BULLETIN DE LA S. M. F.

CLAUDE VITERBO

Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 361-390

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__361_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 361-390.

INTERSECTION DE SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES, FONCTIONNELLES D'ACTION ET INDICE DES SYSTÈMES HAMILTONIENS

PAR

CLAUDE VITERBO (*)

RÉSUMÉ. — Étant données deux sous-variétés lagrangiennes L_1, L_2 d'une variété symplectique (M, ω), a et b deux points d'intersection transverses de $L_1 \cap L_2$, on définit — modulo des hypothèses naturelles — un entier $m(a, b)$ et un réel $l(a, b)$. On démontre que si L_2 est obtenue à partir de L_1 par une isotopie hamiltonienne φ_t, $m(a, b)$ et $l(a, b)$ s'identifient à la différence des indices de Morse et des valeurs critiques de diverses fonctionnelles classiques, dont les points critiques correspondent à $L_1 \cap L_2$.

Enfin on relie ce qui précède à une théorie des points conjugués pour un flot hamiltonien.

ABSTRACT. — Given two lagrangian submanifolds L_1, L_2 of a symplectic manifold (M, ω), and a, b two transverse intersection points of $L_1 \cap L_2$, we define – provided some natural hypothesis are satisfied – an integer $m(a, b)$ and a real number $l(a, b)$. We then show that if L_2 is obtained from L_1 by a hamiltonian isotopy φ_t, $m(a, b)$ and $l(a, b)$ can be identified with the difference of the Morse index and critical values of some known functionals whose critical points corrsspond to $L_1 \cap L_2$.

Finally we relate this to a theory of conjugate points for hamiltonian flows.

Dans cet article, on définit sous certaines conditions un entier m et un réel l, associés à une paire de points d'intersection de deux sous-variétés lagrangiennes. Ces nombres sont construits naturellement à partir des classes de Maslov et de Liouville; c'est l'objet du paragraphe 1.

Au paragraphe 2, on établit « l'invariance par réduction » de ces nombres, ce qui nous permet, au paragraphe 3, de les calculer aisément lorsque l'une des variétés est la section nulle du cotangent, et l'autre est donnée par une fonction génératrice (*cf.* prop. 5).

(*) Texte reçu le 21 mars 1986, revisé le 15 octobre 1986.

C. VITERBO, CEREMADE, U.A. n° 749, Place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/04 361 30/$5.00

Au paragraphe 4, on montre qu'en un sens que l'on précisera, les fonctionnelles d'action et celles d'action duale sont des fonctions génératrices, ce qui nous permet de montrer que toutes les théories d'indice pour les systèmes hamiltoniens construites jusqu'à présent (cf. [A-Z], [C-Z], [E 1], [V], coïncident au signe et à une constante près. En fait notre nombre m, généralise la différence des indices des orbites périodiques considérées.

Au paragraphe 5, on montre aussi comment cet indice peut se calculer à l'aide des points conjugués (on renvoie à [M], [D], [E 2], [Br] pour ce genre de résultat dans des cas particuliers).

Je remercie I. Ekeland, F. Laudenbach, J. C. Sikorav, A. Weinstein pour m'avoir chacun pour des raisons différentes incité à écrire cet article.

Une grande partie de celui-ci a été écrit durant un séjour de 5 mois à l'Institut Mittag-Leffler. Je désire remercier Monsieur le Professeur Lars Hörmander pour son hospitalité.

Je remercie enfin un rapporteur anonyme pour ses nombreuses remarques et corrections.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS. — On note $\Lambda_W(V)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de V transverses à W.

On note $[x]$ la partie entière du réel x.

1. Définition des nombres l et m associés à une paire de points d'intersection de deux sous-variétés lagrangiennes

Soit (M, ω) une variété symplectique, L_1, L_2 deux sous-variétés lagrangiennes s'intersectant transversalement en a et b. Soit γ_1 (resp. γ_2) un arc tracé sur L_1 (resp. L_2) joignant a et b, et $f: D^2 \to M$ une application de bord $\gamma=\gamma_1\gamma_2^{-1}$. D^2 étant contractile $f^*(TM)$ est un fibré symplectique trivial, dont toutes les trivialisations sont homotopes, on peut alors identifier $f^*(TM)$ à $D^2\times(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ où $\omega_0=\sum dx_i\wedge dy_i$ (¹).

Pour des raisons typographiques, on notera $\Lambda_W(V)$ par $\Lambda(W; V)$.

Supposant les arcs γ_1 et γ_2 paramétrés par $[0, 1]$, considérons un arc $\tilde{\tau}_2:[0,1]\to\Lambda(f^*(TM))$ tel que

(i) $$\tilde{\tau}_2(t)\in\Lambda(T_{\gamma_2(t)}L_2;\ T_{\gamma_2(t)}M)$$

(ii) $$\begin{cases}\tilde{\tau}_2(0)=T_{\gamma_2(0)}L_1=T_aL_1\\ \tilde{\tau}_2(1)=T_{\gamma_2(1)}L_1=T_bL_1.\end{cases}$$

Un tel arc existe et est unique à homotopie près, car on peut l'identifier à une section d'un fibré de base $[0, 1]$, fixée en 0 et 1, de fibre $\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{2n})$. $\Lambda(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{2n})$ étant contractile (*cf.* [G-S], p. 118, prop. 2.3) on conclut.

Posant $\tau_1(t)=T_{\gamma_1(t)}L_1$, $\tau=\tau_1.\tilde{\tau}_2^{-1}$ est un lacet de $\Lambda(f^*(TM))$. Comme $f^*(TM)\simeq D^2\times(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

$$\Lambda(f^*(TM))\simeq D^2\times\Lambda(n),\qquad \text{si}\quad \mu\in H^2(\Lambda(n), \mathbb{Z})$$

désigne la classe de Maslov, il existera une classe $\tilde{\mu}\in H^1(\Lambda(f^*(TM)); \mathbb{Z})$ induisant μ sur chaque fibre.

Remarque. — μ est l'un des deux générateurs de $H^1(\Lambda(n); \mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ défini comme suit :

D'après Arnold ([A], p. 347) μ est Poincaré duale de

$$\Sigma^1=\{T\in\Lambda(n)\mid T\cap\mathbb{R}^n\neq\{0\}\}$$

où $\mathbb{R}^n$ désigne le lagrangien $\mathbb{R}^n\times\{0\}\subset\mathbb{R}^{2n}$; Σ^1 étant orientée de la façon suivante :

Si $T\in\Lambda(n)$ est transverse à $\{0\}\times\mathbb{R}^n$, T est le graphe au-dessus de $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ de dQ où Q est une forme quadratique, non dégénérée si et seulement si $T\cap\mathbb{R}^n=\{0\}$. Σ^1 est traversée dans le sens positif si l'indice de Q diminue. Même si Σ^1 n'est pas une variété, son lieu singulier est de codimension 2, l'application $\gamma\to\gamma.\Sigma^1$ qui à γ associe son nombre

(¹) On suppose *a priori* l'existence de γ_1, γ_2, f. Cela sera toujours vrai en particulier si L_1, L_2 sont connexes, M simplement connexe.

d'intersection algébrique avec Σ^1 représente un élément de Hom $(H_1(\Lambda(n):\mathbb{Z})=H^1(\Lambda(n);\mathbb{Z})$: en effet tout lacet s'approxime par un lacet transverse à Σ^1, et deux telles approximations sont homotopes parmi les lacets transverses.

On dit alors par abus de langage que μ est Poincaré duale à Σ^1.

Notons qu'à cause de la transitivité de l'action du groupe symplectique sur $\Lambda(n)$ et de la connexité de ce groupe, on peut dans la définition des Σ^1 remplacer $\mathbb{R}^n$ par n'importe quel lagrangien T_0. μ est aussi duale de Poincaré de

$$\Sigma^1(T_0)=\{T\in\Lambda(n)\mid T\cap T_0\neq\{0\}\}.$$

On pose alors :

Définition 1. — $m(a, b, f)=\langle\bar{\mu}, \tau\rangle$.

C'est l'obstruction à trouver une section de $\Lambda f^*(TM)$ prolongeant τ_1 et $\tilde{\tau}_2$.

Remarque. — Suivant les cas, au lieu de $m(a, b, f)$ on notera $m(a, b, f, L_1, L_2)$ ou $m(a, b, L_1, L_2)$ si f est sous-entendu, ou $m(L_1, L_2)$ si a, b, f sont sous-entendus.

Examinons maintenant comment $m(a, b, f)$ dépend du choix de f. (Seul le corollaire 1 est utile pour la suite, on pourra l'admettre sans démonstration.)

Soient donc f et f' de bords respectifs $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ et $\gamma'_1\gamma_2'^{-1}$, construisons comme indiqué par les figures 1 et 2 l'application $g=f-f'$: $S^1\times[0, 1]\to M$.

Vu que $H^2(S^1\times[0, 1];\mathbb{Z})=0$, $g^*(TM)$ est un fibré trivial, il existe $\bar{\mu}(g)$ dans $H^1(\Lambda(g^*(TM);\mathbb{Z})$ induisant la classe de Maslov sur les fibres. On a alors clairement

$$(1)\qquad m(a, b, f)-m(a, b, f')=\langle\bar{\mu}(f-f'), \tau\rangle-\langle\bar{\mu}(f-f'), \tau'\rangle.$$

Notons que $\bar{\mu}(f-f')$ n'est pas unique, mais définie à l'addition d'une classe $\pi^*\alpha$ près ($\alpha\in H^1(S^2\times[0, 1];\mathbb{Z})$. Vu que $\pi(\tau)$ et $\pi(\tau')$ sont homologues,

$$\langle\pi^*\alpha, \tau\rangle-\langle\pi^*\alpha, \tau'\rangle=\langle\alpha, \pi(\tau)\rangle-\langle\alpha, \pi(\tau')\rangle=0$$

et le terme de droite de (1) est indépendant du choix de α.

