BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS TRÈVES
MARTIN ZERNER

Zones d'analyticité des solutions élémentaires

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 155-191
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__155_0>

Bull. Soc. math. France,
95, 1967, p. 155 à 191.

ZONES D'ANALYTICITÉ DES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

PAR

FRANÇOIS TRÈVES ET MARTIN ZERNER.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Cet article présente un critère permettant d'affirmer, si les conditions qu'il pose sont remplies, qu'un polynôme différentiel sur $\mathbf{R}^n$ (en d'autres termes, un opérateur différentiel à coefficients constants en n variables), $P(D)$, possède une solution élémentaire qui est une fonction analytique dans le complémentaire d'un cône algébrique. La démonstration de ce critère, énoncé au paragraphe 7 (théor. 1), fait l'objet du chapitre I. La chapitre II présente quelques exemples d'applications et certaines conséquences. Le théorème 1 s'applique tout d'abord aux polynômes différentiels dont la partie principale est à coefficients réels et dont toutes les caractéristiques réelles sont simples; un tel opérateur différentiel possède une solution élémentaire qui est une fonction analytique en dehors du cône bicaractéristique réel. Ce résultat était déjà connu dans un certain nombre de cas, d'ailleurs fort importants : bien entendu, dans le cas elliptique (cas où le cône bicaractéristique réel se réduit à $\{0\}$), et aussi dans le cas strictement hyperbolique (*voir* LERAY [6], MIZOHATA [7]). GÅRDING [3] signale que ce résultat est une conséquence immédiate de l'étude, menée à bien par cet auteur, des distributions homogènes — dans le cas où l'opérateur $P(D)$ lui-même est homogène, c'est-à-dire ne contient pas de termes d'ordre strictement inférieur à l'ordre maximum. La présence de termes d'ordre inférieur semble devoir compliquer de toute façon l'étude.

Notre critère s'applique ensuite aux polynômes différentiels semi-elliptiques. Un tel opérateur possède une solution élémentaire qui est analytique en dehors d'un certain sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, facile à décrire (*voir* p. 183). Par exemple, si l'opérateur en question est parabolique, au sens de Petrowski, par rapport à la variable x_1, ce sous-espace vectoriel est l'hyperplan $x_1 = 0$. Bien entendu, le résultat était déjà connu dans le cas parabolique (*voir* KOTAKÉ [5]).

Nous démontrons aussi que le polynôme différentiel de Schrödinger satisfait aux conditions de notre critère. Mais la démonstration de cette propriété, effectuée au paragraphe 10, est fort ennuyeuse et prouve que l'application du critère peut n'être pas du tout automatique.

Un exemple semble d'ailleurs montrer que certains opérateurs à coefficients complexes ne satisfont pas ce critère.

Ajoutons que pour établir le critère, nous construisons une solution élémentaire par intégration sur un cycle convenable de l'espace complexe $\mathbf{C}^n$.

L'intérêt de pouvoir « situer » le support singulier d'une solution élémentaire de $P(D)$ tient à ce qu'on peut décider de la régularité de certaines solutions de l'équation inhomogène $P(D)\,u = f$, comme il est bien connu dans la théorie des opérateurs hypoelliptiques, depuis un résultat maintenant classique de L. SCHWARTZ ([8], chap. V, théor. XII). Il en va de même en ce qui concerne l'analyticité des solutions; ceci est établi au paragraphe 11. Ceci a diverses conséquences, dont l'une répond affirmativement à une question de Louis NIRENBERG (question qui a servi de point de départ au présent travail) : soit un opérateur différentiel $P(D)$, disons à partie principale réelle et à caractéristiques réelles simples, Γ son cône bicaractéristique réel, f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique) dans $\mathbf{R}^n$, u une distribution quelconque dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant l'équation $P(D)\,u = f$. Supposons qu'on sache que u est une fonction $\mathcal{C}^\infty$

(resp. analytique) dans un voisinage de la portion de Γ qui se trouve en dehors d'une boule, centrée en o, de rayon > 0 arbitraire. Peut-on conclure que u est $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique) dans un voisinage de l'origine ? Comme nous l'avons dit, la réponse est affirmative : en nous exprimant cavalièrement, nous pourrions dire que la régularité se propage le long du cône bicaractéristique réel.

Le dernier paragraphe de cet article montre que, sous les conditions précédentes, concernant $P(D)$, et à condition que celui-ci ne soit pas elliptique, $P(D)$ possède une solution élémentaire dont le support singulier est l'espace tout entier — et que n'importe laquelle de ses solutions élémentaires contient toujours au moins un *demi-cône* bicaractéristique réel.

