in V_0$, on pose $|v| = 0$ et si $v \in V_1$, on pose $|v| = 1$, et on appelle *degré* ces quantités. Le corps $\mathbb{C}$ est un superespace dont la partie impaire est réduite à 0. Le produit tensoriel de deux superespaces V et W est le superespace $V \otimes W = (V \otimes W)_0 \oplus (V \otimes W)_1$, où

$$(V \otimes W)_0 = (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_1 \otimes V_1), \quad (V \otimes W)_1 = (V_0 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_0).$$

Étant donné deux superespaces V et W, un *morphisme de superespaces* $f : V \to W$ est une application linéaire telle que $f(V_i) \subset W_i$. Dans toute la suite, le morphisme identité d'un superespace V sera noté id_V. La *volte* de deux superespaces V, W est le morphisme de superespaces $\tau : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ défini sur des éléments homogènes $v \in V, w \in W$ par

$$\tau(v \otimes w) = (-1)^{|v|\cdot|w|} w \otimes v.$$

(La volte sera notée τ pour tous les couples de superespaces.)

Une *superalgèbre* est un triplet (A, μ, η) où A est un superespace, $\mu : A \otimes A \to A$ et $\eta : \mathbb{C} \to A$ des morphismes de superalgèbres tels que

$$\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu) \quad \text{et} \quad \mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta) = \mathrm{id}_A\,.$$

On notera $\mu(a \otimes a') = aa'$ pour $a, a' \in A$. Étant donné deux algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B), un morphisme de superalgèbres $f : A \to B$ est un morphisme de superespaces tel que $f(aa') = f(a)f(a')$ pour tous $a, a' \in A$. Le produit tensoriel de deux superalgèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) est une superalgèbre $(A \otimes B, \mu_{A\otimes B}, \eta_{A\otimes B})$ où $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_B)$ et $\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$. On notera que pour des éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, on a

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b|\cdot|a'|} aa' \otimes bb'. \tag{1.1}$$

Une *superalgèbre de Hopf* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est la donnée d'une superalgèbre (A, μ, η), de morphismes de superalgèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ (*le coproduit*) et $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ (*la coünité*), et d'un morphisme de superespaces $S : A \to A$ (*l'antipode*) tels que

1) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta$,
2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}_A$,
3) $\mu(\mathrm{id}_A \otimes S)\Delta = \mu(S \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \eta\varepsilon$.

Rappelons que l'antipode est un anti-morphisme de superalgèbre, *i.e.*

$$S(aa') = (-1)^{|a|\cdot|a'|} S(a')S(a), \quad a, a' \in A \text{ homogènes.}$$

Une superalgèbre de Hopf A est dite *tressée* s'il existe un élément inversible $R = \sum a_i \otimes b_i \in (A \otimes A)_0$ tel que

$$R\Delta(a) = (\tau \circ \Delta)(a)R, \quad \forall\, a \in A,$$
$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)R = R_{13}R_{23}, \quad (\mathrm{id}_A \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12},$$

où

$$R_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i,$$
$$R_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i \in A \otimes A \otimes A.$$

L'élément R est appelé *R-matrice universelle* de A. Il vérifie l'équation de Yang-Baxter graduée

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Nous rappelons maintenant la construction du *double quantique* de Drinfeld. On pourra consulter [2], [7], [12], [4] pour les détails. Soient A et B deux superalgèbres de Hopf avec antipode inversible. Un *accouplement de Hopf* est un morphisme de superespaces $\varphi : B\otimes A \to \mathbb{C}$ tel que

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \varphi(bb'\otimes a) = \sum_{(a)} (-1)^{|b'|\cdot|a_{(1)}|}\varphi\big(b\otimes a_{(1)}\big)\varphi\big(b'\otimes a_{(2)}\big),\\ \varphi(b\otimes aa') = \sum_{(b)} \varphi\big(b_{(1)}\otimes a'\big)\varphi\big(b_{(2)}\otimes a\big),\\ \varphi(1\otimes a) = \varepsilon(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b\otimes 1) = \varepsilon(b),\\ \varphi(b\otimes S(a)) = \varphi(S^{-1}(b)\otimes a). \end{cases}$$

pour tous les éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, et où

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)}\otimes a_{(2)},$$

suivant la notation de Sweedler. On construit à partir de A et B une superalgèbre de Hopf $\mathcal{D}(A,B,\varphi)$ de la manière suivante :

1) $\mathcal{D}(A,B,\varphi) = A\otimes B$ comme superespace.
2) Le coproduit de $\mathcal{D}(A,B,\varphi)$ est donné par $(\mathrm{id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{id}_B)(\Delta_A\otimes\Delta_B)$.
3) La coünité est le produit tensoriel des coünités de A et B.
4) L'unité est le produit tensoriel des unités de A et B.
5) Le produit est défini par les deux formules suivantes :

$$(a\otimes 1)(1\otimes b) = a\otimes b,$$
$$(1\otimes b)(a\otimes 1) = \sum_{(a),(b)} (-1)^{\xi}\,\varphi(S(b_{(1)})\otimes a_{(1)})\varphi(b_{(3)}\otimes a_{(3)})a_{(2)}\otimes b_{(2)},$$

où $a\in A$, $b\in B$ sont homogènes et

$$\xi = |a_{(1)}|\cdot|b_{(2)}| + |a_{(2)}|\cdot|b_{(2)}| + |a_{(1)}|\cdot|b_{(3)}| + |a_{(2)}|\cdot|b_{(3)}|.$$

6) L'application $a\mapsto a\otimes 1$ (resp. $b\mapsto 1\otimes b$) de A dans $\mathcal{D}(A,B,\varphi)$ (resp. de B dans $\mathcal{D}(A,B,\varphi)$) est un morphisme de superalgèbres de Hopf injectif.

Ces deux derniers points nous permettent d'identifier a à $a\otimes 1$ pour $a\in A$ et b à $1\otimes b$ pour $b\in B$, et ainsi ab à $a\otimes b$. Soient alors $(a_{i\in I})$ (resp. $(b_{i\in I})$) une base de A (resp. B), indexées par un ensemble I, duales pour φ, *i.e.* $\varphi(b_j\otimes a_i) = \delta_{ij}$. Alors l'élément

$$\sum_i a_i\otimes b_i$$

est une R-matrice universelle pour $\mathcal{D}(A,B,\varphi)$, munissant cette superalgèbre de Hopf d'une structure de superalgèbre de Hopf tressée.

1.2. La superalgèbre de Lie D_x. — Fixons un nombre complexe $x\neq 0,-1$. Rappelons que la superalgèbre de Lie D_x introduite par Kac (*cf.* [5], où elle est notée $D(2,1,x)$) admet comme matrice de Cartan la matrice

$$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et qu'elle a trois racines simples α_1 (impaire), α_2 et α_3 (paires). Elle admet également quatre racines positives non simples qui sont $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ (impaires) et $2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ (paire). Les espaces de racine correspondant sont tous de dimension 1. Nous posons

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \beta_1 = \alpha_3, & \beta_2 = \alpha_1+\alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\ \beta_4 = 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, & \beta_5 = \alpha_1, \quad \beta_6 = \alpha_1+\alpha_2, \\ \beta_7 = \alpha_2, \end{cases}$$

et nous notons $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3$ le *réseau des racines.* Posons

$$D = (d_i)_{1\le i\le 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

de telle façon que la matrice produit

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{1\le i,j\le 3} = DA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -x \\ -1 & 2 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}$$

soit symétrique.

Nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 1.1. — *Soient m,s des entiers tels que* $1\le s<m\le 7$. *Alors*

$$n_1\beta_1+\cdots+n_s\beta_s \neq n_m\beta_m$$

pour tous les éléments $(n_1,\dots,n_s,n_m)$ *non nuls de* $\mathbb{N}^{s+1}$, *où les* β_i *sont définis par* (1.3).

1.3. La quantification $U_h(D_x)$. — Nous rappelons ici la définition de la quantification $U_h(D_x)$ de D_x, puis nous définirons les vecteurs de racine de $U_h(D_x)$, *cf.* [24]. On pourra également consulter [1], [3], [20], [21], [23] pour des généralités sur les définitions des supergroupes quantiques.

Nous noterons $\mathbb{C}[[h]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée. C'est un superespace dont la partie impaire est réduite à 0. Un $\mathbb{C}[[h]]$-module M est muni de la topologie h-adique pour laquelle une base de voisinages de 0 est donnée par la famille $(h^nM)_{n\ge 0}$. Le produit tensoriel topologique $M\widehat{\otimes}N$ de deux $\mathbb{C}[[h]]$-modules est défini par

$$M\widehat{\otimes}N = \varprojlim \big(M/h^nM \otimes_{\mathbb{C}} N/h^nN\big).$$

Nous renvoyons le lecteur à [6] pour les détails sur la topologie h-adique dans le cas général, et à [19] dans le cas supergradué. Suivant [14], nous définissons $U_h(D_x)$ comme la superalgèbre topologiquement engendrée par E_i, F_i, H_i, $i=1,2,3$ et les relations (pour tous $i,j=1,2,3$)

$$H_iH_j = H_jH_i, \tag{1.4}$$

$$[H_i, E_j] = a_{ij}E_j, \tag{1.5}$$

$$[H_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \tag{1.5'}$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$E_1^2 = F_1^2 = 0, \quad [E_2, E_3] = [F_2, F_3] = 0,$$

$$E_i^2E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_iE_1E_i + E_1E_i^2 = 0 \quad \text{si } i = 2,3,$$

$$F_i^2F_1 - (q_i + q_i^{-1})F_iF_1F_i + F_1F_i^2 = 0 \quad \text{si } i = 2,3,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, où on a posé

$$q = e^{h/2}, \quad q_i = q^{d_i}, \quad K_i = e^{hd_iH_i/2},$$

$$[a,b] = ab - (-1)^{|a|\cdot|b|}ba,$$

et où tous les générateurs H_i, E_i, F_i sont pairs, sauf E_1 et F_1 qui sont impairs. La superalgèbre $U_h(D_x)$ est une superalgèbre de Hopf topologique (*cf.* [19]) dont le coproduit Δ, la coünité ε et l'antipode S sont définis par

$$\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \quad \varepsilon(H_i) = 0, \quad S(H_i) = -H_i, \tag{1.6}$$