Or $\tau.\tau'^{-1} \simeq (\tau_1 \tau_1'^{-1})(\tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_2'^{-1})^{-1}$ (où $\simeq$ désigne l'homologie des chemins).

Posons

$$\tau_2(t) = T_{\gamma_2(t)} L_2$$
$$\tau_2'(t) = T_{\gamma_2'(t)} L_2$$

alors les lacets $\tau_2 \tau_2'^{-1}$ et $\tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_2'^{-1}$ ont pour image en chaque point des sous-espaces lagrangiens transverses, ils sont donc homotopes : comme on le déduit aisément de [W] (p. 8 et 9), on peut en fait supposer

$$\tau_2 \tau_2'^{-1}(s) = J \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_2'^{-1}(s)$$

où J est une structure presque complexe sur TM; $\exp(uJ\pi/2)\tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_2'^{-1}$ est alors l'homotopie cherchée. On a donc :

PROPOSITION 1. — *Avec les notations qui précèdent,*

$$m(a, b, f) - m(a, b, f') = \langle \bar{\mu}(f - f'), (\tau_1 \tau_1'^{-1})(\tau_2 \tau_2'^{-1})^{-1} \rangle$$

(*on considère ici* $(\tau_1 \tau_1'^{-1})(\tau_2 \tau_2'^{-1})^{-1}$ *comme chemin dans* $g^*(TM)$).

Cette formule se simplifie essentiellement dans deux cas :

si $2c_1(M) = 0$ (où $c_1(M)$ désigne la première classe de Chern de TM muni d'une structure presque complexe compatible avec ω) on démontre dans l'appendice qu'il existe $\bar{\mu} \in H^1(\Lambda(TM), \mathbb{Z})$ induisant la classe de Maslov sur chaque fibre. Notons $\bar{\mu}(L_1) \in H^1(L_1, \mathbb{Z})$ l'image réciproque de $\bar{\mu}$ par l'application de Gauss de L_1 (de même pour $\bar{\mu}(L_2)$). On voit alors que l'on peut prendre

$$\bar{\mu}(f - f') = g^* \bar{\mu} \quad \text{et il est clair que}$$
$$\langle g^*(\bar{\mu}), (\tau_1 \tau_1'^{-1})(\tau_2 \tau_2'^{-1})^{-1} \rangle = \langle \bar{\mu}(L_1), \gamma_1 \gamma_1'^{-1} \rangle - \langle \bar{\mu}(L_2), \gamma_2 \gamma_2'^{-1} \rangle.$$

On a donc :

COROLLAIRE 1. — *Si* $2c_1(M) = 0$ *on a*

$$m(a, b, f) - m(a, b, f') = \langle \bar{\mu}(L_1), \gamma_1 \gamma_1'^{-1} \rangle - \langle \bar{\mu}(L_2), \gamma_2 \gamma_2'^{-1} \rangle.$$

Remarque. — Si $M = T^* L$ on a $2c_1(T^* L) = 0$. En effet $T(T^* L) = \pi^*(T_{|L}(T^* L))$ où $\pi : T^* L \to L$ est la projection canonique, et $T_{|L}(T^* L)$ la restriction à L de $T(T^* L)$. Comme $T_{|L}(T^* L) \simeq TL \otimes C$

(*cf.* [W], p. 9) on a $2c_1\ (T_{|L}(T^*L))=2c_1\ (TL\otimes C)=0$ (*cf.* [M-S], p. 174) d'où $2c_1(T^*L)=0$. Le corollaire 1 s'applique donc dans ce cas, $\bar{\mu}(L_1)$ étant la classe « Poincaré duale » de $\{x\in L_1/\ker d\pi(x)\neq 0\}$ orientée convenablement (de même pour $\bar{\mu}(L_2)$) :

En effet $\bar{\Sigma}^1=\{(x, L_x)\in\Lambda(TM)\,|\,L_x\cap\ker d\pi(x)\neq\{0\}\}$ rencontre la fibre en x suivant $\Sigma^1(\ker d\pi(x))$. Le « duàl de Poincaré » de $\bar{\Sigma}^1$ qui par abus de langage désigne la classe $\bar{\mu}\in H^1(\Lambda(TM);\ \mathbb{Z})=\mathrm{Hom}\ (H(\Lambda(TM);\ \mathbb{Z});\ \mathbb{Z})$ définie par

$$\langle\bar{\mu}, \gamma\rangle=\gamma.\bar{\Sigma}^1$$

induit manifestement μ sur les fibres.

L'image réciproque de $\bar{\Sigma}^1$ par l'application de Gauss de L_1 s'identifie à $\bar{S}^1=\{x\in L_1\,|\ker d\pi(x)\neq\{0\}\}$ d'où l'assertion.

Enfin, si $\partial f=\partial f'$ on démontre dans l'appendice :

COROLLAIRE 2. — *Si* $\partial f=\partial f'$ *on a*

$$m(a, b, f)-m(a, b, f')=2\langle c_1(M), f-f'\rangle.$$

Si $2c_1(M)=0$ ou si $\pi_1(M)=0$, l'ensemble des $m(a, b, f)-m(a, b, f')$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$: dans le premier cas, cela découle du corollaire 1, dans le second de ce que $m(a, b, f)-m(a, b, f')$ décrit l'ensemble des $\langle\bar{\mu}(g), \tau_1\rangle-\langle\bar{\mu}(g), \tau_2\rangle$ où $g: S^1\times[0, 1]\to M$ est telle que

$$g(S^1\times\{0\})\subset L_1\, g(S^1)\times\{1\})\subset L_2;$$

τ_1, τ_2 sont les pull back par $g|_{S^1\times\{0\}}$ et $g|_{S^1\times\{1\}}$ des applications de Gauss de L_1 et L_2. Étant données deux telles applications g, g', la simple connexité de M permet de construire $g''=g\# g'$ comme à la figure 3, et on vérifie que

$$\langle\bar{\mu}(g''), \tau''_1-\tau''_2\rangle=\langle\bar{\mu}(g), \tau_1-\tau_2\rangle-\langle\bar{\mu}(g'), \tau'_1-\tau'_2\rangle$$

d'où la structure de groupe.

On suppose pour la définition suivante que l'une de ces deux hypothèses est satisfaite, et on note $\Gamma(m)$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ ainsi obtenu.

DÉFINITION 2. — $m(a, b)$ est la valeur des projections des $m(a, b, f)$ dans $\mathbb{Z}/\Gamma(m)$.

La définition et les propriétés du nombre l sont bien plus simples; on pose :

DÉFINITION 3. — $l(a, b, f)=\int_{D^2} f^* \omega$

et il est immédiat que :

PROPOSITION 2. — $l(a, b, f)-l(a, b, f')=\langle \omega, f-f' \rangle$ *où*

$$\langle \omega, f-f' \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{S^1 \times [0, 1]} (f-f')^* \omega$$

Si la forme ω est exacte, posons $\omega=d\lambda$, on a :

COROLLAIRE 1. — $l(a, b, f)-l(a, b, f')=\int_{\gamma_1\gamma_1'^{-1}} \lambda-\int_{\gamma_2\gamma_2'^{-1}} \lambda.$

Ici les $l(a, b, f)-l(a, b, f')$ forment un sous-groupe de $\mathbb{R}$, noté $\Gamma(l)$, et on pose :

DÉFINITION 4. — $l(a, b)$ est la valeur commune des $l(a, b, f)$ dans $\mathbb{R}/\Gamma(l)$.

2. Comportement de $m(a, b)$ par réduction

Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique, $W \supset W^{\perp}$ un s. e. v. co-isotrope non lagrangien, alors $W/W^{\perp}$ est un e. v. symplectique, et on a une application $p: \Lambda_W(V) \to \Lambda(W/W^{\perp})$ qui à $T \subset \Lambda(W)$ transverse à W (i. e. $T \cap W^{\perp}=\{0\}$) associe sa projection sur $W/W^{\perp}$, que l'on notera $T/W^{\perp}$ (*cf.* [W], p. 11). Par ailleurs, on a une inclusion $i: \Lambda_W(V) \to \Lambda(V)$. Si $\mu \in H^1(\Lambda(V); \mathbb{Z})$, $\mu' \in H^1(\Lambda(W/W^{\perp}); \mathbb{Z})$ sont les classes de Maslov, on veut prouver $i^* \mu=p^* \mu'$.

Considérons pour cela un cycle Poincaré dual de μ, soit

$$\Sigma^1(T_0)=\{ T \in \Lambda(V) \mid T \cap T_0 \neq \{0\} \} \quad (\textit{cf.}\ [\mathrm{A}],\ \mathrm{p.}\ 347).$$

Choisissons T_0 tel que $W^{\perp} \subset T_0 \subset W$, ce qui est toujours possible (car $W^{\perp}$ est un s. e. v. totalement isotrope qui peut toujours se compléter en un s. e. v. totalement isotrope maximal, c'est-à-dire lagrangien; *cf.* [AT], p. 120, th. 3.10).