CHAPITRE I.

Démonstration et énoncé du critère fondamental.

1. Une construction de solutions élémentaires.

Nous rappelons ici une méthode de construction de solutions élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants, sans nul doute bien connue des spécialistes (*voir* les travaux d'EHRENPREIS, LERAY, etc.) et qui sera utilisée ensuite. On considère un polynôme P quelconque (mais non identiquement nul !), à n indéterminées, à coefficients complexes. On se donne une application θ de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même, possédant les propriétés suivantes :

(1.1) *L'application* θ *est une fois continûment dérivable.*

(1.2) *L'application* θ *et chacune des applications*

$$\xi \mapsto \frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

sont bornées.

Une application de R^n dans lui-même est bornée si elle transforme R^n en un sous-ensemble borné de R^n.

(1.3) *Il existe deux constantes* ρ, $c > 0$ *telles que, pour tout* $\xi \in R^n$, $|\xi| \geq \rho$, *on ait*

$$|P(\xi + i\,\theta(\xi))| \geq c.$$

Ceci posé, nous choisissons arbitrairement une fonction $\varphi \in C^\infty(R^n)$ vérifiant $0 \leq \varphi \leq 1$ et

$$\varphi(\xi) = 0 \quad \text{si } |\xi| < \rho; \qquad \varphi(\xi) = 1 \quad \text{si } |\xi| \geq 2\rho.$$

Nous notons S le sous-ensemble de C^n image de R^n par l'application

$$\xi \mapsto \xi + i\,\theta(\xi).$$

Nous poserons alors, pour toute fonction $u \in C_c^\infty(R^n)$,

$$(1.4) \qquad \langle F, u \rangle = \int_S \frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)} \Phi(\zeta)\, d\zeta,$$

où $\Phi(\zeta) = \varphi(\xi)$, $\xi = \operatorname{Re} \zeta$, et où, comme d'habitude,

$$\hat{u}(\zeta) = \int_{R^n} e^{-2i\pi\langle x, \zeta\rangle} u(x)\, dx.$$

Remarquons que S est une sous-variété C^1 de $\mathbf{R}^{2n}$ ($\simeq \mathbf{C}^n$) en vertu de (1.1); c'est une n-chaîne de C^∞, et c'est sur cette n-chaîne qu'on intègre, dans (1.4), la n-forme

$$\frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)} \Phi(\zeta)\, d\zeta \qquad (d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n),$$

laquelle est C^∞ au voisinage de S, en vertu de (1.3).

Pour qui aime à intégrer sur l'espace réel $\mathbf{R}^n$, notons qu'on a

$$(1.5) \qquad \int_S \frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \int_{R^n} \frac{\hat{u}(\xi + i\,\theta(\xi))}{P(\xi + i\,\theta(\xi))} \varphi(\xi) \operatorname{dét}(I + i\,\Theta(\xi))\, d\xi,$$

où nous avons désigné par Θ la matrice d'élément générique $\dfrac{\partial \theta_j}{\partial \xi_k}$.

La formule (1.5) montre immédiatement que l'intégrale qui définit $\langle F, u \rangle$ dans (1.4) est finie. En effet, d'après (1.2), la fonction $|\operatorname{dét}(1 + i\,\Theta(\xi))|$ est bornée dans R^n, et donc la valeur absolue du deuxième membre de (1.5) sera au plus égale à

$$(1.6) \qquad \int |\hat{u}(\xi + i\,\theta(\xi))|\, d\xi$$

que multiplie une constante ne dépendant que de P et de θ [en vertu de (1.3) et du fait que $\varphi \leq 1$]. Mais les propriétés de décroissance à l'infini de $\hat{u}$ font que (1.6) est finie. En fait, (1.6) définit une *norme continue* sur l'espace $C_c^\infty(R^n) = \mathcal{D}(R^n)$ (pour la topologie de Schwartz). Plus précisément, si l'on pose

$$(1.7) \qquad B = \sup_{\xi \in R^n} |\theta(\xi)|,$$

et si l'on note $\bar{n}$ le plus petit entier $> n/2$, on a

$$(1.8) \qquad \int |\hat{u}(\xi + i\,\theta(\xi))|\, d\xi \leq \mathrm{Cte} \int e^{2\pi B|x|} \left| \left(1 + B^2 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{\bar{n}} u(x) \right| dx.$$

(*Démonstration standard.*) De (1.8) et des considérations précédentes résulte aussitôt que la formule (1.4) définit une distribution F sur R^n.