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \varepsilon(E_i) = 0, \quad S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \tag{1.7}$$

$$\Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \varepsilon(F_i) = 0, \quad S(F_i) = -F_iK_i, \tag{1.7'}$$

pour tout $i = 1,2,3$. Nous avons également

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}, \quad \varepsilon(K_i) = 1.$$

Nous définissons maintenant l'analogue des vecteurs de racine dans $U_h(D_x)$ en utilisant les actions adjointes ad_+ et ad_- définies pour des éléments t, y homogènes par

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_+t(y) &= \sum_{(t)}(-1)^{|y|\cdot|t_{(2)}|}\, t_{(1)}yS(t_{(2)}), \\ \mathrm{ad}_-t(y) &= \sum_{(t)}(-1)^{|y|\cdot|t_{(1)}|+|t_{(1)}|\cdot|t_{(2)}|}\, t_{(2)}yS^{-1}(t_{(1)}), \end{aligned}$$

(on pourra par exemple consulter [24]). Posons $E_{\beta_1}=E_3$, $E_{\beta_5}=E_1$, $E_{\beta_7}=E_2$, $F_{\beta_1}=F_3$, $F_{\beta_5}=F_1$, $F_{\beta_7}=F_2$ et

$$\text{(1.8)}\qquad \begin{cases} E_{\beta_2}=\mathrm{ad}_+E_{\beta_5}(E_{\beta_1}), \quad E_{\beta_6}=\mathrm{ad}_+E_{\beta_7}(E_{\beta_5}), \quad E_{\beta_3}=\mathrm{ad}_+E_{\beta_7}(E_{\beta_2}),\\ E_{\beta_4}=\mathrm{ad}_+E_{\beta_5}(E_{\beta_3}), \qquad\qquad\qquad\qquad F_{\beta_2}=\mathrm{ad}_-F_{\beta_5}(F_{\beta_1}),\\ F_{\beta_6}=\mathrm{ad}_-F_{\beta_7}(F_{\beta_5}), \quad F_{\beta_3}=\mathrm{ad}_-F_{\beta_7}(F_{\beta_2}), \quad F_{\beta_4}=\mathrm{ad}_-F_{\beta_5}(F_{\beta_3}). \end{cases}$$

1.4. Résultats principaux. — Nous énonçons maintenant nos résultats principaux. Pour des résultats analogues pour d'autres supergroupes quantiques, on consultera [1], [19], [21], [23]. Nous avons besoin des notations suivantes :

$$\text{(1.9)}\qquad \begin{cases} c_2=c_3=c_5=c_6=0, \quad c_1=2x,\ c_4=-2-2x,\ c_7=2,\\ \varphi_1=-\dfrac{1}{q^x-q^{-x}}, \quad \varphi_2=\dfrac{q^{-x}}{q-q^{-1}}, \quad \varphi_3=-\dfrac{q^{-1-x}}{q-q^{-1}},\\ \varphi_4=-q^{-2-2x}\dfrac{q^{1+x}-q^{-1-x}}{(q-q^{-1})^2}, \quad \varphi_5=-\dfrac{1}{q-q^{-1}},\\ \varphi_6=\dfrac{q^{-1}}{q-q^{-1}}, \quad \varphi_7=-\dfrac{1}{q-q^{-1}},\\ (n)_i=\begin{cases}(q^{nc_i}-1)/(q^{c_i}-1) & \text{si } c_i\neq 0,\\ 1 & \text{sinon,}\end{cases}\\ (n)_i!=(n)_i(n-1)_i\cdots(1)_i, \quad n\in\mathbb{N},\ 1\le i\le 7,\\ \exp_i(a\otimes b)=\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{a^n\otimes b^n}{(n)_i!}, \quad a,b\in U_h(D_x),\ i=1,\dots,7,\\ \exp(a\otimes b)=\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{a^n\otimes b^n}{n!}, \quad a,b\in U_h(D_x), \end{cases}$$

où $q^x=e^{xh/2}$. Pour $x\neq 0,-1$, on pose

$$\text{(1.10)}\qquad B=(b_{ij})_{1\le i,j\le 3}=-\frac{1}{2(1+x)}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2x\\ 2 & x & -x\\ 2x & -x & x \end{pmatrix}.$$

La matrice B est l'inverse de la matrice $(-a_{ij}/d_j)_{1\le i,j\le 3}$.

Théorème 1.2. — *L'élément*

$$R=\exp_1\Big(\frac{E_{\beta_1}\otimes F_{\beta_1}}{\varphi_1}\Big)\cdots\exp_7\Big(\frac{E_{\beta_7}\otimes F_{\beta_7}}{\varphi_7}\Big)\exp\Big(\frac{h}{2}\Big(\sum_{i,j}b_{ij}H_i\otimes H_j\Big)\Big) \in U_h(D_x)\widehat{\otimes}U_h(D_x)$$

est une R-matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

Nous démontrerons ce théorème au §3.2. Posons

$$R = \sum s_i \otimes t_i \quad \text{et} \quad u = \sum (-1)^{|s_i|} S(t_i) s_i.$$

Comme $R \equiv 1 \otimes 1 \mod h$, alors $uS(u) \equiv 1 \mod h$ admet une unique racine carrée $\theta \equiv 1 \mod h$. Il est bien connu que θ munit $U_h(D_x)$ d'une structure de superalgèbre rubanée, *cf.* [6], [22]. En conséquence, la catégorie des $U_h(D_x)$-modules topologiques est une catégorie rubanée au sens de Turaev (on pourra consulter [17], [7], [6] pour la définition). Pour tout couple (V, W) de $U_h(D_x)$-modules et pour tout $v \in V$, $w \in W$,

$$\text{le } \textit{tressage } c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V \text{ et le } \textit{twist } \theta_V : V \to V$$

sont donnés par les formules

$$c_{V,W}(v \otimes w) = \tau\big(R(v \otimes w)\big), \quad \theta_V(v) = \theta^{-1} v. \tag{1.11}$$

Au §4.1, nous introduirons un $U_h(D_x)$-supermodule M de rang 6. Le coloriage d'un entrelacs parallélisé et orienté L dans $\mathbb{R}^3$ par M fournit un invariant d'isotopie $\mathcal{I}_L$ de tels entrelacs. Avant d'énoncer le théorème 1.3, nous rappelons la définition du polynôme de Dubrovnik (*cf.* [8]). C'est un invariant $\Lambda(a, z)$ d'isotopie d'entrelacs parallélisés non orientés à valeurs dans $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui vérifie les relations d'écheveaux suivantes :

$$\Lambda_{\times}(a,z) - \Lambda_{\times}(a,z) \; = \; z\big(\Lambda_{\|}(a,z) - \Lambda_{\asymp}(a,z)\big),$$
$$\Lambda_{\curvearrowright}(a,z) \; = \; a\Lambda_{|}(a,z), \quad \Lambda_{\bigcirc}(a,z) = 1.$$

Ces égalités font intervenir des diagrammes planaires d'entrelacs parallélisés qui sont égaux sauf dans un disque de $\mathbb{R}^2$ où ils sont comme sur les dessins.

Théorème 1.3. — *Pour tout entrelacs parallélisé orienté L dans $\mathbb{R}^3$, l'invariant $\mathcal{I}_L$ induit par le supermodule M est lié au polynôme de Dubrovnik par*

$$\mathcal{I}_L = 2\Lambda_L(-q^{-1}, q - q^{-1}).$$

Nous démontrerons ce théorème au §4.

2. Construction d'un double quantique généralisé

Dans ce paragraphe, nous construisons une superalgèbre de Hopf $\mathcal{D}$ en utilisant la théorie du double quantique de Drinfeld (*cf.* par exemple [7], ainsi que le §1.1). Nous utilisons les résultats de [4], [19] qui démontrent la validité de cette théorie dans le cas supergradué. On pourra également consulter [15].

2.1. Préliminaires techniques. — Dans ce paragraphe, nous définissons un accouplement de Hopf et nous démontrons des lemmes techniques dont nous aurons besoin par la suite.

1) Nous définissons $\widetilde{U}_+$ comme la superalgèbre de Hopf topologiquement engendrée sur $\mathbb{C}[[h]]$ par E_i et H_i, $(i = 1, 2, 3)$ et les relations (1.4) et (1.5). Le coproduit, la coünité et l'antipode sont définis par les relations (1.6) et (1.7). Nous définissons également les éléments E_{β_i}, $i = 1, \ldots, 7$ par les relations (1.8).
2) Nous définissons $\widetilde{U}_-$ comme la superalgèbre de Hopf topologiquement engendrée par F_i et H'_i, $(i = 1, 2, 3)$ et les relations (1.4) et (1.5′), où on remplace H_i par H'_i. Le coproduit, la coünité et l'antipode sont définis par les relations (1.6) et (1.7′). Nous définissons également les éléments F_{β_i}, $i = 1, \ldots, 7$ par les relations (1.8).

Dans tout la suite, nous noterons

$$q = e^{h/2} \quad \text{et} \quad q_i = e^{hd_i/2}.$$

Remarque. — Nous utilisons les mêmes notations pour les générateurs de $U_h(D_x)$ que pour ceux de $\widetilde{U}_+$, $\widetilde{U}_-$. Cet abus est justifié *a posteriori* par la proposition 2.11.

Notons $\mathbb{C}((h))$ le corps des fractions de $\mathbb{C}[[h]]$. Pour $1 \leq i, j \leq 3$, posons :

$$\varphi(F_j \otimes E_i) = -(-1)^{|E_i|\cdot|F_j|}\frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}}, \tag{2.1}$$

$$\varphi(H'_j \otimes E_i) = \varphi(F_j \otimes H_i) = 0, \tag{2.2}$$

$$\varphi(H'_j \otimes H_i) = -\frac{2a_{ij}}{hd_j}\cdot \tag{2.3}$$

D'après le lemme 3.4 de [7] (ou [15], prop. 2.1.1) qui se généralise au cas gradué, les formules (2.1), (2.2) et (2.3) définissent un accouplement de Hopf $\varphi : \widetilde{U}_- \otimes \widetilde{U}_+ \to \mathbb{C}((h))$.