Rappelons que comme $H^1(.; \mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(H_1(.; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$, la classe de Maslov correspond à l'élément $\gamma \to \gamma . \Sigma^1(T_0)$ de $\mathrm{Hom}(H_1(\Lambda(n); \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$

qui associe à γ son nombre d'intersection algébrique avec $\Sigma^1(T_0)$ convenablement orientée (*cf.* § 1).

Si on démontre que $i^{-1}(\Sigma^1(T_0))=p^{-1}(\Sigma^1(T_0'))$ (où $T_0'=T_0/W^\perp$); comme i et p sont des submersions, on aura :

$$i(\gamma).\Sigma^1(T_0)=\gamma.i^{-1}(\Sigma^1(T_0))=\gamma.p^{-1}(\Sigma^1(T_0'))=p(\gamma).\Sigma^1(T_0').$$

Comme $i(\gamma).\Sigma^1(T_0)$ et $p(\gamma).\Sigma^1\ (T_0')$ définissent respectivement $\langle i^*\mu, \gamma\rangle$ et $\langle p^*\mu', \gamma\rangle$, on aura $i^*\mu=p^*\mu'$.

Il reste à vérifier l'égalité $i^{-1}(\Sigma^1(T_0))=p^{-1}(\Sigma^1(T_0'))$. Or

$$i^{-1}(\Sigma^1(T_0))=\{T\in\Lambda(V)\mid T\cap W^\perp=\{0\} \text{ et } T\cap T_0\neq\{0\}\}$$

$$p^{-1}(\Sigma^1(T_0')=\{T\in\Lambda(V)\mid T\cap W^\perp=\{0\}$$
$$\text{et } ((T\cap W)/W^\perp)\cap T_0'\neq\{0\}\}.$$

Soit alors $T\in p^{-1}(\Sigma^1(T_0'))$, on a

$$((T\cap W)/W^\perp)\cap(T_0/W^\perp)=(T\cap W\cap T_0)/W^\perp\simeq T\cap W\cap T_0$$

car $T\cap W^\perp=\{0\}$.

Comme $T_0\subset W$, $T\cap W\cap T_0=T\cap T_0$ d'où $((T\cap W)/W^\perp)\cap(T_0/W^\perp)\neq\{0\}$ équivaut à $T\cap T_0\neq\{0\}$, c'est-à-dire $T\in i^{-1}(\Sigma^1(T_0))$, d'où l'égalité annoncée.

Rappelons maintenant que si Q est une sous-variété co-isotrope de (M, ω), la distribution $(TQ)^\perp$ est intégrable et définit donc un feuilletage de Q noté $Q^\perp$ (*cf.* [W], p. 11). Si L est une sous-variété lagrangienne de (M, ω) ayant une intersection propre (i. e. clean intersection au sens de Bott, *cf.* [W], p. 12) avec Q, alors $L_Q=L\cap Q/Q^\perp$ est une sous-variété lagrangienne de $M_Q=Q/Q^\perp$, pourvu que M_Q soit une variété. On suppose dans la suite que Q n'est pas lagrangienne, d'où $\dim M_Q\geqslant 2$.

Revenons à L_1 et L_2 du paragraphe 1, on suppose L_1 transverse à Q, et L_2 contenue dans Q. $L_{1,Q}$ et $L_{2,Q}$ auront comme points d'intersection transverse les projections de a et b sur M_Q. Alors,

Proposition 3. — *Si M_Q est une variété, et si $f: D^2\to M$ a son image dans Q*

$$m(a, b, f_Q, L_{1,Q}, L_{2,Q})=m(a, b, f, L_1, L_2)$$

où f_Q est la composée de f et de la projection sur M_Q.

Démonstration. — Vu que $\tau_1(t)=T_{\gamma_1(t)}L_1$

$$\tilde{\tau}_2(t) \text{ est transverse à } T_{\gamma_2(t)}L_2$$

que L_1 est transverse à Q, L_2 incluse dans Q, on voit que $\tau_1(t)$ et $\tilde{\tau}_2(t)$ sont dans $f^*\Lambda(TQ;\ TM)$; donc τ aussi.

Si $\bar{i}$ désigne l'inclusion de $f^*\Lambda(TQ;\ TM)$ dans $f^*\Lambda(TM)$ et $\bar{p}$ la projection de $f^*\Lambda(TQ;\ TM)$ dans $f^*\Lambda(TM_Q)$, $\bar{i}$ et $\bar{p}$ induisent i et p sur les fibres, et on voit aisément que $\bar{i}^*\mu=\bar{p}^*\mu'$. τ étant dans $f^*\Lambda(TQ;\ TM)$, on peut l'identifier à $\bar{i}(\tau)$. Alors

$$\begin{aligned} m(a, b, f, L_1, L_2) &= \langle \mu, \tau \rangle = \langle \mu, \bar{i}(\tau) \rangle \\ &= \langle \bar{i}^*(\mu), \tau \rangle = \langle \bar{p}^*(\mu'), \tau \rangle \\ &= \langle \mu', \bar{p}(\tau) \rangle = m(a, b, f_Q, L_{1,Q}, L_{2,Q}) \end{aligned}$$

d'où la proposition.

On laisse en exercice la :

PROPOSITION 4. — $l(a, b, f, L_1, L_2)=l(a, b, f_Q, L_{1,Q}, L_{2,Q})$.

3. Applications du paragraphe 2 au calcul de l et m dans $M=T^*L$ avec L_1 donnée par une fonction génératrice, et L_2 section nulle de T^*L

Rappelons brièvement la notion de fonction génératrice. Soit $E \xrightarrow{\pi} L$ un fibré vectoriel (ou une submersion quelconque) q la projection de T^*L sur L, on a alors un plongement $\alpha: q^*(E) \to T^*E$ défini par

$$\alpha(e, l, \xi)=(e, \xi \circ d\pi(e))$$

où

$$\pi(e)=l, \qquad \xi \in T^*L \quad \text{d'où } (e, l, \xi) \in q^*(E).$$

Notons π' : $q^*(E) \to T^*L$ la projection naturelle, on a alors notant λ toutes les formes de Liouville, $\alpha^*\lambda=\pi'^*\lambda$, d'où si $\omega=d\lambda$, $\alpha^*\omega=\pi'^*\omega$, $\alpha q^*(E)$ est donc une sous-variété de T^*E co-isotrope et sa variété réduite est T^*L. Maintenant si $S: E \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que $dS(E) \subset T^*E$ soit transverse à $\alpha(q^*(E))$, la réduction de $dS(E)$ par

$\alpha(q^*(E))$ est une sous-variété lagrangienne immergée de T^*L, on dit que c'est la sous-variété donnée par la fonction génératrice S (*cf.* [W], p. 25, 26).

Rappelons que dans ce cas $\mu(L_1)=\mu(L_2)=0$: il est clair que $\mu(dS(E))=0$, et l'invariance de la classe de Maslov par réduction, démontrée au paragraphe 2 permet d'en déduire $\mu(L_1)=0$ (le cas de L_2 est trivial). Par suite, en utilisant la remarque suivant le corollaire 1 de la proposition 1, $m(a, b, f)$ ne dépend pas de f, et $m(a, b)$ est défini dans $\mathbb{Z}$. De même $l(a, b)$ est un élément de $\mathbb{R}$. On a alors :

PROPOSITION 5. — *Si L_1 est donnée par la fonction génératrice S, L_2 est la section nulle de T^*L, et si L_1 et L_2 sont transverses*

$$m(a, b) = -\text{indice}\, d^2 S(b) + \text{indice}\, d^2 S(a)$$
$$l(a, b) = S(b) - S(a)$$

pourvu que $d^2 S(a)$ et $d^2 S(b)$ soient non dégénérées.

Démonstration. — D'après les propositions 3 et 4 du paragraphe 2, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $L_1 = dS(L)$ pour une fonction $S: L \to \mathbb{R}$ ([2]).

Avec les notations du paragraphe 2, choisissons pour γ_2 un arc injectif reliant a et b dans L, et γ_1 le relevé de γ_2 sur $dS(L)$. Soit U un voisinage de γ_2 dans L, on peut supposer que U est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et comme tout se passe dans $T^*U \subset T^*\mathbb{R}^n$, on s'est ramené au cas où $L = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $\Lambda(T(T^*\mathbb{R}^n))$ s'identifie canoniquement à $T^*\mathbb{R}^n \times \Lambda(n)$. Si $T_0 \in \Lambda(n)$ désigne $\mathbb{R}^n \subset T^*\mathbb{R}^n$ considéré comme la section nulle, $\bar{\mu}$ sera Poincaré duale de $T^*\mathbb{R}^n \times \Sigma^1(T_0)$. Calculons donc le nombre d'intersection de τ et $T^*\mathbb{R}^n \times \Sigma^1(T_0)$. Comme $T_{\gamma_2(t)}L$ s'identifie à T_0, $\tilde{\tau}_2$ est transverse à T_0 donc ne rencontre pas $\Sigma^1(T_0)$. Pour $\tau_1(t) = T_{\gamma_1(t)}L_1$ on a

$$T_{\gamma_1(t)}L_1 \cap T_0 \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}(\gamma_1(t))$$

non inversible. Il s'agit donc de compter les points où $d^2 S$ dégénère et d'après [A], on compte positivement lorsque l'indice de $d^2 S$ diminue, le résultat est alors clair.