Il est bien connu que cela reste vrai sous des conditions moins restrictives que (1.1), (1.2), (1.3). Par exemple, il suffira que $|\theta(\xi)|$ et $|\operatorname{grad}\theta(\xi)|$ croissent, pour $|\xi|\to+\infty$, moins vite que $\mathrm{Cte}\log(1+|\xi|)$, et que $P(\xi+i\theta(\xi))|^{-1}$ soit tempérée.

Lemme 1. — *Soit F la distribution sur R^n définie par* (1.4). *Il existe une fonction entière h, de type exponentiel sur C^n, telle que $F+h$ soit une solution élémentaire de $P(-D)$.*

Démonstration. — On a

$$\langle F, P(D)u\rangle=\int_S \hat{u}(\zeta)\,\Phi(\zeta)\,d\zeta=\int_S \hat{u}(\zeta)\,d\zeta-\int_S \hat{u}(\zeta)[1-\Phi(\zeta)]\,d\zeta.$$

Mais le théorème de Stokes et les propriétés de décroissance à l'infini de $\hat{u}$ font que

$$\int_S \hat{u}(\zeta)\,d\zeta=\int_{R^n}\hat{u}(\zeta)\,d\zeta=u(0).$$

D'autre part, il existe une distribution H sur R^n telle que

$$\langle H, u\rangle=\int_S \hat{u}(\zeta)[1-\Phi(\zeta)]\,d\zeta=\int_{R^n}\hat{u}(\xi+i\,\theta(\xi))\,g(\xi)\,d\xi,$$

où l'on a posé

$$g(\xi)=(1-\varphi(\xi))\,\mathrm{dét}(I+i\,\Theta(\xi)).$$

Noter que g est une fonction continue à support compact, contenu dans la boule $|\xi|\leq 2\rho$. Il en résulte que, quel que soit le n-uple $p=(p_1,\,\ldots,\,p_n)$, on a

$$|\langle D^p H, u\rangle|=|\langle H, D^p u\rangle|=\left|\int_{R^n}(\xi+i\,\theta(\xi))^p\,\hat{u}(\xi+i\,\theta(\xi))\,g(\xi)\,d\xi\right|$$
$$\leq(2\rho+B)^{|p|}\sup_{\xi\in R^n}|\hat{u}(\xi+i\,\theta(\xi))|\int|g(\xi)|\,d\xi.$$

La constante B a été définie par (1.7). On a d'ailleurs

$$|\hat{u}(\xi+i\,\theta(\xi))|\leq\int e^{2\pi B|x|}\,|u(x)|\,dx.$$

Soit $r>0$ arbitraire; supposons que u garde son support dans la boule $|x|\leq r$; on a

$$|\langle D^p H, u\rangle|\leq\|g\|_{L^1}\|u\|_{L^1}\,e^{2\pi rB}(\rho+1+B)^{|p|}.$$

Ceci contient tout ce dont nous avons besoin. Cela montre que H est une fonction indéfiniment dérivable dans R^n, puisque $D^pH\in L^\infty_{\mathrm{loc}}$, quel que soit p, et qu'on a, en outre;

$$\sup_{|x|\leq r}|D^pH(x)|\leq(2\rho+B)^{|p|}\,e^{2\pi rB}\|g\|_{L^1},$$

donc que H est une fonction entière de type exponentiel. Or on a

$$\langle F, P(D)\, u \rangle + \langle H, u \rangle = u(0).$$

Il reste alors simplement à utiliser le fait que tout polynôme différentiel, tel que $P(-D)$, applique l'espace des fonctions entières de type exponentiel *sur* lui-même (*voir* e. g. TREVES [9], théor. 9.6, p. 480). Il existe donc une fonction de type exponentiel h, telle que $P(-D)\, h = H$; $F + h$ est une solution élémentaire de $P(-D)$.

C. Q. F. D.

Notre but est de démontrer que, sous des conditions convenables, il est possible de construire une paramétrix F — à l'aide de la formule (1.4) — qui soit une fonction analytique dans le complémentaire de l'ensemble des zéros réels d'un certain polynôme Q. Pour montrer que cette propriété est vraie, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient F une distribution dans R^n, Q une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^n$. Supposons que, pour tout ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$, il existe des constantes A, M, $N \geq 0$ telles que, pour tout n-uple p tel que $|p| \geq N$, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on ait*

$$(1.9) \qquad |\langle Q^{|p|} D^p F, u \rangle| \leq M^{|p|+1} p! \int e^{A|p|.|x|} |u(x)|\, dx.$$