Par souci de concision, nous ne donnons pas les démonstrations des lemmes 2.1 à 2.7, *cf.* [16].

Lemme 2.1. — *L'accouplement φ vérifie, pour tous $i, j = 1, 2, 3$,*

$$\varphi(K'_j \otimes E_i) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes E_i) = \varphi(F_j \otimes K_i) = \varphi(F_j \otimes K_i^{-1}) = 0,$$
$$\varphi(K'_j \otimes K_i) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes K_i^{-1}) = q^{-\overline{a}_{ij}},$$
$$\varphi(K'_j \otimes K_i^{-1}) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes K_i) = q^{\overline{a}_{ij}}.$$

Soit $\widetilde{V}_+$ (resp. $\widetilde{V}_-$) la sous-superalgèbre de $\widetilde{U}_+$ (resp. de $\widetilde{U}_-$) engendrée par les E_i (resp. F_i), $i = 1,2,3$. La superalgèbre $\widetilde{V}_+$ (resp. $\widetilde{V}_-$) admet une Q-graduation avec E_i de degré α_i (resp. F_i de degré $-\alpha_i$). On définit également $\widetilde{U}_0$ (resp. $\widetilde{U}'_0$) comme la sous-superalgèbre de Hopf de $\widetilde{U}_+$ (resp. de $\widetilde{U}_-$) topologiquement engendrée par les H_i (resp. H'_i), $i = 1,2,3$.

LEMME 2.2. — *Pour tout $H \in \widetilde{U}_0$, $F \in \widetilde{V}_-$, $F \neq 1$, on a $\varphi(F \otimes H) = 0$. De même, pour tout $H' \in \widetilde{U}'_0$, $E \in \widetilde{V}_+$, $E \neq 1$, on a $\varphi(H' \otimes E) = 0$.*

LEMME 2.3. — *Si $E \in \widetilde{V}_+$, $F \in \widetilde{V}_-$, $H \in \widetilde{U}_0$, $H' \in \widetilde{U}'_0$, alors*
$$\varphi(FH' \otimes EH) = \varphi(F \otimes E)\varphi(H' \otimes H).$$

LEMME 2.4. — *Si $i, j_1, \ldots, j_r \in \{1,2,3\}$, et si $r \neq 1$ ou $j_1 \neq i$, alors*
$$\varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_r} \otimes E_i) = \varphi(F_i \otimes E_{j_1} \cdots E_{j_r}) = 0.$$

LEMME 2.5. — *Soient $E \in \widetilde{V}_+$ de degré $\alpha \in Q$ et $F \in \widetilde{V}_-$ de degré $\beta \in Q$. Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\varphi(F \otimes E) = 0$.*

LEMME 2.6. — *Soient $n_1, n_4, n_7 \in \mathbb{N}$ et $n_2, n_3, n_5, n_6 \in \{0,1\}$. Soit s un entier compris entre 1 et 7. Alors, si $n_i \neq 0$ pour $1 \leq i < s$ ou $n_s \neq 1$, alors*
$$\varphi(F_{\beta_s} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s}) = \varphi(F_{\beta_1}^{n_1} \cdots F_{\beta_s}^{n_s} \otimes E_{\beta_s}) = 0.$$

PROPOSITION 2.7. — *Le morphisme de superalgèbres $\psi : \widetilde{U}_+ \to \widetilde{U}_-^{\mathrm{cop}}$ défini sur les générateurs par*
$$\psi(E_i) = F_i, \quad \psi(H_i) = -H'_i$$
est un isomorphisme de superalgèbres de Hopf qui vérifie $\psi(E_{\beta_i}) = F_{\beta_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, 7$.

Nous définissons $\widetilde{I}_+ \subset \widetilde{U}_+$ et $\widetilde{I}_- \subset \widetilde{U}_-$ comme les annulateurs de φ :
$$\widetilde{I}_+ = \bigl\{E \in \widetilde{U}_+,\ \varphi(F \otimes E) = 0,\ \forall\, F \in \widetilde{U}_-\bigr\},$$
$$\widetilde{I}_- = \bigl\{F \in \widetilde{U}_-,\ \varphi(F \otimes E) = 0,\ \forall\, E \in \widetilde{U}_+\bigr\}.$$

PROPOSITION 2.8. — *Pour $i = 2,3$, les éléments suivants sont dans $\widetilde{I}_+$ (resp. dans $\widetilde{I}_-$) :*
$$E_1^2, \quad E_2E_3 - E_3E_2, \quad E_i^2E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_iE_1E_i + E_1E_i^2$$
$$\bigl(\textit{resp. } F_1^2, \quad F_2F_3 - F_3F_2, \quad F_i^2F_1 - (q_i + q_i^{-1})F_iF_1F_i + F_1F_i^2\bigr).$$

Démonstration. — Pour montrer que $X \in \widetilde{I}_+$, on établit tout d'abord que
$$\Delta(X) = X \otimes 1 + K \otimes X,$$

où $K \in \widetilde{U}_0$. Ce calcul permet alors d'écrire

$$\varphi(YZ \otimes X) = (-1)^{\xi_1}\varphi(Y \otimes X)\varphi(Y \otimes 1) + (-1)^{\xi_2}\varphi(Y \otimes K)\varphi(Z \otimes X),$$

qui est nul si $\varphi(Y \otimes X) = \varphi(Z \otimes X) = 0$. On montre alors que $\varphi(Y \otimes X) = 0$ pour tout générateur $Y \in \widetilde{U}_-$, *i.e.* pour $Y = H'_j$ et $Y = F_j$. Ce dernier point découle des lemmes 2.2 et 2.4. Nous calculons donc uniquement les coproduits des éléments considérés. Pour cela, nous rappelons que nous utilisons la formule (1.1) pour le produit de deux éléments de $\widetilde{U}_+ \widehat{\otimes} \widetilde{U}_+$. Nous traitons uniquement le cas de $z = E_i^2 E_1 - (q_i + q_i^{-1}) E_i E_1 E_i + E_1 E_i^2$, $i = 2$ ou $i = 3$.

Soient $1 \leq n, m, p \leq 3$ des entiers tels qu'un seul d'entre eux soit égal à 1. On a alors les deux égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\Delta(E_n E_m) &= E_n E_m \otimes 1 + E_n K_m \otimes E_m + K_n E_m \otimes E_n + K_n K_m \otimes E_n E_m \\ &= E_n E_m \otimes 1 + E_n K_m \otimes E_m + q^{\overline{a}_{nm}} E_m K_n \otimes E_n + K_n K_m \otimes E_n E_m,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(E_n E_m E_p) &= E_n E_m E_p \otimes 1 + E_n K_m E_p \otimes E_m + q^{\overline{a}_{nm}} E_m K_n E_p \otimes E_n \\ &\quad + K_n K_m E_p \otimes E_n E_m + E_n E_m K_p \otimes E_p + E_n K_m K_p \otimes E_m E_p \\ &\quad + q^{\overline{a}_{nm}} E_m K_n K_p \otimes E_n E_p + K_n K_m K_p \otimes E_n E_m E_p \\ &= E_n E_m E_p \otimes 1 + q^{\overline{a}_{mp}} E_n E_p K_m \otimes E_m + q^{\overline{a}_{nm} + \overline{a}_{np}} E_m E_p K_n \otimes E_n \\ &\quad + q^{\overline{a}_{mp} + \overline{a}_{np}} E_p K_n K_m \otimes E_n E_m.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Delta(E_i^2 E_1) &= E_i^2 E_1 \otimes 1 + K_i^2 K_1 \otimes E_i^2 E_1 + q^{\overline{a}_{i1}}(1 + q^{\overline{a}_{ii}}) E_i E_1 K_i \otimes E_i \\ &\quad + E_i^2 K_1 \otimes E_1 + q^{2\overline{a}_{i1}} E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 + (1 + q^{\overline{a}_{ii}}) E_i K_i K_1 \otimes E_i E_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(E_1 E_i^2) &= E_1 E_i^2 \otimes 1 + K_1 K_i^2 \otimes E_1 E_i^2 + E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 \\ &\quad + (1 + q^{\overline{a}_{ii}}) E_1 E_i K_i \otimes E_i + q^{2\overline{a}_{1i}} E_i^2 K_1 \otimes E_1 \\ &\quad + q^{\overline{a}_{1i}}(1 + q^{\overline{a}_{ii}}) E_i K_1 K_i \otimes E_1 E_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(E_i E_1 E_i) &= E_i E_1 E_i \otimes 1 + E_i E_1 K_i \otimes E_i \\ &\quad + q^{\overline{a}_{1i}} E_i^2 K_1 \otimes E_1 + E_i K_1 K_i \otimes E_1 E_i + q^{\overline{a}i1 + \overline{a}_{ii}} E_1 E_i K_i \otimes E_i \\ &\quad + q^{\overline{a}_{i1}} E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 + q^{\overline{a}1i + \overline{a}_{ii}} E_i K_i K_1 \otimes E_i E_1 + K_i^2 K_1 \otimes E_i E_1 E_i.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\Delta(z) = z \otimes 1 + K_1K_i^2 \otimes z + X$, où X est un élément dont il reste à montrer qu'il est nul. Or,

$$\begin{aligned}
X = &\big(1 + q^{2\overline{a}_{1i}} - q^{\overline{a}_{1i}}(q_i + q_i^{-1})\big)E_i^2K_1 \otimes E_1 \\
&+ \big(1 + q^{2\overline{a}_{i1}} - (q_i + q_i^{-1})q^{\overline{a}_{i1}}\big)E_1K_i^2 \otimes E_i^2 \\
&+ \big(q^{\overline{a}_{i1}}(1 + q^{\overline{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1})\big)E_iE_1K_i \otimes E_i \\
&+ \big(1 + q^{\overline{a}_{ii}} - q^{\overline{a}_{i1}+\overline{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1})\big)E_1E_iK_i \otimes E_i \\
&+ \big(1 + q^{\overline{a}_{ii}} - q^{\overline{a}_{1i}+\overline{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1})\big)E_iK_iK_1 \otimes E_iE_1 \\
&+ \big(q^{\overline{a}_{1i}}(1 + q^{\overline{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1})\big)E_iK_1K_i \otimes E_1E_i,
\end{aligned}$$