([2]) Notons que l'on peut toujours déformer f pour que son image soit dans $\alpha q^*(E)$.

L'assertion concernant $l(a, b)$ résulte de ce que la forme de Liouville a pour image réciproque dS sur L_1 et 0 sur L_2. Ceci termine la démonstration.

4. La fonctionnelle d'action directe et la fonctionnelle d'action duale vues comme fonctions génératrices

(*a*) *Le cas « direct »*

Soit $H(t, q, p)$ un hamiltonien dépendant du temps sur $T^* L$, φ_t son flot, $L_1=\varphi_1(L)$, $L_2=L$. Si $\gamma\in\mathscr{P}=\{\gamma=(q, p):[0, 1]\to T^* L \mid \gamma$ est C^1 et $p(0)=0\}$ on pose

$$\tilde{S}(\gamma)=\int_0^1 [p\dot{q}-H(t, q, p)]\,dt.$$

On a une fibration $\pi:\mathscr{P}\to L$ donnée par $\pi(\gamma)=q(1)$. Démontrons qu'au moins formellement (car $\mathscr{P}$ est de dimension infinie), $\tilde{S}$ est fonction génératrice de L_1. Or on a (toujours formellement)

$$d\tilde{S}(\gamma)(\delta p, \delta q)=\int_0^1 [p\,\delta\dot{q}+\delta p\dot{q}-d\mathrm{H}(t, q, p)(\delta q, \delta p)]\,dt$$

$$=p\,\delta q]_0^1+\int_0^1\left[\dot{q}\,\delta p-\dot{p}\,\delta q-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right]dt$$

d'où

$$(2)\quad d\tilde{S}(\gamma)(\delta p, \delta q)=p(1)\,\delta q(1)+\int_0^1\left[\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p-\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right]dt.$$

Cherchons les γ pour lesquels $d\tilde{S}(\gamma)$ s'annule sur $\ker d\pi$. Or $\delta\gamma\in T_\gamma\mathscr{P}\cap\ker d\pi$ se traduit par

$$\delta p(0)=0 \quad \text{car } \delta\gamma \text{ est tangent à } \mathscr{P}$$

$$\delta q(1)=0 \quad \text{car } \delta\gamma \text{ est dans le noyau de } d\pi.$$

On veut que $d\tilde{S}(\gamma)$ s'annule pour tous les $\delta\gamma$ vérifiant les deux conditions précédentes, et il est facile de voir grâce à la formule (2) que cela entraîne

$$\dot{q}(t)=\frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p), \qquad \dot{p}(t)=-\frac{\partial H}{\partial q}(t, q, p), \qquad \forall t\in[0, 1]$$

c'est-à-dire $(q(t), p(t))=\varphi_t(q(0), 0)$. D'autre part $\partial\tilde{S}/\partial(q(1))=p(1)$ toujours en utilisant la formule (2) et donc $\tilde{S}$ est fonction génératrice de l'immersion

$$\{\gamma\in\mathscr{P}\,|\,\gamma(t)=\varphi_t(q(0), 0)\}\to T^*L$$
$$\gamma\to\gamma(1)=\varphi_1(q(0), 0)$$

i. e. $\tilde{S}$ est « fonction génératrice » de $\varphi_1(L)$.

En dehors du fait que ce qui précède est purement formel, on ne peut appliquer la proposition 5 du paragraphe 3, car l'indice et le coïncide de $d^2\tilde{S}$ sont infinis. Par contre, si S désigne la réduction à la dimension finie de $\tilde{S}$ définie dans [L-S] (suivant une idée de M. Chaperon, *cf.* [C]) on a :

Proposition 6. — *Soient a et b deux points d'intersection transverses de $\varphi_1(L)\cap L$, notant*

$$\gamma_a(t)=\varphi_t(\varphi_1^{-1}(a)),\qquad \gamma_b(t)=\varphi_t(\varphi_1^{-1}(b))$$
$$m(a, b)=-\textit{indice}\, d^2S(\gamma_b)+\textit{indice}\, d^2S(\gamma_a)$$
$$l(a, b)=S(\gamma_b)-S(\gamma_a)$$

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de la proposition 5 si on démontre que S est une fonction génératrice de $\varphi_1(L)$. Pour simplifier, on se contentera de définir S et de démontrer la proposition 6 dans le cas où $M=T^*\mathbf{R}^n$. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [L-S] et [S] pour la définition générale de S, et vérifier que notre démonstration est encore valable dans ce cas.

Supposons donc $M=T^*\mathbf{R}^n$, et définissons S comme dans [C]; soit

$$E=\left\{\gamma:[0, 1]\to T^*\mathbf{R}^n\,|\,\gamma(t)=\varphi_t\,\varphi_{(i-1)/N}^{-1}\left(\gamma\left(\frac{i-1}{N}\right)\right),\right.$$
$$\left.\forall t\in\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[, \forall i\in\{1, \ldots, N\};\ \text{et}\ \gamma(0)\in\mathbb{R}^n\right\}$$

on pose

$$\gamma(t)=(q(t), p(t)),\qquad (q_i^+, p_i^+)=\gamma\left(\frac{i}{n}\right)$$

et

$$(\bar{q}_i, \bar{p}_i)=\lim_{t\to(i/N)^-}\gamma(t).$$

E est donc l'ensemble des chemins ayant des discontinuités aux points i/N, et qui sont trajectoires de φ_t en dehors de ces points.

On a une fibration $\pi: E \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\pi(\gamma)=q_N^-$ pourvu que N soit assez grand (*cf.* [C]). On pose alors

$$S(\gamma)=\sum_{i=1}^{N-1}\langle p_i^+, q_i^+ - q_i^-\rangle+\sum_{i=1}^{N}\int_{(i-1)/N}^{i/N}[p\dot{q}-H(t, q, p)]\,dt$$

on vérifie que

$$\begin{aligned} dS(\gamma)=&\sum_{i=1}^{N-1}\langle \delta p_i^+, q_i^+ - q_i^-\rangle+\langle p_i^+, \delta q_i^+ - \delta q_i^-\rangle \\ &+\sum_{i=1}^{N}\langle p_i^-, \delta q_i^-\rangle-\langle p_{i-1}^+, \delta q_{i-1}^+\rangle \\ =&\sum_{i=1}^{N-1}\langle \delta p_i^+, q_i^+ - q_i^-\rangle-\sum_{i=1}^{N-1}\langle p_i^+ - p_i^-, \delta q_i^-\rangle+\langle p_N^-, \delta q_N^-\rangle. \end{aligned}$$

Toujours d'après [C] les $((q_1^-, p_1^+), \ldots, (q_{N-1}^-, p_{N-1}^+), q_N^-)$ forment un système local de coordonnées sur E, S est donc génératrice de l'immersion

$$\left\{\gamma\in E \,\middle|\, \frac{\partial S}{\partial p_i^+}=\frac{\partial S}{\partial q_i^-}=0,\ \forall i\in\{1, \ldots, N-1\}\right\}\to T^*\mathbb{R}^n$$

$$\gamma\to\left(q_N^-, \frac{\partial S}{\partial q_N^-}\right)$$

or $\partial S/\partial p_i^+ = \partial S/\partial q_i^- = 0$ est équivalent à $q_i^+ = q_i^-$, $p_i^+ = p_i^-$, c'est-à-dire que la trajectoire brisée γ est une vraie trajectoire, i.e. $\gamma(t)=\varphi_t(q_0, 0)$. Comme

$$\frac{\partial S}{\partial q_N^-}=p_N^-, \qquad (q_N^-, p_N^-)=\gamma(1)=\varphi_1(q_0, 0)$$

et S est bien génératrice de φ_1. Notons que d'après [C], γ_a correspond à un point critique non dégénéré de S si et seulement si a est un point d'intersection transverse de $L \cap \varphi_1(L)$.

De la proposition 6, on déduit immédiatement :

Corollaire. — *Indice $d^2 S(a)$ − indice $d^2 S(b)$ et $S(a)-S(b)$ ne dépendent que de φ_1, et non de la famille φ_t.*

Remarque. — Supposons $L=\mathbb{R}^n$, et considérons l'analogue de la réduction à la dimension finie définie dans [C-Z]. Pour $\gamma=(q, p)$ dans l'espace

$W^{1,2}([0, 1], \mathbb{R}^{2n}) \cap \{\gamma \mid p(0)=0\}$ posons $\dot{\gamma}=u+v$ où

$$u=\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi kJt} u_k \in E_N$$
$$v=\sum_{|k|>N} e^{2\pi kJt} v_k \in F_N.$$

Rappelons que $\gamma(t)=\left(q(1)-\int_t^1 \dot{q}, \int_0^t \dot{p}\right)$; alors pour N assez grand (en supposant H'' borné) on peut définir une application $(q(1), u) \to v(q(1), u)$ par la condition $\dot{\gamma} \in u+F_N$ et

$$\dot{\gamma}-J\nabla H(t, \gamma(t)) \in (F_N)^{\perp}=E_N$$

(*cf.* [C-Z]) ssi $\dot{\gamma}=u+v(q(1), u)$.

On peut alors poser $\Sigma(q(1), u)=\tilde{S}(\gamma)$ et on vérifie que Σ est une fonction génératrice de $\varphi_1(L)$. On en déduit :

PROPOSITION 6′. — *Pour $L=\mathbb{R}^n$, la proposition* 6 *reste vraie si on remplace S par* Σ.