Alors F est une fonction analytique dans l'ensemble ouvert

$$\{ x \in \mathbf{R}^n ;\ Q(x) \neq 0 \}.$$

Démonstration. — Soit Ω un ouvert borné quelconque de $\mathbf{R}^n$; posons $\delta = \sup_{x\in\Omega} |x|$; soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ arbitraire. On déduit de (1.9), pour $|p| \geq N$,

$$(1.10) \qquad |\langle Q^{|p|} D^p F, u \rangle| \leq M (M e^{A\delta})^{|p|} p! \, \| u \|_{L^1}.$$

Ceci implique que la restriction à Ω de $Q^{|p|} D^p F$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ et donc que, pour tout $q \in \mathbf{N}^n$, $|q| > N$, $D^q F$, et par conséquent aussi F, est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans l'ouvert

$$\{ x \in \Omega ;\ Q(x) \neq 0 \}.$$

On déduit alors de (1.10), pour *tout* n-uple p et tout $\varepsilon > 0$,

$$(1.11) \qquad \sup_{x\in\Omega,\, |Q(x)|>\varepsilon} |D^p F(x)| \leq M' (M e^{A\delta}/\varepsilon)^{|p|} p!.$$

La constante M' est $\geq M$, et suffisamment grande pour que (1.11) soit vrai lorsque $|p| \leq N$. Le lemme 2 découle aussitôt de là.

2. Déformation de la chaîne sur laquelle on intègre.

Nous conservons les notations (et les définitions) du paragraphe précédent. Nous allons définir, à l'aide de (1.4), une famille de paramétrix F_τ à un paramètre (réel) $\tau \geqq \tau_0$; la paramétrix F que nous choisirons à la fin pourra être l'une quelconque de ces F_τ, par exemple F_{τ_0}. Le vecteur $\theta(\xi)$, qui intervient dans les conditions (1.1), (1.2), (1.3), et qui sert à définir la chaîne S, va maintenant dépendre de τ, de la façon suivante :

$$\theta_\tau(\xi) = \tau\, v(\xi),$$

où $|v(\xi)| = 1$ pour $|\xi| \geqq 1$. L'hypothèse (1.3) sera désormais remplacée par la suivante :

(2.1) *Il existe trois constantes* τ_0, ρ, $c > 0$ *telles que, pour tout* $\tau \geqq \tau_0$ *et tout* $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| \geqq \rho\tau$, *on ait*

$$|P(\xi + i\tau\, v(\xi))| \geqq c.$$

Nous remplacerons alors, dans (1.4), $\Phi(\zeta)$ par $\Phi_\tau(\zeta) = \varphi(\xi/\tau)$ ($\xi = \operatorname{Re}\zeta$) et nous poserons

$$\langle F_\tau, u\rangle = \int_{S_\tau} \frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)}\, \Phi_\tau(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.2}$$

où $S_\tau = \{\xi + i\tau\, v(\xi);\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ |\xi| > \rho\tau\}$.

Si $\theta = \tau_0 v$, remarquons que S_{τ_0} n'est pas la chaîne que nous avons notée S dans (1.4), mais que, tout de même, $F = F_{\tau_0}$ en vertu de la présence du facteur $\Phi = \Phi_{\tau_0}$.

Soient deux nombres $\tau' > \tau \geqq \tau_0$; nous désignerons par $B(\tau, \tau')$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}^n$ définis par

$$\zeta = \xi + it\, v(\xi), \qquad \tau \leqq t \leqq \tau', \qquad |\xi| \geqq \rho t.$$

Puisque v est de norme 1, on a $t = |\operatorname{Im}\zeta|$. Posons alors

$$g(\zeta) = \varphi(\operatorname{Re}\zeta / |\operatorname{Im}\zeta|), \qquad \omega = \hat{u}(\zeta)\, P^{-1}(\zeta)\, d\zeta.$$

La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $B(\tau, \tau')$; quant à la n-forme ω, elle est fermée au voisinage de $B(\tau, \tau')$ d'après (2.1). Le théorème de Stokes implique donc

$$\int_{B(\tau, \tau')} dg \wedge \omega = \int_{\partial B(\tau, \tau')} g\,\omega.$$

Le bord $\partial B(\tau, \tau')$ de $B(\tau, \tau')$ consiste en trois morceaux : S_τ et $S_{\tau'}$, plus l'ensemble des $\zeta \in \mathbf{C}^n$ vérifiant

$$|\operatorname{Re}\zeta| = \rho t, \qquad \operatorname{Im}\zeta = t\, v(\operatorname{Re}\zeta), \qquad \tau \leqq t \leqq \tau'.$$