et pour $i = 2, 3$, on a $\overline{a}_{i1} = \overline{a}_{1i} = d_ia_{i1} = -d_i$ et $\overline{a}_{ii} = 2d_i$. On en déduit

$$\begin{aligned}
&1 + q^{2\overline{a}_{1i}} - q^{\overline{a}_{1i}}(q_i + q_i^{-1}) = 1 + q^{-2d_i} - q^{-d_i}(q_i + q_i^{-1}) = 0,\\
&q^{\overline{a}_{i1}}(1 + q^{\overline{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1}) = q^{-d_i}(1 + q^{2d_i}) - (q^{d_i} + q^{-d_i}) = 0,\\
&1 + q^{\overline{a}_{ii}} - q^{\overline{a}_{i1}+\overline{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1}) = 1 + q^{2d_i} - q^{-d_i}(q^{d_i} + q^{-d_i}) = 0,
\end{aligned}$$

d'où $X = 0$ et la proposition est démontrée en ce qui concerne $\widetilde{I}_+$. Pour montrer que $Y \in \widetilde{I}_-$, il suffit d'établir que $\Delta(Y) = 1 \otimes Y + Y \otimes K'$, où $K' \in \widetilde{U}_0'$, ce qui découle des calculs précédents en appliquant l'isomorphisme ψ. □

On note I_+ (resp. I_-) le sous-idéal de Hopf de $\widetilde{I}_+$ (resp. $\widetilde{I}_-$) engendré par

$$E_1^2,\ E_2E_3 - E_3E_2,\ E_i^2E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_iE_1E_i + E_1E_i^2\ (i = 2, 3)$$
$$\big(\text{resp. } F_1^2,\ F_2F_3 - F_3F_2,\ F_i^2F_1 - (q_i + q_i^{-1})F_iF_1F_i + F_1F_i^2\ (i = 2, 3)\big).$$

On pose alors

$$U_+ = \widetilde{U}_+/I_+, \quad U_- = \widetilde{U}_-/I_-.$$

Corollaire 2.9. — *L'accouplement φ induit un accouplement sur $U_-\widehat{\otimes}U_+$ que nous noterons encore φ. De plus, l'isomorphisme ψ de la proposition* 2.7 *induit un isomorphisme de superalgèbres de Hopf entre U_+ et U_-^{cop}, que nous noterons encore ψ.*

2.2. La superalgèbre de Hopf $\mathcal{D}$. — Dans ce paragraphe, nous construisons une superalgèbre de Hopf tressée $\mathcal{D}$ par la méthode du double quantique (*cf.* §1.1) et nous établissons un lien avec $U_h(D_x)$.

En paraphrasant les définitions de $\widetilde{V}_+, \widetilde{V}_-, \widetilde{U}_0, \widetilde{U}_0'$ du §2.1 on définit $V_+ \subset U_+$, $V_- \subset U_-$, $U_0 \subset U_+$, $U_0' \subset U_-$. Les résultats du lemme 2.2 jusqu'à la proposition 2.7 restent valables pour $\varphi : U_- \otimes U_+ \to \mathbb{C}[[h]]$, en remplaçant $\widetilde{V}_+$ (resp. $\widetilde{V}_-$, $\widetilde{U}_0$, $\widetilde{U}_0'$) par V_+ (resp. V_-, U_0, U_0'). Nous notons

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(U_+, U_-, \varphi)$$

le double quantique de U_+ et U_- construit à partir de l'accouplement φ (*cf.* le §1.1 pour la construction).

Nous avons besoin de la proposition suivante pour établir un lien entre $\mathcal{D}$ et $U_h(D_x)$. Nous laissons la démonstration au lecteur.

PROPOSITION 2.10. — *Les relations suivantes sont vérifiées dans $\mathcal{D}$:*

$$[H'_i, E_j] = a_{ij}E_j, \quad [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{'-1}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

Définissons la superalgèbre $\overline{\mathcal{D}}$ comme le quotient de $\mathcal{D}$ par l'idéal de Hopf engendré par $H_i - H'_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Posons $\pi : \mathcal{D} \to \overline{\mathcal{D}}$ la projection canonique. Définissons $\iota : U_h(D_x) \to \mathcal{D}$ par

$$\iota(E_j) = E_j, \quad \iota(F_j) = F_j, \quad \iota(H_j) = H_j \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

PROPOSITION 2.11. — *Le morphisme ι est un morphisme de superalgèbres de Hopf topologiques injectif et la composée $p \circ \iota$ réalise un isomorphisme entre $U_h(D_x)$ et $\overline{\mathcal{D}}$.*

3. *R*-matrice universelle

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.2 en construisant des bases de U_+ et U_- duales pour φ. Rappelons que D_x admet trois racines simples α_1, α_2 et α_3 (*cf.* §1.3), et que les vecteurs de racine sont définis par (1.8). Nous notons également E_{β_i} et F_{β_i} les images de E_{β_i} et F_{β_i} par l'injection ι de la proposition 2.11.

Pour tout couple (Y, Z) d'éléments homogènes de $\mathcal{D}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}[[h]]$, on pose

$$[Y, Z]_\alpha = YZ - (-1)^{|Y|\cdot|Z|}\alpha ZY,$$

et on étend cette définition à tout $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ par bilinéarité.

3.1. Relations dans $\mathcal{D}$. — Nous commençons par énoncer des relations vérifiées dans $\mathcal{D}$. Les démonstrations des lemmes 3.1 à 3.3 sont laissées au lecteur.

LEMME 3.1. — *Pour tout $i = 1, \ldots, 7$, on a $K_{\beta_i}E_{\beta_i} = q^{c_i}E_{\beta_i}K_{\beta_i}$*

LEMME 3.2. — *On a :*

$$\begin{aligned} E_{\beta_2} &= [E_1, E_3]_{q^{-x}}, & E_{\beta_6} &= [E_2, E_1]_{q^{-1}},\\ E_{\beta_3} &= [E_2, E_{\beta_2}]_{q^{-1}}, & E_{\beta_4} &= [E_1, E_{\beta_3}]_{q^{-1-x}}. \end{aligned}$$

LEMME 3.3. — *L'action adjointe* $\mathrm{ad}_+ : U_+ \to U_+$ *vérifie pour $i = 2$ et 3*

$$\mathrm{ad}_+{}^2 E_i(E_1) = 0,$$

et pour tout $X \in U_+$, on a

$$\mathrm{ad}_+E_i(XE_j) = \mathrm{ad}_+E_i(X)\, E_j, \quad \mathrm{ad}_+E_i(E_jX) = E_j\, \mathrm{ad}_+E_i(X),$$

si $(i,j)=(2,3)$ *ou* $(3,2)$.

Le lemme suivant a été établi par Zou dans [24].

Lemme 3.4. — *Pour* $i=2,3,6$, *on a* $E_{\beta_i}^2=0$.

Proposition 3.5. — *Dans* U_+, *on a les relations de commutations suivantes :*

$$\begin{aligned}(3.1)\quad & [E_{\beta_7},E_{\beta_5}]_{q^{-1}}=E_{\beta_6},\quad [E_{\beta_7},E_{\beta_2}]_{q^{-1}}=E_{\beta_3},\quad [E_{\beta_7},E_{\beta_1}]=0,\\ & [E_{\beta_5},E_{\beta_3}]_{-q^{-1-x}}=E_{\beta_4},\quad [E_{\beta_5},E_{\beta_1}]_{q^{-x}}=E_{\beta_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.2)\quad & [E_{\beta_7},E_{\beta_6}]_q=0,\quad [E_{\beta_7},E_{\beta_3}]_q=0,\quad [E_{\beta_6},E_{\beta_5}]_{-q^{-1}}=0,\\ & [E_{\beta_6},E_{\beta_1}]_{q^{-x}}=E_{\beta_3},\quad [E_{\beta_5},E_{\beta_4}]_{q^{-1-x}}=0,\quad [E_{\beta_5},E_{\beta_2}]_{-q^{-x}}=0,\\ & [E_{\beta_4},E_{\beta_3}]_{q^{-1-x}}=0,\quad [E_{\beta_3},E_{\beta_2}]_{-q^{-1}}=0,\quad [E_{\beta_2},E_{\beta_1}]_{q^x}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.3)\quad & [E_{\beta_7},E_{\beta_4}]=0,\quad [E_{\beta_6},E_{\beta_4}]_{q^{-1-x}},\quad [E_{\beta_6},E_{\beta_3}]_{-q^{-x}}=0,\\ & [E_{\beta_4},E_{\beta_2}]_{q^{-1-x}}=0,\quad [E_{\beta_4},E_{\beta_1}]=q^{-1}(q^{1+x}-q^{-1-x})E_{\beta_2}E_{\beta_3},\\ & [E_{\beta_3},E_{\beta_1}]_{q^x}=0,\end{aligned}$$

$$(3.4)\quad [E_{\beta_6},E_{\beta_2}]_{-q^{-1-x}}=-q^{-1-x}(q-q^{-1})E_{\beta_3}E_{\beta_5}-q^{-1}E_{\beta_4}.$$

Démonstration. — Les relations (3.1) sont immédiates, et nous laissons au lecteur la démonstration des relations (3.2). Nous démontrons les relations (3.3). Nous utiliserons implicitement les lemmes 3.2, 3.3 et 3.4, et les relations (3.2).

1) On a

$$\begin{aligned}E_{\beta_7}E_{\beta_4}&=E_{\beta_7}(E_{\beta_5}E_{\beta_3}+q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5})\\ &=q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_7}E_{\beta_3}+E_{\beta_6}E_{\beta_3}+q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_7}E_{\beta_5}\\ &=E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_7}+E_{\beta_6}E_{\beta_3}+q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_7}+q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_6}=E_{\beta_4}E_{\beta_7},\end{aligned}$$

où la deuxième et la troisième égalité proviennent des relations de commutations de $E_{\beta_7}E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_7}E_{\beta_3}$ et la dernière de celle de $E_{\beta_6}E_{\beta_3}$.