COROLLAIRE. — *Soit $j(\gamma_a)$ l'indice de γ_a défini dans* [C-Z]. *On a alors*

$$m(a, b)=j(\gamma_b)-j(\gamma_a).$$

Démonstration. — Elle résulte de ce que d'après [C-Z]

$$\operatorname{ind} d^2\Sigma(a)=\frac{1}{2}\dim E_N-j(\gamma_a)$$

et de même pour (b).

(b) *Le cas « dual ».* — Soit maintenant $M=T^*\mathbb{R}^n$, ω étant la forme canonique, $H(t, q, p)$ un hamiltonien tel que $H''(t, q, p)$ soit bornée (comme d'habitude $H''(t, q, p)$ désigne la différentielle seconde de H par rapport aux variables (q, p)). Soit alors K un réel positif, tel que $H''(t, q, p)+KI$ soit définie positive, c'est-à-dire

$$H(t, q, p)+\frac{K}{2}(|q|^2+|p|^2)=H_K(t, q, p)$$

sera convexe. On définit alors classiquement la duale de Fenchel de H_K par

$$H_K^*(t, x, y)=\sup_{(q, p)}(x, q)+(y, p)-H_K(t, q, p)$$

dont la propriété essentielle est que les applications

$$(q, p) \to \nabla H_K(t, q, p)$$

$$(x, y) \to \nabla H_K^*(t, x, y)$$

sont inverses l'un de l'autre.

Posons alors pour $\gamma \in \mathscr{P}$

$$\tilde{S}_K^*(\gamma) = \int_0^1 \left[q \cdot \dot{p} - \frac{K}{2}(|q|^2 + |p|^2) + H_K^*(t, -\dot{p} + Kq, \dot{q} + Kp) \right] dt$$

$\tilde{S}_K^*$ est la fonctionnelle d'action duale, définie — dans un cadre légèrement différent — dans [Cl] et [C-E] dans le cas où H est convexe, et dans [B-L-M-R] pour H quelconque. $\tilde{S}_K^*$ est C^1, et on vérifie aisément que

$$(3) \quad d\tilde{S}_K^*(\gamma)\delta\gamma = p(1)\delta q(1) + \int_0^1 \left[q - \frac{\partial}{\partial x} H_K^*(t, -\dot{p} + Kq, \dot{q} + Kp) \right] (-\delta\dot{p} + K\delta q)\, dt - \int_0^1 \left(p - \frac{\partial}{\partial y} H_K^*(t, -\dot{p} + Kq, \dot{q} + Kp) \right) (\delta\dot{q} + K\delta p)\, dt$$

comme l'application

$$\{(\delta q, \delta p) \in C^1([0, 1], T^* \mathbb{R}^n) / \delta q(1) = \delta p(0) = 0\} \to C^0([0, 1], T^* \mathbb{R}^n)$$

$$(\delta q, \delta p) \to (-\delta\dot{p} + K\delta q, \delta\dot{q} + K\delta p)$$

est surjective si $KT/2\pi \notin \mathbb{Z}$ ([3]), on en déduit que $\tilde{S}_K^*$ est la « fonction génératrice » de l'immersion dans $T^* \mathbf{R}^n$, $\gamma \to \gamma(1)$, de l'ensemble des γ

([3]) Ce que l'on suppose dans la suite.

vérifiant

$$q-\frac{\partial}{\partial x}H_K^*(t, -\dot p+Kq, \dot q+Kp)=0$$

$$p-\frac{\partial}{\partial y}H_K^*(t, -\dot p+Kq, \dot q+Kp)=0$$

qui en utilisant la propriété de H_K^* citée plus haut équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial q}H_K(t, q, p)=-\dot p+Kq$$

$$\frac{\partial}{\partial p}H_K(t, q, p)=\dot q+Kp$$

ou encore

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p)$$

$$\dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}(t, q, p)$$

soit

$$(q(t), p(t))=\varphi_t(q(0), 0)$$

c'est-à-dire que $\tilde S_K^*$ est « fonction génératrice » de $\varphi_1(\mathbb{R}^N)$. Si les résultats des paragraphes 1, 2, 3 étaient convenablement étendus à la dimension infinie on aurait démontré :

PROPOSITION 7. — $m(a, b)=-indice\ d^2\tilde S_K^*(\gamma_b)+indice\, d^2\tilde S_K(\gamma_a)$

$$l(a, b)=\tilde S_K^*(\gamma_b)-\tilde S_K^*(\gamma_a)$$

avec les hypothèses et les notations de la proposition 6.

Démonstration. — Restant dans l'esprit de ce qui précède, indiquons une réduction à la dimension finie qui soit aussi une fonction génératrice de $\varphi_1(L)$, et dont l'indice de Morse en un point critique coïncide avec celui de $\tilde S_K^*$. La réduction que l'on va décrire est à quelques détails près celle de [E1] dans le cas convexe et de [V] dans le cas général.

Soit $E\to L$ la fibration utilisée pour définir S (*cf.* la proposition 6), si $\gamma=(q, p)\in E$, posons

$$u=(\dot q+Kp, \dot p-Kq)$$

alors u est L^2 et C^0 par morceaux, donc $\bar{\gamma}$ défini par

$$\bar{q}(t)=q(1)-\int_t^1 e^{-KJs}(\dot{q}+Kp)(s)\,ds$$

$$\bar{p}(t)=\int_0^t e^{-KJs}(\dot{p}-Kq)(s)\,ds$$

(où J est l'opérateur linéaire défini par $J(q, p)=(-p, q)$) est continu (car dans H^1) et C^1 par morceaux. Posons alors $S_K^*(\gamma)=\tilde{S}_K^*(\bar{\gamma})$, et notons que $\gamma \to \bar{\gamma}$ est un difféomorphisme de E sur son image, qui préserve les fibrations $\gamma \to q(1)$ et $\bar{\gamma} \to \bar{q}(1)$.

Dans la suite, afin de simplifier les écritures, on supposera $K=0$, pour revenir au cas général, le lecteur n'aura qu'à substituer $e^{-KJs}(\dot{q}+Kp)$ à $\dot{q}$ et $e^{-KJs}(\dot{p}-Kq)$ à $\dot{p}$. Alors on a, utilisant (3)

$$dS_K^*(\gamma)\,\delta\gamma=d\tilde{S}_K^*(\bar{\gamma})\,\delta\bar{\gamma}$$

$$=\bar{p}(1)\,\delta\bar{q}(1)+\int_0^1\left[\bar{q}-\frac{\partial}{\partial x}H^*(t, -\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{q}})\right]\delta\dot{\bar{p}}\,dt$$

$$+\int_0^1\left[\bar{p}-\frac{\partial}{\partial y}H^*(t, -\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{q}})\right]\delta\dot{\bar{q}}\,dt.$$

Or sur $[(i-1)/N, i/N[$

$$(\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{q}})=(\dot{q}, \dot{p})$$

et

$$q=\frac{\partial}{\partial x}H^*(t, -\dot{p}, \dot{q})$$

$$p=\frac{\partial}{\partial y}H^*(t, -\dot{p}, \dot{q})$$

car $(q(t), p(t))$ est sur $[(i-1)/N, i/N[$ une trajectoire du flot hamiltonien de H. Par ailleurs, sur ce même intervalle $\bar{q}-q$ et $\bar{p}-p$ sont constantes, d'où

$$d\tilde{S}_K^*(\bar{\gamma})\,\delta\bar{\gamma}=\bar{p}(1)\,\delta\bar{q}(1)+\sum_{i=1}^{N}\left\langle \bar{q}\left(\frac{i-1}{N}\right)-q\left(\frac{i-1}{N}\right),\ \delta(\Delta p_i)\right\rangle$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\left\langle \bar{p}\left(\frac{i-1}{N}\right)-p\left(\frac{i-1}{N}\right),\ \delta(\Delta q_i)\right\rangle$$

où

$$(\Delta q_i,\ \Delta p_i)=(q_i^- - q_{i-1}^+,\ p_i^- - p_{i-1}^+)$$

ici comme dans la démonstration de la proposition 6, on a posé :

$$(q_i^-,\ p_i^-)=\gamma\left(\frac{i}{N}\right), \qquad (q_i^+,\ p_i^+)=\lim_{t\to(i/N)^-}\gamma(t)$$

(si $K\neq 0$ $(\Delta q_i,\ \Delta p_i)=e^{KJ/N}(q_i^-,\ p_i^-)-(q_{i-1}^+,\ p_{i-1}^+))$ et on déduit de [E], p. 39, lemme 9 (si $K\neq 0$ de [V], p. 7, proposition 2) que

$$((\Delta q_1,\ \Delta p_1),\ \ldots,\ (\Delta q_N,\ \Delta p_N),\ q(1))$$

forment un système de coordonnées de E, d'où l'on tire immédiatement que S_K^* est fonction génératrice de $\varphi_1(\mathbb{R}^N)$.

Il reste à démontrer que si γ est un point critique de S_K^*, l'indice de $d^2 S_K^*(\gamma)$ égale celui de $d^2\tilde{S}_K^*(\bar{\gamma})$. L'immersion $\gamma\to\bar{\gamma}$ nous permet de dire que nécessairement indice $d^2\tilde{S}_K^*(\bar{\gamma})\geqslant$ indice $d^2 S_K^*(\gamma)$, l'inégalité inverse se démontre comme dans [E1], p. 42, lemme 11, en approximant les vecteurs du sous-espace négatif de $d^2 S_K^*(\gamma)$ par des vecteurs tangents à l'image de l'immersion $\gamma\to\bar{\gamma}$. Ceci termine la démonstration de la proposition 7.

5. Lien avec les points conjugués

Pour simplifier l'exposé, on supposera ici que $M=(\mathbb{R}^{2n},\ \omega_0)$. On indiquera à la fin de ce paragraphe comment les résultats obtenus s'étendent au cas général.

Si $\gamma(t)=(q(t),\ p(t))$ est une orbite du flot hamiltonien φ_t de $H(t,\ q,\ p)$ telle que $p(0)=p(1)=0$, on pose (*cf.* [M], [E2]).

DÉFINITION 5. — (1) On dit que $\delta\gamma(t)=(\delta q(t),\ \delta p(t))$ est un champ de Jacobi le long de γ si on a $\delta p(0)=0$ et $\delta\gamma(t)=d\varphi_t(\gamma(0))\,\delta\gamma(0)$.

(2) Les instants 0 et t seront dits conjugués le long de γ si l'espace vectoriel $\mathscr{J}(t)$ des champs de Jacobi le long de γ tels que $\delta p(t)=0$ n'est pas réduit à 0.

Sur $\mathscr{J}(t)$ la forme quadratique

$$\delta\gamma \to -(H''(t, \gamma(t))\,\delta\gamma(t), \delta\gamma(t))$$

a une signature notée $\sigma(t)$ et une nullité $\nu(t)$.

Remarques. — (1) La signature est définie comme le coindice moins l'indice.

(2) On pose par convention $\sigma(0)=\text{indice } H''(0, \gamma(0))$ sur $\mathscr{J}(0) \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

On a alors :

PROPOSITION 8. — *Supposons* $\nu(t)=0$, $\forall\, t\in[0, 1]$, t *conjugué à* 0. *Alors, posant* $i(\gamma)=\sum_{t\in[0,\,1]}\sigma(t)$, *on a pour* γ_a *et* γ_b *comme dans la proposition* 6 $m(a, b)=i(\gamma_a)-i(\gamma_b)$.

La proposition et sa démonstration s'inspirent de [E2], th. 6, p. 9.

Démonstration. — Elle utilise la proposition 7. On va en fait démontrer que $i(\gamma)+n[K/\pi]=\operatorname{ind} d^2\tilde{S}^*_K(\gamma)$. Posons

$$z(t)=(x(t), y(t)) \qquad \text{et} \qquad H''(t, \gamma(t))=A(t).$$

On a alors

$$d^2\tilde{S}^*_K(\gamma)(z, z)=x(1).y(1)+\int_0^1 (J\dot{z}-Kz, z)\,ds$$
$$+\int_0^1 ((A(s)+K)^{-1}J\dot{z}-Kz, J\dot{z}-Kz)\,ds.$$

On utilisera le :

LEMME. — *Soit* Q^t *une famille* C^1 *de formes quadratiques sur un Hilbert, telle que* Q^t *soit non dégénérée pour* $t\neq 0$ *et que* $Q^t=U_t+C_t$ *où* U_t *est définie positive, d'inverse continue, et* C_t *compacte.*

Alors si $\partial/\partial t\, Q^t\,|_{t=0}$ *restreinte à* $\ker Q^0$ *est de signature* σ *et de nullité* ν, *on a*

$$\sigma-\nu \leqslant \textit{indice } Q^{-1}-\textit{indice } Q^{+1} \leqslant \sigma+\nu.$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Soit alors $t_0 \in]0, 1[$ et soit $z \in \ker Q^{t_0}$ où $z=(x, y)$ et

$$Q^t(z, z)=tx(1)y(1)+\int_0^1 (J\dot z-Ktz, tz)\,ds$$
$$+\int_0^1 ((A(st)+K)^{-1} J\dot z-Ktz, J\dot z-Ktz)\,ds.$$

(*Remarque.* –

$$Q^t(z, z)=tv(t)w(t)+\int_0^t (J\dot u-Ku, u)\,ds+\int_0^t ((A(s)+K)^{-1} J\dot u-Ku, J\dot u-Ku)\,ds$$

où on a posé $u(s)=(v(s), w(s))=z(s/t)$.)

Soit alors t_0 tel que

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} J\dot z-Kt_0 z=0 \\ y(1)=y(0)=0 \end{cases}$$

n'ait que la solution triviale (ceci équivaut à supposer $t_0 \notin \mathbb{N}\pi/K$) on voit alors aisément que $z \in \ker Q^{t_0}$ si et seulement si z vérifie

$$\begin{cases} (A(st_0)+K)^{-1}(J\dot z-Kt_0 z)=t_0 z \\ y(1)=y(0)=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} \dot z=t_0 JA(st_0)z \\ y(1)=y(0)=0. \end{cases}$$

Inversement si t_0 n'est pas un point conjugué à 0, (ii) n'a que la solution triviale, et $z \in \ker Q^{t_0}$ si et seulement si z est solution de (i).

Quitte à perturber K, on peut toujours supposer que les points conjugués à 0 ne sont pas de la forme $k\pi/K$ (dans le cas général on aurait $\ker Q^{t_0}=(\text{i}) \oplus (\text{ii})$).

Calculons $\partial/\partial t\, Q^t(z, z)$ dans le cas (i) : $z(s)=e^{-KJt_0 s} z_0$ où $z_0=(x_0, 0)$, $y(1)=0$ équivaut bien à $Kt_0=h\pi$ soit $t_0=h\pi/K$ et l'espace des solutions est de dimension n. Comme

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t(z, z)\,\Big|_{t=t_0} = -\int_0^1 Kt(z, z)\,ds$$

on en déduit que la contribution du cas (i) à $\operatorname{ind} d^2 \tilde{S}_K^*$ est $n[K/\pi]$ (n pour chaque valeur de t_0, et il y a $[K/\pi]$ valeurs possibles).

Calculons maintenant $\partial/\partial t\, Q^t(z, z)\,|_{t=t_0}$ dans le cas (ii). On a, en dérivant l'expression de Q^t

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t(z, z) = y(1).x(1) + \int_0^1 (J\dot{z} - 2Ktz, z)\,ds$$
$$+ \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(A(st)+K)^{-1}\right)(J\dot{z}-Ktz),\, J\dot{z}-Ktz\right)ds$$
$$+ 2\int_0^1 ((A(st)+K)^{-1} J\dot{z} - Ktz,\, Kz)\,ds.$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(st)+K)^{-1} = -(A(st)+K)^{-1}\, s A'(st)(A(st)+K)^{-1}$$

d'où

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(A(st)+K)^{-1}\right)(J\dot{z}-Ktz),\, J\dot{z}-Ktz\right)ds$$
$$= \int_0^1 ((A(st)+K)^{-1}\, s A'(st)(A(st)+K)^{-1}(J\dot{z}-Ktz),\, J\dot{z}-Ktz)\,ds$$
$$= \int_0^1 (s(A'(st)tz,\, tz)\,ds$$

en utilisant (ii).

En dérivant (ii) on obtient

$$\ddot{z} = Jt^2 A'(st)z + Jt A(st)\dot{z}$$

et en remplaçant dans l'expression précédente on obtient

$$-\int_0^1 s(A'(st)tz, tz)\,ds = \int_0^1 s(J\ddot{z}+A(st)\dot{z},\ z)\,ds$$

$$= \int_0^1 s(J\ddot{z},\ z)\,ds + \int_0^1 s(\dot{z};\ A(st)z)\,ds$$

mais $t\,A(st)z = -J\dot{z}$ il reste donc $\int_0^1 s(J\ddot{z},\ z)\,ds$.

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}Q^t(z,\ z) = \int_0^1 (J\dot{z}-2Ktz,\ z)\,ds + 2Kt\int_0^1 |z|^2\,ds + \int_0^1 s(J\ddot{z},\ z)\,ds$$

$$= \int_0^1 [(J\dot{z},\ z)+s(J\ddot{z},\ z)]\,ds$$

$$= s(Jz,\ z)]_0^1 = -(A(t)z(1),\ z(1)).$$

Bien sûr, dans (ii) si on pose $\delta\gamma(s)=z(s/t)$ on a que $\delta\gamma\in\mathscr{I}(t)$, et alors

$$-(A(t)z(1),\ z(1)) \quad \text{égale} \quad -(H''(t,\ \gamma(t))\,\delta\gamma(t),\ \delta\gamma(t))$$

donc la contribution est $\sigma(t)$.

Il reste à calculer l'indice de Q^t pour t proche de 0. On a, en ordonnant $Q^t(z,\ z)$ suivant les puissances de t :

$$Q^t(z,\ z) = \int_0^1 ((A(st)+K)^{-1}J\dot{z},\ J\dot{z})\,ds$$

$$+t\left(x(1)y(1)+\int_0^1 ((I-2K(A(st)+K)^{-1})J\dot{z},\ z\right)$$

$$+t^2\int_0^1 (K^2(A(st)+K)^{-1}-K)z,\ z)\,ds.$$

Sur l'espace des constantes, Q^t se réduit à

$$t^2\left(\int_0^1 -KA(st)(A(st)+K)^{-1}z,\ z\right)$$

qui pour t voisin de 0 est non dégénérée, et a l'indice de $-KA(0)(A(0)+K)^{-1}$ i.e. celui de $-A(0)=-H''(0,\gamma(0))$. On en déduit que l'espace des constantes a un supplémentaire orthogonal pour Q^t.