2) On a

$$\begin{aligned}E_{\beta_6}E_{\beta_4}&=E_{\beta_6}(E_{\beta_5}E_{\beta_3}+q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5})=E_{\beta_6}E_{\beta_5}E_{\beta_3}+q^{-1-x}E_{\beta_6}E_{\beta_3}E_{\beta_5}\\ &=-q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_6}E_{\beta_3}-q^{-1-2x}E_{\beta_3}E_{\beta_6}E_{\beta_5}\\ &=-q^{-1-x}E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_6}-q^{-2-2x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_6}\\ &=q^{-1-x}E_{\beta_4}E_{\beta_6},\end{aligned}$$

où on a utilisé les relation de commutation de $E_{\beta_6}E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_6}E_{\beta_3}$.

3) On a $E_{\beta_6}E_{\beta_3}+q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_6}=E_{\beta_6}^2E_3-q^{-x}E_{\beta_6}E_3E_{\beta_6}+q^{-x}E_{\beta_6}E_3E_{\beta_6}-q^{-2x}E_3E_{\beta_6}^2=0$ car $E_{\beta_6}^2=0$ et $E_{\beta_3}=E_{\beta_6}E_{\beta_1}-q^{-x}E_{\beta_1}E_{\beta_6}$.

4) En remplaçant E_{β_4} par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} E_{\beta_4}E_{\beta_2} &= E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_2} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_2} \\ &= q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-2-2x}E_{\beta_2}E_{\beta_3}E_{\beta_5}. \end{aligned}$$

5) Comme $E_{\beta_2}E_{\beta_1} = q^x E_{\beta_1}E_{\beta_2}$, on a

$$\begin{aligned} E_{\beta_3}E_{\beta_1} - q^x E_{\beta_1}E_{\beta_3} &= \mathrm{ad}_+ E_2(E_{\beta_2})E_3 - q^x E_3 \mathrm{ad}_+ E_2(E_{\beta_2}) \\ &= \mathrm{ad}_+ E_2(E_{\beta_2}E_3 - q^x E_3 E_{\beta_2}) = 0. \end{aligned}$$

6) On remplace à nouveau E_{β_4} par sa valeur donnée au lemme 3.2 pour obtenir

$$E_{\beta_4}E_{\beta_1} = q^x E_{\beta_5}E_{\beta_1}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_1}$$

car $E_{\beta_3}E_{\beta_1} = q^x E_{\beta_1}E_{\beta_3}$. Comme $E_{\beta_5}E_{\beta_1} = q^{-x}E_{\beta_1}E_{\beta_5} + E_{\beta_2}$, nous obtenons

$$E_{\beta_4}E_{\beta_1} = E_{\beta_1}E_{\beta_3}E_{\beta_5} + q^x E_{\beta_2}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_1}E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_2},$$

ce qui donne le résultat voulu avec $E_{\beta_3}E_{\beta_2} = -q^{-1}E_{\beta_2}E_{\beta_3}$.

7) En remplaçant E_{β_6} par sa valeur donnée au lemme 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_{\beta_6}E_{\beta_2} &= E_{\beta_7}E_{\beta_5}E_{\beta_2} - q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_7}E_{\beta_2} \\ &= -q^{-x}E_{\beta_7}E_{\beta_2}E_{\beta_5} - q^{-2}E_{\beta_5}E_{\beta_2}E_{\beta_7} - q{-}1E_{\beta_5}E_{\beta_3} \\ &= -q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_7}E_{\beta_5} - q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5} + q^{-2-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5}E_{\beta_7} \\ &\quad + q^{-2-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5} - q^{-1}E_{\beta_4} \\ &= -q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_6} - q^{-1-x}(q-q^{-1})E_{\beta_3}E_{\beta_5} - q^{-1}E_{\beta_4}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations de commutation de $E_{\beta_5}E_{\beta_2}$, $E_{\beta_7}E_{\beta_2}$ et $E_{\beta_5}E_{\beta_3}$. □

PROPOSITION 3.6. — *Les coproduits des vecteurs de racines non simples sont donnés par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \Delta(E_{\beta_2}) &= E_{\beta_2}\otimes 1 + K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2} + (1-q^{-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1}, \\ \Delta(E_{\beta_6}) &= E_{\beta_6}\otimes 1 + K_{\beta_6}\otimes E_{\beta_6} + (1-q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_5}\otimes E_{\beta_5}, \\ \Delta(E_{\beta_3}) &= E_{\beta_3}\otimes 1 + K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3} + (1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1} \\ &\qquad + (1-q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}, \\ \Delta(E_{\beta_4}) &= E_{\beta_4}\otimes 1 + K_{\beta_4}\otimes E_{\beta_4} + (1-q^{-2-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3} \\ &\quad - q^{-1}(1-q^{-2-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2} \\ &\quad + (1-q^{-2x})(1-q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_6}K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1} \\ &\quad + (1-q^{-2})(1-q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_7}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous traitons ici uniquement le cas de E_{β_4} qui est le plus compliqué. On a

$$\begin{aligned}\Delta(E_1)\Delta(E_{\beta_3}) &= (E_1\otimes 1+K_1\otimes E_1)(E_{\beta_3}\otimes 1+K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3}\\ &\qquad +(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1}+(1-q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2})\\ &= E_1E_{\beta_3}\otimes 1+E_1K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3}+(1-q^{-2})E_1E_{\beta_7}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}\\ &\qquad +(1-q^{-2x})E_1E_{\beta_6}K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1}\\ &\qquad\quad -q^{-1-x}E_{\beta_3}K_1\otimes E_1+K_1K_{\beta_3}\otimes E_1E_{\beta_3}\\ &\qquad\qquad +q^{-1}(1-q^{-2})E_{\beta_7}K_1K_{\beta_2}\otimes E_1E_{\beta_2}\\ &\qquad\qquad\quad -q^{-1}(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_{\beta_1}\otimes E_1E_{\beta_1},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations de commutation entre les K_i et les E_j. De même, on a

$$\begin{aligned}\Delta(E_{\beta_3})\Delta(E_1) &= E_{\beta_3}E_1\otimes 1-q^{-1}E_1K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3}-q^{-x}(1-q^{-2})E_{\beta_7}E_1K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}\\ &\quad +q^{-x}(1-q^{-2x})E_{\beta_6}E_1K_{\beta_1}\otimes E_{\beta_1}+E_{\beta_3}K_1\otimes E_1+K_{\beta_3}K_1\otimes E_{\beta_3}E_1\\ &\quad +(1-q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2}K_1\otimes E_{\beta_2}E_1+(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1}K_1\otimes E_{\beta_1}E_1,\end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned}\Delta(E_{\beta_4}) &= E_{\beta_4}\otimes 1+K_{\beta_4}\otimes E_{\beta_4}+(1-q^{-2x})(E_1E_{\beta_6}+q^{-1-2x}E_{\beta_6}E_1)K_3\otimes E_{\beta_1}\\ &\quad +(1-q^{-2-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_3}\otimes E_{\beta_3}+(1-q^{-2})(E_1E_2-q^{-1-2x}E_2E_1)K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}\\ &\quad -q^{-1}(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_3\otimes(E_1E_3-q^{-x}E_3E_1)\\ &\quad +q^{-1}(1-q^{-2-x})E_2K_1K_{\beta_2}\otimes(E_1E_{\beta_2}+q^{-x}E_{\beta_2}E_1).\end{aligned}$$

Or, par la proposition 3.5, on a

$$E_1E_{\beta_6}+q^{-1-2x}E_{\beta_6}E_1=(1-q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_6}$$

et

$$-q^{-1}(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_3\otimes(E_1E_3-q^{-x}E_3E_1)=-q^{-1}(1-q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}.$$

Ensuite, nous calculons $(1-q^{-2})(E_1E_2-q^{-1-2x}E_2E_1)K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}$. En utilisant la proposition 3.5, on obtient

$$\begin{aligned}&(1-q^{-2})(E_1E_2-q^{-1-2x}E_2E_1)K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}\\ &\quad =(1-q^{-2})(E_{\beta_5}E_{\beta_7}-q^{-1-2x}E_{\beta_7}E_{\beta_5})K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}\\ &\quad =(1-q^{-2})(E_{\beta_5}E_{\beta_7}-q^{-2-2x}E_{\beta_5}E_{\beta_7}-q^{-1-2x}E_{\beta_6})K_{\beta_2}\otimes E_{\beta_2}.\end{aligned}$$

Pour terminer, il reste le terme $q^{-1}(1-q^{-2-x})E_2K_1K_{\beta_2}\otimes(E_1E_{\beta_2}+q^{-x}E_{\beta_2}E_1)$. Or, d'après la proposition 3.5, on a

$$E_1E_{\beta_2}+q^{-x}E_{\beta_2}E_1=E_{\beta_5}E_{\beta_2}+q^{-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5}=0,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. □

3.2. Démonstration du théorème 1.2. — Nous donnons maintenant une démonstration du théorème 1.2.

LEMME 3.7. — *Pour tout* $i = 1, \dots, 7$, *on a* $\varphi(F_{\beta_i} \otimes E_{\beta_i}) = \varphi_i$, *où les* φ_i *sont définis par* (1.9).