Pour t petit, Q^t est définie positive sur ce supplémentaire, parce que sur un tel espace $\int_0^1((A(st)+K)^{-1}J\dot{z}, J\dot{z})\,ds$ est définie positive, les autres termes intervenant dans Q^t sont petits avec t.

Pour t petit Q^t a donc pour indice $\sigma(0)$. Ceci termine la démonstration.

Remarque. — On pourra comparer la proposition 8 aux résultats de [M] et [D], $\sigma(0)$ s'identifiant au « terme de concavité ».

Pour étendre la proposition 8 au cas général de deux sous-variétés lagrangiennes L_1 et L_2 dans (M, ω) telles que $L_1=\varphi_1(L_2)$ — où φ_s est un flot hamiltonien — il faut tout d'abord étendre la distribution lagrangienne tangente à L_2 sur M tout entier (ou au moins sur un ouvert U assez grand pour contenir $\varphi_s\gamma_2$ où γ_2 est comme au paragraphe 1). Notons $\mathscr{L}$ cette distribution, si $\delta\gamma(0)\in T_{\gamma(0)}L_2$ et $\delta\gamma(s)=d\varphi_s(\gamma(0))\,\delta\gamma(0)$ (où $\varphi_1(\gamma(0))=\gamma(1)\in L_1\cap L_2$) on dira que $\delta\gamma$ est un champ de Jacobi le long de γ. L'instant t_0 sera dit conjugué à 0 si $\delta\gamma(t_0)\in\mathscr{L}$. Ici on ne peut définir de façon intrinsèque $(H''(t,\gamma(t))\,\delta\gamma(t), \delta\gamma(t))$ mais sa signature l'est.

La proposition 8 dans le cas général s'énonce comme suit :

PROPOSITION 8'. — *Soit $\mathscr{L}$ une distribution lagrangienne tangente à L_1 et transverse à L_2, a et b deux points de $L_1\cap L_2$. Alors posant $i(\gamma)=\Sigma\,\sigma(t)$ (où $\sigma(t)$ est la signature de $(H''(t,\gamma(t))\,\delta\gamma(t), \delta\gamma(t))$ dans une carte locale, sa nullité étant supposée égale à zéro) on a* $m(a, b)=i(\gamma_a)-i(\gamma_b)$.

La démonstration est laissée au lecteur, en utilisant que :

1 : $i(\gamma)$ ne dépend du choix de $\mathscr{L}$ qu'à homotopie près.

2 : on peut donc se restreindre à $T^*\mathbb{R}^n$ où on a déjà démontré la proposition 8, avec pour $\mathscr{L}$ la distribution horizontale.

6. Remarques finales

Un certain nombre de situations classiques se traitent de la même façon.

1. En particulier en présence d'un groupe de symétrie L_1 et L_2 ne seront pas transverses. Mais si L_1 et L_2 s'intersectent proprement (clean

intersection) on peut se limiter aux directions normales à $L_1 \cap L_2$, et on obtient les mêmes résultats.

2. Lorsqu'on considère les solutions périodiques d'un système hamiltonien sur (M, ω) on peut considérer $(\mathcal{M}, \Omega)=(M, \omega)\times(M, -\omega)$ avec le flot hamiltonien $(\mathrm{Id}, \varphi_t)=\varphi_t$. Si Δ est la diagonale de $M\times M$, c'est une sous variété lagrangienne de $(\mathcal{M}, \Omega)$ et $\varphi_1(\Delta)\cap\Delta$ s'identifie aux solutions périodiques de notre système hamiltonien; ceci nous ramène au cas traité.

Cependant si $(M, \omega)=T^* \mathbb{R}^n$ on peut identifier $(\mathcal{M}, \Omega)$ et $T^*\Delta$, d'où des fonctionnelles $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_K^*$, comme au paragraphe 4. Par ailleurs on définit usuellement sur l'espace des courbes fermées de $\mathbb{R}^{2n}$

$$A(z)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(J\dot{z}, z)+H(t, z)\right]dt$$

et

$$A_K^*(z)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(J\dot{z}-Kz, z)+H_K^*(-J\dot{z}+Kz)\right]dt$$

et on aimerait un analogue des propositions 6 et 7 avec A et A_K^* au lieu de $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_K^*$.

L'analogue de la proposition 7 avec A_K^* au lieu de $\tilde{S}_K^*$ est facile : comme dans la démonstration de la proposition 8, on montre aisément

$$\operatorname{ind} d^2 A_K^* = i(\gamma)+2n\left[\frac{K}{2\pi}\right],$$

d'où $\operatorname{ind} d^2 \tilde{S}_K^* - \operatorname{ind} d^2 A_K^*$ est constant (pour K fixé).

Pour ce qui est de A, on peut vérifier que $\tilde{S}$ égale A, plus une forme constante définie sur un supplémentaire de l'espace des courbes fermées, ce qui permet de conclure.

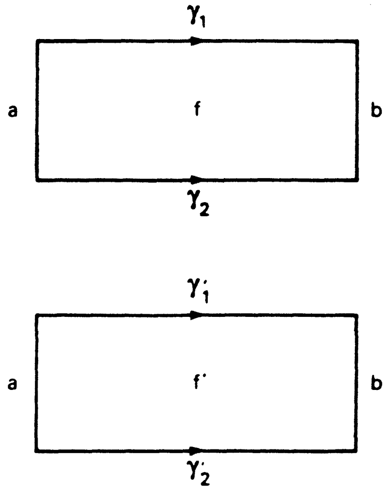
γ_1
a
f
b
γ_2
γ'_1
a
f'
b
γ'_2

Fig. 1

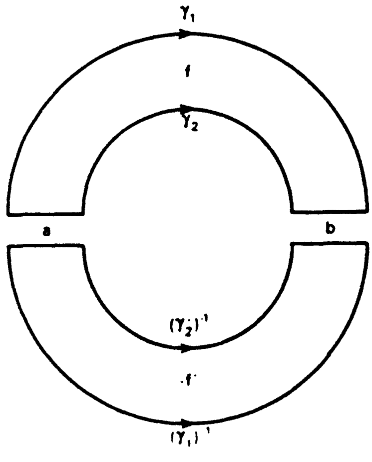
γ_1
f
γ_2
a
b
$(\gamma'_2)^{-1}$
-f'
$(\gamma'_1)^{-1}$

Fig. 2

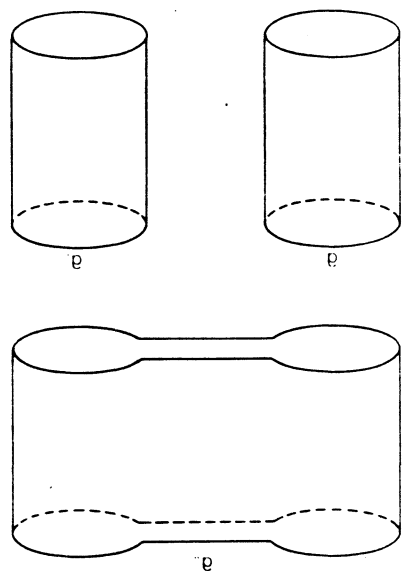

Fig. 3

APPENDICE

Soit $\xi=(E, p, B)$ un fibré vectoriel symplectique. $\mathrm{Sp}(n)$ et $U(n)$ ayant même type d'homotopie, on identifiera leurs classifiants $B\,\mathrm{Sp}(n)$ et $BU(n)$. ξ est alors induit par une application f de B dans $BU(n)$. On notera $c_1(\xi)$ l'image réciproque de la première classe de Chern $c_1 \in H^2(BU(n))$.

Soit $\Lambda\xi=(\Lambda E, \pi, \mathrm{B})$ le fibré de fibre $\Lambda(n)$ canoniquement associé à ξ. Si η désigne le fibré universel $EU(n) \to BU(n)$, $\Lambda\eta$ sera le fibré $EU(n)/O(n) \to BU(n)$ (notons au passage que $EU(n)/O(n)$ s'identifie à $BO(n)$) et $\Lambda\xi=f^*(\Lambda n)$.

Ceci étant posé, démontrons la :

PROPOSITION 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\bar{\mu} \in H^1(\Lambda E; \mathbb{Z})$ induisant la classe de Maslov sur chaque fibre est que $2c_1(\xi)=0$. Si $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ sont deux telles classes, $\bar{\mu}'-\bar{\mu}=\pi^*\alpha$ où $\alpha \in H^1(B; \mathbb{Z})$.*

Démonstration. — Considérons la suite spectrale associée au fibré $\Lambda\eta$. D'après [Bo] (p. 78, remarque), vu que $BU(n)$ est simplement connexe, on a

$$E_2^{*,*}=H^*(BU(n)) \otimes H^*(\Lambda(n))$$

et on veut déterminer $d_2(1 \otimes \mu)$ où $\mu \in H^1(\Lambda(n))$ est la classe de Maslov. Sur les éléments de $E_2^{*,*}$ de degré total égal à un (qui, vu que $H^1(BU(n); \mathbb{Z})=0$ sont les multiples entiers de $1 \otimes \mu)\, d_k=0$ pour $k \geqslant 3$. Vu que

$$H^1(BO(n); \mathbb{Z})=0 \qquad \text{et} \qquad H^1(BO(n); \mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$$

on déduit que nécessairement $d_2(1 \otimes \mu)=\pm 2c_1$.

Par naturalité de la suite spectrale, on a pour la suite spectrale de ξ, $d_2(1 \otimes \mu)=\pm 2c_1(\xi)$.

D'après [Bo] (p. 85, (*d*)) l'image de $H^*(\Lambda E)$ dans $H^*(\Lambda(n))$ par l'application induite par inclusion s'identifie à l'intersection des noyaux des d_k sur $1 \otimes H^*(\Lambda(n))$. Comme $d_k=0$ sur $E_2^{0,1}$ si $k \geqslant 3$ on voit que μ existe si et seulement si $2c_1(\xi)=0$.

Soient maintenant $\bar{\mu}$, μ' deux telles classes, alors $\bar{\mu}-\mu'$ correspond à un élément de $E_2^{1,0}$ sur lequel les d_k sont tous nuls, soit, toujours d'après [Bo] (*loc. cit.*), un élément de $\pi^*(H^1(B; \mathbb{Z}))$.

Démontrons maintenant le corollaire 2 de la proposition 1 du paragraphe 1. Cela revient à démontrer que si $B=S^2$, D^+ et D^- sont les hémisphères nord et sud, $\bar{\mu}_+$ et $\bar{\mu}_-$ les classes de $H^1(\Lambda E|_{D^+})$ et $H^1(\Lambda E|_{D^-})$ obtenues grâce à la proposition 1, γ une section quelconque de $\Lambda E|_{S^1}$ (où $S^1 = D^+ \cap D^-$, et S^1 orienté comme ∂D^+) on a :

PROPOSITION 2. — $\langle \bar{\mu}_+, \gamma \rangle - \langle \bar{\mu}_-, \gamma \rangle = 2 \langle c_1(\xi), [S^2] \rangle$.

Démonstration. — π^* détermine un morphisme entre la suite de Mayer-Vietoris de (D^+, D^-) et celle de $(\Lambda E|_{D^+}, \Lambda E|_{D^-})$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\xleftarrow{\delta^*} & H^*(\Lambda E|_{S^1}) & \xleftarrow{\delta^*} & H^*(\Lambda E|_{D^+}) \oplus H^*(\Lambda E|_{D^-}) & \longleftarrow & H^*(\Lambda E) \\
 & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^* \oplus \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} \\
\longleftarrow & H^*(S^1) & \longleftarrow & H^*(D^+) \oplus H^*(D^-) & \longleftarrow & H^*(S^2)
\end{array}$$

Considérons alors $2c_1(\xi) \in H^2(S^2)$. δ^1 étant un isomorphisme, $2c_1(\xi) = \delta^1(\sigma)$ pour un unique $\sigma \in H^1(S^1)$.

Maintenant, vu que dans $E_2^{*,*}$, $d_2(1 \otimes \mu) = \pm 2c_1(\xi)$ on en déduit que $\pi^*(2c_1(\xi)) = 0$, d'où

$$\delta^1(\pi^1(\sigma)) = 0 \qquad \text{et} \qquad \pi^1(\sigma) \in \operatorname{Im}(j^1).$$

Il existe donc deux entiers a et b tels que

$$\pi^*(\sigma) = a\bar{\mu}_+ - b\bar{\mu}_- \qquad (\text{car } H^*(\Lambda E|_{D^\pm}) = \mathbb{Z}.\bar{\mu}_\pm)$$

et par fonctorialité, a et b ne dépendent pas de ξ.

Montrons que l'on a $2 \langle c_1(\xi), [S^2] \rangle = a \langle \bar{\mu}_+, \gamma \rangle - b \langle \bar{\mu}_-, \gamma \rangle$.

En effet :

$$\begin{aligned} 2 \langle c_1(\xi), S^2 \rangle &= \langle \delta^1(\sigma), [S^2] \rangle \\ &= \langle \sigma, \delta_1 [S^2] \rangle \end{aligned}$$

(où $\delta_1 : H_2(S^2) \to H_1(S^1)$ est l'adjoint de δ^1)

$$\begin{aligned} &= \langle \sigma, \pi(\gamma) \rangle \\ &= \langle \pi^*(\sigma), \gamma \rangle \\ &= a \langle \bar{\mu}_+, \gamma \rangle - b \langle \bar{\mu}_-, \gamma \rangle. \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que $a = b = 1$. Or $a = b$ est clair par symétrie. Un cas particulier va nous prouver que $a = b = 1$: identifions S^2 à $P(\mathbb{C}^2)$, et soit $\xi = T(P(\mathbb{C}^2))$, on a alors $2c_1(\xi) = 4\omega$ où ω est le générateur positif de $H^2(S^2)$, d'où $2\langle c_1(\xi), [S^2]\rangle = 4$. Prenons pour γ la section de $\Lambda E|_{S^1}$ donnée par le fibré tangent à S^1; on trouve alors $\langle \bar{\mu}_+, \gamma\rangle = 2$, $\langle \bar{\mu}_-, \gamma\rangle = -2$ d'où on tire $a = b = 1$.

Remarque. — Le rapporteur m'a signalé une démonstration plus simple :

Si $c = \langle c_1(\xi), [S^2]\rangle$, ΛE s'obtient en recollant $D_+ \times \Lambda(n)$ et $D_- \times \Lambda(n)$ via

$$\varphi(t, T) = (t, t^c . T)$$

où $(t, T) \in S^1 \times U(n) = U(1) \times U(n)$ et $U(1)$ opère diagonalement sur $U(n)$.

Alors

$$\bar{\mu}_-|_{S^1 \times \Lambda(n)} = 1 \otimes \mu$$

$$\bar{\mu}_+|_{S^1 \times \Lambda(n)} = \varphi^*(1 \otimes \mu)$$

et γ s'écrit $\gamma(t) = (t, T(t))$.

($E|_{S^1}$ étant trivial, γ s'identifie à une application de S^1 dans

$$\Lambda(n) = U(n)/SO(n).$$

T est le relèvement de cette application à $U(n)$, qui existe par connexité de $SO(n)$).

Maintenant

$$\bar{\mu}_-(\gamma) = \mu([T])$$

$$\bar{\mu}_+(\gamma) = \mu([t^c T]) = \mu(T) + 2c$$

car μ est image réciproque par $T \to (\det T)^2$ de la classe fondamentale de S^1.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARNOLD (V. I.). — Appendice au livre de Maslov, V.P. : *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques* (traduit du russe), Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[AT] ARTIN (E.). — *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957.

[A-Z] AMANN (H.) et ZEHNDER (E.). — Periodic solutions of asymptotically linear hamiltonian systems, *Manus. Math.*, t. 32, 1980, p. 149-189.

[B-L-M-R] BERESTICKY (H.), LASRY (J. M.), MANCINI (G.) et RUF (B.). — Existence of multiple periodic orbits on starshaped hamiltonian surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 38, 1985, p. 253-289.

[Bo] BOREL (A.). — Cohomologie des espaces localement compacts d'après J. Leray, *Lecture Notes in Math.* n° 2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[Br] BROUSSEAU (V.). — *Thèse de 3ᵉ cycle*, Université de Paris-IX, 1985.

[C] CHAPERON (M.). — Une idée du type « géodésiques brisées » pour les systèmes hamiltoniens, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 298, 1984, p. 293-296.

[Cl] CLARKE (F. H.). — Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, *J. of Diff. Eq.*, t. 40, 1980, p. 1-6.

[C-E] CLARKE (F. H.) et EKELAND (I.). — Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 33, 1980, p. 103-116.

[C-Z] CONLEY (C.) et ZEHNDER (E.). — Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 37, 1984, p. 207-253.

[D] DUISTERMAAT (J. J.). — On the Morse index in variational calculus, *Advances in Math.*, t. 21, 1976, p. 173-195.

[E-1] EKELAND (I.). — Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes, *Annales de l'I.H.P.*, Analyse non linéaire, vol. 1.1, 1984, p. 19-78.

[E-2] EKELAND (I.). — Index theory for periodic solutions of convex Hamiltonian systems, *Cahiers de M.D.* n° 85003, Université de Paris-Dauphine, 1985.

[G-S] GUILLEMIN (V.) et STERNBERG (S.). — *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys, n° 14, A.M.S. Providence R.I., 1977.

[Hu] HUSEMOLLER (D.). — *Fibre Bundles*, 2nd éd., Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.

[L-S] LAUDENBACH (F.) et SIKORAV (J. C.). — Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, *Inventiones Math.*, vol. 82, Fasc. 2, p. 349-357, 1985.

[M] MORSE (M.). — The calculus of Variations in the large, *A.M.S. Coll. Publ.*, vol. 18, A.M.S., New York, 1934.

[M-S] MILNOR (J. W.) and STASHEFF (J. D.). — Characteristic classes, *Annals of Math. Studies*, n° 76, Princeton Univ. Press, 1974, Princeton N.J.

[S] SIKORAV (J. C.). — Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 302, série 1, 1986, p. 119-122.

[St] STEENROD (N.). — *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951, Princeton N.J.

[V] VITERBO (C.). — *Thèse de 3ᵉ cycle*, Université de Paris-IX, 1985.

[W] WEINSTEIN (A.). — Lectures on symplectic manifolds, *C.B.M.S. regional conference series in Math.*, n° 29, A.M.S., 1979, Providence R.I.

Ajouté sur épreuves. En rapport avec le présent article, on consultera l'article à paraître de A. Floer.