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur. □

PROPOSITION 3.8. — *Soient* $n_1, n_4, n_7 \in \mathbb{N}$, $n_2, n_3, n_5, n_6 \in \{0,1\}$ *et* $X = E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} \in V_+$. *Alors*

$$\Delta(X) = (n_s)_s\, E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s - 1} K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s} + y \otimes 1 + \sum z \otimes \Big(\prod_{i \leq s} E_{\beta_i} \Big),$$

où $y, z \in U_+$, $1 \leq s \leq 7$ *est le plus grand des entiers* i *tel que* $n_i \neq 0$, *et où* $(\prod_{i \leq s} E_{\beta_i})$ *désigne un produit de racines* E_{β_i} *dans l'ordre croissant des indices, avec au moins un des indices* i *vérifiant* $i < s$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.6 et les relations (1.7), on a, pour $i = 1, \dots, 7$,

$$\Delta(E_{\beta_i}) = E_{\beta_i} \otimes 1 + K_{\beta_i} \otimes E_{\beta_i} + \sum_{\beta_k,\, k<i} z \otimes E_{\beta_k}$$

où $z \in U_+$. On en déduit que

$$\Delta(X) = (E_{\beta_1} \otimes 1 + K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1})^{n_1} \cdots \Big(E_{\beta_s} \otimes 1 + K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s} + \sum_{\beta_k, k<s} z \otimes E_{\beta_k} \Big)^{n_s}.$$

Le terme $y \otimes 1$ de l'énoncé en découle aussitôt. Considérons le terme $z \otimes E_{\beta_s}$, $z \in U_+$. Pour $k = 0, \dots, n_s - 1$, on a (en utilisant le lemme 3.1),

$$\begin{aligned}
(E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} \otimes 1)&(E_{\beta_s}^{k} \otimes 1)(K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s})(E_{\beta_s}^{n_s-k-1} \otimes 1) \\
&= E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{k} K_{\beta_s} E_{\beta_s}^{n_s-k-1} \otimes E_{\beta_s} \\
&= q^{c_s(n_s-k-1)} E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s-1} K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s},
\end{aligned}$$

car aucun signe ne peut apparaître dans le produit, (si E_{β_s} est impair, alors $n_s = 1$ d'après le lemme 3.4). Or,

$$\sum_{k=0}^{n_s-1} q^{kc_s} = \frac{q^{n_s c_s} - 1}{q^{c_s} - 1} = (n_s)_s,$$

ce qui fournit le premier terme de l'énoncé. Il reste à calculer le produit

$$\Big(\sum_{\beta_k,\, k<i} z \otimes E_{\beta_k} \Big) \Big(\sum_{\beta_m,\, m<j} z' \otimes E_{\beta_m} \Big),$$

avec $i < j \leq s$. Ce produit donne des termes $z \otimes E_{\beta_p} E_{\beta_r}$ avec $p > r$. Or, la proposition 3.5 prouve que $E_{\beta_p} E_{\beta_r} = \lambda E_{\beta_r} E_{\beta_p} + \zeta E_{\beta_f} E_{\beta_g} + \mu E_{\beta_t}$, où λ, ζ, μ

sont dans $\mathbb{C}[[h]]$ et $r < f, g, t < p$. En particulier, avec $p \leq s$, on obtient le dernier terme de l'énoncé. $\square$

LEMME 3.9. — *Soient* $n_i, m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 4, 7$, $n_j, m_j \in \{0, 1\}$, $j = 2, 3, 5, 6$. *Alors*

$$\varphi(F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_7}^{m_7} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7}) = (-1)^{\xi} \prod_{i=1}^{7} \delta_{n_i m_i} \, (n_i)_i! \, \varphi_i^{n_i},$$

où $\xi = n_6(n_2 + n_3 + n_5) + n_5(n_2 + n_3) + n_3 n_2$.

Démonstration. — Soit s le plus grand des indices i tel que m_i ou n_i soit non nul. Nous supposerons pour la démonstration que $n_s \geq m_s$. Le cas $m_s \geq n_s$ se traite de la même manière grâce à la proposition 2.7. Posons

$$X = E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s - 1} \quad \text{et} \quad Y = F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_{s-1}}^{m_{s-1}} F_{\beta_s}^{m_s - 1}.$$

Si $m_s \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
&\varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) \\
&\qquad = \sum_{(X E_{\beta_s})} (-1)^{|F_{\beta_s}| \cdot |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} \, \varphi\big(Y \otimes (X E_{\beta_s})_{(1)}\big) \, \varphi\big(F_{\beta_s} \otimes (X E_{\beta_s})_{(2)}\big).
\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 3.8, on a $\varphi(F_{\beta_s} \otimes (X E_{\beta_s})_{(2)}) = 0$, sauf lorsque $(X E_{\beta_s})_{(2)} = E_{\beta_s}$. En effet, si $(X E_{\beta_s})_{(2)} = 1$, cela découle du lemme 2.2. Sinon, $(X E_{\beta_s})_{(2)} = \prod_{i \leq s} E_{\beta_i}$ par la proposition 3.8, et le lemme 2.6 permet de conclure. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) &= (-1)^{|F_{\beta_s}| \cdot |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} \, (n_s)_s \, \varphi_s \, \varphi(Y \otimes X K_{\beta_s}) \\
&= (-1)^{|F_{\beta_s}| \cdot |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} \, (n_s)_s \, \varphi_s \, \varphi(Y \otimes X)
\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.3. Or, on a l'égalité des degrés

$$\big|(X E_{\beta_s})_{(1)}\big| = |E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s - 1} K_{\beta_s}|.$$

Le seul cas qui nous intéresse est celui où $|\beta_s| = 1$, et dans ce cas $n_s - 1 = 0$. On en déduit que

$$|(X E_{\beta_s})_{(1)}| = |E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}}| = \sum_{i < s, \, |\beta_i| = 1} n_i$$

puisque, lorsque β_i est impaire, nous avons $n_i = 0$ ou 1 (lemme 3.4). En itérant cette opération $n_s - m_s$ fois, on obtient

$$\begin{aligned}
&\varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) \\
&= (-1)^{\zeta_s} (n_s)_s \cdots (n_s - m_s + 1)_s \, \varphi^{n_s - m_s} \, \varphi(F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_{m_{s-1}}}^{m_{s-1}} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s - m_s}),
\end{aligned}$$

où $\zeta_s = \sum_{i<s,\,|\beta_i|=1} n_i$. Si $n_s = m_s$, alors on peut refaire le raisonnement précédant tant que $n_i = m_i$, et ce jusqu'à ce que $s=1$. De plus, il apparaît un signe $(-1)^\xi$ où

$$\xi = \sum_{i=1}^{7} \zeta_i = n_6(n_2+n_3+n_5) + n_5(n_2+n_3) + n_3 n_2.$$

Il reste donc à montrer que

$$\varphi(F_{\beta_1}^{m_1}\cdots F_{\beta_r}^{m_r} \otimes E_{\beta_1}^{n_1}\cdots E_{\beta_s}^{n_s}) = 0$$

si $s > r$ et $n_s > 0$. Posons

$$Y = F_{\beta_1}^{m_1}\cdots F_{\beta_r}^{m_r} \quad \text{et} \quad X = E_{\beta_1}^{n_1}\cdots E_{\beta_s}^{n_s-1}.$$

Nous avons

$$\varphi(Y\otimes XE_{\beta_s}) = \sum_{(Y)} \varphi(Y_{(1)}\otimes E_{\beta_s})\varphi(Y_{(2)}\otimes X)$$

d'après (1.2). Or, d'après les propositions 2.7 et 3.8, on a

$$\Delta(Y) = F_{\beta_r}\otimes y + 1\otimes z + \sum \Big(\prod_{i\le r} F_{\beta_i}\Big)\otimes t$$

où $y,z,t\in U_-$. On en déduit que $\varphi(Y_{(1)}\otimes E_{\beta_s}) = 0$ d'après les propositions 2.2 et 2.6. □

Pour $j=1,2,3$, posons

$$\widetilde{H}_j = \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^{3} b_{ij} H_i'$$

où les scalaires b_{ij} sont définis par (1.10).

Lemme 3.10. — *On a $\varphi(\widetilde{H}_j\otimes H_i) = \delta_{ij}$ pour $1\le i,j\le 3$ et*

$$\varphi\Big(\frac{\widetilde{H}_1^{q_1}}{q_1!}\frac{\widetilde{H}_2^{q_2}}{q_2!}\frac{\widetilde{H}_3^{q_3}}{q_3!}\otimes H_1^{p_1}H_2^{p_2}H_3^{p_3}\Big) = \delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2}\delta_{p_3q_3}.$$

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Proposition 3.11. — *Les familles*

$$E_{\beta_1}^{n_1}\ldots E_{\beta_7}^{n_7}H_1^{\ell_1}H_2^{\ell_2}H_3^{\ell_3} \quad \textit{et} \quad (-1)^\xi \frac{F_{\beta_1}^{n_1}}{(n_1)_1!\,\varphi_1^{n_1}}\cdots\frac{F_{\beta_7}^{n_7}}{(n_7)_7!\,\varphi_7^{n_7}}\frac{\widetilde{H}_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{\widetilde{H}_2^{\ell_2}}{\ell_2!}\frac{\widetilde{H}_3^{\ell_3}}{\ell_3!}$$

où $\xi = n_6(n_2+n_3+n_5)+n_5(n_2+n_3)+n_3n_2$, ℓ_i, n_j parcourent $\mathbb{N}$ pour $i=1,2,3$, $j=1,4,7$, et où n_i décrit $\{0,1\}$ pour $i=2,3,5,6$, forment respectivement des $\mathbb{C}((h))$-bases de $U_+\otimes_{\mathbb{C}[[h]]}\mathbb{C}((h))$ et $U_-\otimes_{\mathbb{C}[[h]]}\mathbb{C}((h))$ duales pour φ.

Démonstration. — Soient $n_i, m_i, p_j, q_j \in \mathbb{N}$ ($i = 1,4,7$, $j = 1,2,3$) et $n_k, m_k \in \{0,1\}$ ($k = 2,3,5,6$). D'après les lemmes 2.3, 3.9 et 3.10, on a

$$\varphi\Big(\frac{F_{\beta_1}^{m_1}}{(m_1)_1!\,\varphi_1^{m_1}}\cdots\frac{F_{\beta_7}^{m_7}}{(m_7)_7!\,\varphi_7^{m_7}}\frac{\widetilde{H}_1^{q_1}}{q_1!}\frac{\widetilde{H}_2^{q_2}}{q_2!}\frac{\widetilde{H}_3^{q_3}}{q_3!}\otimes E_{\beta_1}^{n_1}\cdots E_{\beta_7}^{n_7}H_1^{p_1}H_2^{p_2}H_3^{p_3}\Big) = (-1)^{\xi}\prod_{\substack{1\le i\le 7\\ 1\le j\le 3}}\delta_{n_i m_i}\delta_{p_j q_j},$$

où $\xi = n_6(n_2+n_3+n_5)+n_5(n_2+n_3)+n_3n_2$. La proposition découle alors des propositions 2.7 et 3.5. □

Démonstration du théorème 1.2. — D'après la proposition 3.11, l'élément

$$R_{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3,n_1,n_4,n_7\in\mathbb{N}\\ n_2,n_3,n_5,n_6\in\{0,1\}}}\frac{(-1)^{n_6(n_5+n_3+n_2)+n_5(n_3+n_2)+n_3n_2}}{(n_1)_1!\,(n_4)_4!\,(n_7)_7!\,m_1!\,m_2!\,m_3!\,\varphi_1^{n_1}\cdots\varphi_7^{n_7}} \times E_{\beta_1}^{n_1}\cdots E_{\beta_7}^{n_7}H_1^{m_1}\cdots H_3^{m_3}\otimes F_{\beta_1}^{n_1}\cdots F_{\beta_7}^{n_7}\widetilde{H}_1^{m_1}\cdots\widetilde{H}_3^{m_3}$$

est une R-matrice universelle pour $\mathcal{D}$ (*cf.* [2], [4], [12]). On en déduit que l'image $R \in \overline{\mathcal{D}}\otimes\overline{\mathcal{D}}$ de $R_{\mathcal{D}}$ par la projection canonique de $\mathcal{D}$ sur $\overline{\mathcal{D}}$ est une R-matrice universelle pour $\overline{\mathcal{D}}$. Or,

$$(-1)^{n_6(n_5+n_3+n_2)+n_5(n_3+n_2)+n_3n_2}E_{\beta_1}^{n_1}\cdots E_{\beta_7}^{n_7}\otimes F_{\beta_1}^{n_1}\cdots F_{\beta_7}^{n_7} = (E_{\beta_1}^{n_1}\otimes F_{\beta_1}^{n_1})\cdots(E_{\beta_7}^{n_7}\otimes F_{\beta_7}^{n_7}),$$

et

$$\sum_{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{N}}\frac{H_1^{m_1}H_2^{m_2}H_3^{m_3}\otimes\widetilde{H}_1^{m_1}\widetilde{H}_2^{m_2}\widetilde{H}_3^{m_3}}{m_1!\,m_2!\,m_3!} = \exp\Big(\frac{h}{2}\Big(\sum_{i,j}b_{ij}H_i\otimes H_j\Big)\Big),$$

donc

$$R = \exp_1\Big(\frac{E_{\beta_1}\otimes F_{\beta_1}}{\varphi_1}\Big)\cdots\exp_7\Big(\frac{E_{\beta_7}\otimes F_{\beta_7}}{\varphi_7}\Big)\exp\Big(\frac{h}{2}\Big(\sum_{i,j}b_{ij}H_i\otimes H_j\Big)\Big)$$

d'après les formules (1.9). La proposition 2.11 permet achever la démonstration. □

4. Démonstration du théorème 1.3

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.3 énoncé au §1.4. Nous commençons par définir un supermodule de rang 6, puis nous rappelons la construction de la catégorie rubanée associée ; nous terminons par la démonstration du théorème.

Dans tout le paragraphe 4, le scalaire x qui entre dans la définition de $U_h(D_x)$ vaut $x = 1$.

4.1. Un supermodule de rang 6. — On considère le $C[[h]]$-module M_0 topologiquement libre de base (v_1, v_2) et M_1 le $C[[h]]$-module topologiquement libre de base (v_3, v_4, v_5, v_6). Nous considérons le supermodule $M = M_0 \oplus M_1$ où M_0 est la partie paire et M_1 la partie impaire. On pose pour $i = 2, 3$, $j = 1, 2$,

$$
\begin{aligned}
&H_2v_1 = H_3v_1 = v_1, \quad H_2v_2 = H_3v_2 = v_2, \quad E_iv_j = F_iv_j = 0,\\
&H_1v_1 = v_1, \quad H_1v_2 = -v_2, \quad E_1v_1 = F_1v_2 = 0, \quad F_1v_1 = v_3, \quad E_1v_2 = -v_6,\\
&H_2v_3 = H_3v_3 = v_3, \quad H_2v_6 = H_3v_6 = -v_6,\\
&H_2v_4 = -H_3v_4 = -v_4, \quad H_2v_5 = -H_3v_5 = v_5,\\
&E_2v_3 = E_3v_3 = E_2v_5 = E_3v_4 = F_2v_6 = F_3v_6 = F_2v_4 = F_3v_5 = 0,\\
&E_2v_4 = E_3v_5 = v_3, \quad E_2v_6 = v_5, \quad E_3v_6 = v_4,\\
&F_2v_5 = F_3v_4 = v_6, \quad F_2v_3 = v_4, \quad F_3v_3 = v_5,\\
&E_1v_4 = E_1v_5 = E_1v_6 = F_1v_3 = F_1v_4 = F_1v_5 = 0,\\
&E_1v_3 = v_1, \quad F_1v_6 = v_2, \quad H_1v_3 = v_3, \quad H_1v_4 = H_1v_5 = 0, \quad H_1v_6 = -v_6.
\end{aligned}
$$

Proposition 4.1. — *Les formules précédentes munissent M d'une structure de $U_h(D_x)$-module simple topologiquement libre isomorphe à son dual.*

Démonstration. — Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ces relations définissent une structure de $U_h(D_x)$-module. Montrons que M est simple. La sous-algèbre de Hopf U' de $U_h(D_x)$ topologiquement engendrée par H_i, E_i, F_i pour $i = 2, 3$, est isomorphe à $U_h(\mathrm{sl}_2)\widehat{\otimes}U_h(\mathrm{sl}_2)$. En tant que U'-module, on a $M_0 \cong \mathbb{C}[[h]] \oplus \mathbb{C}[[h]]$ et $M_1 \cong V_1\widehat{\otimes}V_1$. Comme $V_1\widehat{\otimes}V_1$ est un $U_h(\mathrm{sl}_2)\widehat{\otimes}U_h(\mathrm{sl}_2)$-module simple, il suffit de vérifier que chacun des vecteurs v_1, v_2, v_3 engendre le module M tout entier. Or, ceci est clair d'après la forme des actions de E_1 et F_1. De plus, le lecteur vérifiera que l'application $\alpha : M \to M^*$ définie par

$$
\begin{gathered}
\alpha(v_1) = -q^{-3}v^2, \quad \alpha(v_2) = q^{-1}v^1, \quad \alpha(v_3) = q^{-2}v^6,\\
\alpha(v_4) = -q^{-1}v^5, \quad \alpha(v_5) = -q^{-1}v^4, \quad \alpha(v_6) = v^3,
\end{gathered}
$$

où $(v^1, \ldots, v^6)$ désigne la base duale de $(v_1, \ldots, v_6)$, est un isomorphisme de modules. □

Nous donnons maintenant le tressage $c_{M,M}$ de M induit par la R-matrice universelle de $U_h(D_x)$ via la formule (1.11). L'automorphisme $c_{M,M}$ laisse stable les parties paire et impaire de $M^{\hat{\otimes}2}$ car R est un élément pair de $U_h(D_x)^{\hat{\otimes}2}$. Le calcul de $c_{M,M}$ a été fait à l'aide de Maple. Nous donnons les matrices de $c_0 = c_{M,M|(M\hat{\otimes}M)_0}$ (figure 1) et $c_1 = c_{M,M|(M\hat{\otimes}M)_1})$ (figure 2) dans les bases

$$(v_i \otimes v_j)_{1\le i,j\le 2 \text{ou } 3\le i,j\le 6} \quad \text{et} \quad (v_i \otimes v_j)_{1\le i\le 2,\, 3\le j\le 6 \text{ ou } 3\le i\le 6,\, 1\le j\le 2}$$

ordonnées suivant l'ordre lexicographique. Dans ces matrices, on pose

$$\lambda = q - q^{-1}.$$

$$
\begin{pmatrix}
q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{q} & q^3-\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & q\lambda & 0 & 0 & -q^2\lambda & 0 & 0 & -q^2\lambda & 0 & 0 & q^3\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\lambda}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & q\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -q\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & q\lambda & 0 & 0 & q\lambda & 0 & 0 & -q\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q}
\end{pmatrix}
$$

FIGURE 1. La matrice $c_0 = c_{M,M|(M\hat{\otimes}M)_0}$ dans la base $(v_i \otimes v_j)_{1\leq i,j\leq 2 \text{ ou } 3\leq i,j\leq 6}$

On vérifie que les polynômes caractéristique et minimal de $c_{M,M}$ sont respectivement

$$(X-q)^{17}(X+q)(X+q^{-1})^{18} \quad \text{et} \quad (X+q)(X-q)(X+q^{-1}).$$

4.2. Catégorie rubanée associée à M. — Soit $\mathcal{C}_M$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $U_h(D_x)$-modules dont les objets sont les produits tensoriels finis itérés de M et M^*. Cette catégorie est une catégorie tensorielle d'objet unité $\mathbb{C}[[h]]$ et est munie d'une dualité induite par les applications

$$b_M : \mathbb{C}[[h]] \longrightarrow M \otimes M^*, \quad d_M : M^* \otimes M \longrightarrow \mathbb{C}[[h]]$$

définies par

$$b_M(1) = \sum_{i=1}^{6} v_i \otimes v^i \quad \text{et} \quad d_M(f \otimes x) = f(x)$$

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

FIGURE 2. La matrice $c_1 = c_{M,M|(M\hat{\otimes}M)_1}$ dans la base $(v_i \otimes v_j)_{1\le i\le 2,\, 3\le j\le 6 \text{ ou } 3\le i\le 6,\, 1\le j\le 2}$

avec $x \in M$ et $f \in M^*$. Cette catégorie est également rubanée (*cf.* §1.4). Le carré de l'inverse du twist est donné par la formule (lemme XIV.3.4 de [6])

$$\theta_M^{-2} = (d_M c_{M,M^*} \otimes \mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_M \otimes c_{M,M^*} b_M).$$

Comme $\alpha : M \to M^*$ est un isomorphisme, la naturalité du tressage donne

$$c_{M,M^*} = (\alpha^{-1} \otimes \mathrm{id}_M) c_{M,M} (\mathrm{id}_M \otimes \alpha).$$

Un calcul à l'aide de Maple montre que $\theta_M^2 = q^{-2}\,\mathrm{id}_M$. Par conséquent,

$$\theta_M = q^{-1}\,\mathrm{id}_M,$$

car $\theta_M \equiv \mathrm{id}_M \mod h$. Définissons les morphismes

$$b'_M = (\mathrm{id}_{M^*} \otimes \theta_M) c_{M,M^*} b_M : \mathbb{C}[[h]] \longrightarrow M^* \otimes M,$$

$$d'_M = d_M c_{M,M^*} (\theta_M \otimes \mathrm{id}_{M^*}) : M \otimes M^* \longrightarrow \mathbb{C}[[h]],$$

et posons

$$(4.1) \qquad \begin{cases} d = d_M(\alpha \otimes \mathrm{id}_M) : M \otimes M \to \mathbb{C}[[h]], \\ b = (\mathrm{id}_M \otimes \alpha^{-1}) b_M : \mathbb{C}[[h]] \to M \otimes M, \\ d' = d'_M(\mathrm{id}_M \otimes \alpha), \qquad b = (\alpha^{-1} \otimes \mathrm{id}_M) b_M. \end{cases}$$

LEMME 4.2. — *Nous avons les égalités suivantes :*

$$c_{M,M} - c_{M,M}^{-1} = (q - q^{-1})(\mathrm{id}_{M\otimes M} - bd),$$

$$(\mathrm{id}_M \otimes d)(c_{M,M} \otimes \mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_M \otimes b) = -q^{-1}\,\mathrm{id}_M,$$

$$db(1) = 2, \quad b' = -b, \quad d' = -d.$$

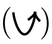
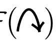
Démonstration. — Ces relations peuvent se vérifier à l'aide de Maple. On peut également montrer que les espaces propres de $c_{M,M}$ sont des sous-modules simples de $M \otimes M$. □

4.3. Invariant d'entrelacs associé. — Nous donnons dans ce paragraphe la démonstration du théorème 1.3. Notons $\mathcal{E}$ la catégorie dont les objets sont les suites finies de $+$ et de $-$, y compris la suite vide, et dont les morphismes sont engendrés par les enchevêtrements orientés. Pour plus de détails sur cette catégorie, on pourra consulter [17].

La catégorie $\mathcal{C}_M$ étant rubanée, on sait qu'il existe un unique foncteur monoidal $\mathcal{F} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}_M$ tel que

$$\mathcal{F}(+) = M, \qquad \mathcal{F}(-) = M^*,$$

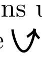
$$\mathcal{F}(\downarrow) = \mathrm{id}_M, \qquad \mathcal{F}(\uparrow) = \mathrm{id}_{M^*},$$

$\mathcal{F}($$) = c_{M,M}$, $\mathcal{F}($$) = b_M$, $\mathcal{F}($$) = d_M$,

et que si L est un entrelacs orienté parallélisé, alors

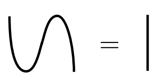
$$\mathcal{F}(L) \in \mathrm{End}_{U_h(D_x)}(\mathbb{C}[[h]]) \cong \mathbb{C}[[h]]$$

définit un invariant d'entrelacs.

Avant de démontrer le théorème 1.3, nous avons besoin des deux lemmes suivants. Soit L est un entrelacs orienté parallélisé. Fixons une représentation planaire de L et soit n_+ (resp. n_-) la somme du nombre de  et de  (resp.  et de ) apparaissant dans cette représentation.

LEMME 4.3. — *La parité des entiers n_+ et n_- ne dépend que de la classe d'isotopie de L. De plus, nous avons $n_+ \equiv n_- \mod 2$.*

Démonstration. — La première affirmation découle du fait que les mouvements de Reidemeister (pour les entrelacs parallélisés) ne changent pas la parité de n_+ et n_-. Il en est de même de l'égalité (orientation quelconque)



Pour démontrer l'égalité des congruences, considérons comme représentation planaire de L la clôture d'une tresse, à laquelle nous ajoutons, suivant la valeur du framing de L, un certain nombre de boucles. Il est clair que pour cette représentation, on a $n_+ = n_-$. □

Nous posons
$$\varepsilon(L) = (-1)^{n_+}.$$

LEMME 4.4. — *L'invariant $\mathcal{F}(L)$ est indépendant de l'orientation de L.*

Démonstration. — Notons $\widetilde{L}$ l'entrelacs L dont l'orientation d'une de ses composantes est inversée. Alors, d'après les lemmes 4.2 et 4.3, on a
$$\mathcal{F}(L) = \varepsilon(L)\widetilde{\mathcal{F}}(L),$$
où $\widetilde{\mathcal{F}}(L) \in \mathrm{End}_{U_h(D_x)}(\mathbb{C}[[h]])$ est le morphisme obtenu à partir de $\mathcal{F}(L)$ en remplaçant b_M et b'_M (resp. d_M et d'_M) par b (resp. d), ainsi que c_{M,M^*}, $c_{M^*,M}$, c_{M^*,M^*} (resp. c^{-1}_{M,M^*}, $c^{-1}_{M^*,M}$, $c^{-1}_{M^*,M^*}$) par $c_{M,M}$ (resp. $c^{-1}_{M,M}$). Comme $\varepsilon(L) = \varepsilon(\widetilde{L})$ et $\widetilde{\mathcal{F}}(L) = \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{L})$, le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème 1.3. — Nous reprenons les notations définies dans la démonstration du lemme précédent, et nous posons
$$\mathcal{I}_L = \varepsilon(L)\mathcal{F}(L) = \widetilde{\mathcal{F}}(L).$$
Les lemmes 4.3 et 4.4 assurent que $\mathcal{I}_L$ est bien un invariant d'un entrelacs parallélisé non orienté. De plus, d'après le lemme 4.2, cet invariant vérifie bien les relations skeins du polynôme de Dubrovnik, dans lequel on a posé $a = -q^{-1}$ et $z = q - q^{-1}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHAICHIAN (M.) & KULISH (P.) – *Quantum Lie superalgebras and q-oscillators*, Phys. Lett. B, t. **234** (1990), no. 1-2, pp. 72–80.

[2] DRINFELD (V.G.) – *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. **283** (1985), no. 5, pp. 1060–1064.

[3] FLOREANINI (R.), LEITES (D.A.) & VINET (L.) – *On the defining relations of quantum superalgebras*, Lett. Math. Phys., t. **23** (1991), no. 2, pp. 127–131.

[4] GOULD (M.D.), ZHANG (R.B.) & BRACKEN (A.J.) – *Quantum double construction for graded Hopf algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., t. **47** (1993), no. 3, pp. 353–375.

[5] KAC (V.G.) – *Lie superalgebras*, Advances in Math., t. **26** (1977), no. 1, pp. 8–96.

[6] KASSEL (C.) – *Quantum groups*, Graduate Texts in Math. vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] Kassel (C.), Rosso (M.) & Turaev (V.G.) – *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1997.

[8] Kauffman (L.H.) – *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **318** (1990), no. 2, pp. 417–471.

[9] Kirillov (A.N.) & Reshetikhin (N.) – *q-Weyl group and a multiplicative formula for universal R-matrices*, Comm. Math. Phys., t. **134** (1990), no. 2, pp. 421–431.

[10] Levendorskiĭ (S.Z.) & Soĭbelman (Ya.S.) – *Some applications of the quantum Weyl groups*, J. Geom. Phys., t. **7** (1990), no. 2, pp. 241–254.

[11] Lieberum (J.) – *On Vassiliev invariants not coming from semisimple Lie algebras*, J. Knot Theory Ramifications, t. **8** (1999), no. 5, pp. 659–666.

[12] Rosso (M.) – *An analogue of P.B.W. theorem and the universal R-matrix for* $U_h\mathrm{sl}(N+1)$, Comm. Math. Phys., t. **124** (1989), no. 2, pp. 307–318.

[13] ———, *The universal R-matrix for the quantum* $\mathrm{sl}(N)$*-group*, in *Knots, topology and quantum field theories (Florence, 1989)* (River Edge, NJ), World Sci. Publishing, 1989, pp. 497–506.

[14] Scheunert (M.) – *The presentation and q deformation of special linear Lie superalgebras*, J. Math. Phys., t. **34** (1993), no. 8, pp. 3780–3808.

[15] Tanisaki (T.) – *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras*, in *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)* (River Edge, NJ), World Sci. Publishing, 1992, pp. 941–961.

[16] Thys (H.) – *Groupes quantiques et catégories de diagrammes planaires*, Thèse, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 2000, preprint IRMA `http ://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2000/00038.shtml` .

[17] Turaev (V.G.) – *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, W. de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[18] Vogel (P.) – *Algebraic structures on modules of diagrams*, preprint 1995, à paraître dans *Inven. Math.*

[19] Yamane (H.) – *Quantized enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their universal R-matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. **30** (1994), no. 1, pp. 15–87.

[20] ———, *On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. **35** (1999), no. 3, pp. 321–390.

[21] Zhang (R.B.) – *Braid group representations arising from quantum supergroups with arbitrary q and link polynomials*, J. Math. Phys., t. **33** (1992), no. 11, pp. 3918–3930.

[22] ———, *Quantum supergroups and topological invariants of three-manifolds*, Rev. Math. Phys., t. **7** (1995), no. 5, pp. 809–831.

[23] ZHANG (R.B.) & GOULD (M.D.) – *Universal R-matrices and invariants of quantum supergroups*, J. Math. Phys., t. **32** (1991), no. 12, pp. 3261–3267.

[24] ZOU (Y.M.) – *Deformation of the universal enveloping algebra of* $\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, Canad. Math. Bull., t. **39** (1996), no. 4, pp. 499–506.