Mais la fonction g est identiquement nulle sur ce troisième morceau, puisque $\varphi(\xi)$ s'annule pour $|\xi| = \rho$ (*voir* p. 157). Ainsi donc, si l'on prend en considération les orientations (*) et la définition (2.2), on voit que

$$(2.3) \qquad \langle F_\tau, u\rangle - \langle F_{\tau'}, u\rangle = \int_{B(\tau,\, \tau')} dg \wedge \omega.$$

L'intersection du support de dg avec $B(\tau, \tau')$ est contenue dans le compact

$$(2.4) \qquad \{ \zeta = \xi + it\,v(\xi);\ \rho t \leqq |\xi| \leqq 2\rho t,\ \tau \leqq t \leqq \tau' \}.$$

Pour intégrer sur cette $(n+1)$-chaîne, il est commode d'utiliser les coordonnées $\sigma = \xi/t$ (en se rappelant que $t \geqq \tau_0 > 0$) et t. Le domaine d'intégration est alors défini par

$$(2.5) \qquad \rho \leqq |\sigma| \leqq 2\rho, \qquad \tau \leqq t \leqq \tau'.$$

Sur (2.4), on a $\xi = t\sigma$, $\eta = t\,v(t\sigma)$, et donc

$$d\zeta_j = t\left(d\sigma_j + it \sum_{k=1}^{n} \{ (\partial/\partial\xi_k)\, v_j \}\, (t\sigma)\, d\sigma_k \right) \\ + (\sigma_j + i\, v_j(t\sigma) + it\langle \sigma, \operatorname{grad} v_j(t\sigma)\rangle)\, dt.$$

On voit donc que, sur (2.4),

$$d\zeta = t^n\, \text{dét}(I + it\, V(t\sigma))\, d\sigma \\ + t^{2n-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} a_j(\sigma, t)\, d\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\sigma_j} \wedge \ldots \wedge d\sigma_n \wedge dt,$$

où V est la matrice de terme général $(\partial/\partial\xi_k)\, v_j$, où le chapeau signifie que le terme qu'il couvre doit être omis du calcul du produit, et où les $a_j(\sigma, t)$ sont des fonctions continues de (σ, t) vérifiant

$$|a_j(\sigma, t)| \leqq M_1 < +\infty,$$

avec $M_1 \geqq 0$ ne dépendant ni de τ ni de τ' pourvu qu'ils restent $\geqq \tau_0$. D'autre part, $g(\zeta) = \varphi(\sigma)$, et donc, sur (2.4),

$$dg \wedge d\zeta = (-1)^{n-1} t^{2n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(\sigma, t) \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_j}(\sigma) \right) d\sigma \wedge dt.$$

(*) Plus précisément, on oriente B en prenant $-d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n \wedge dt$ comme forme positive.

Finalement, on voit que (2.3) peut s'écrire maintenant sous la forme :

$$(2.6)\qquad \langle F_\tau, u\rangle - \langle F_{\tau'}, u\rangle$$
$$= \int_\tau^{\tau'} \int_{\rho\leqq|\sigma|\leqq 2\rho} \frac{\hat{u}(t(\sigma + i\,v(t\sigma)))}{P(t(\sigma + i\,v(t\sigma)))}\, a(\sigma, t)\, t^{2n-1}\, d\sigma\, dt,$$

où $a(\sigma, t)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage du domaine d'intégration, et vérifie, pour tous $\sigma\in\mathbf{R}^n$ et tout $t\geqq\tau_0$,

$$|a(\sigma, t)| \leqq M_2 < +\infty.$$

Si l'on remplace u par $D^p u$, ce qui revient à remplacer $\hat{u}$ par $\zeta^p \hat{u}$, on déduit aussitôt de (2.6), en tenant compte de (2.1),

$$(2.7)\qquad |\langle F_\tau, D^p u\rangle - \langle F_{\tau'}, D^p u\rangle|$$
$$\leqq M_3(2\rho + 1)^{|p|}(\tau')^{|p|+2n} \int e^{2\pi\tau'|x|}\,|u(x)|\,dx.$$

La constante $M_3 < +\infty$ ne dépend ni de τ, τ' ($\tau' > \tau \geqq \tau_0$), ni de p, ni de la fonction u. On peut donc remplacer u par $Q^{|p|}u$, où Q est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ quelconque dans $\mathbf{R}^n$. Soit alors Ω un ouvert borné arbitraire de R^n, et soit $K = \sup\limits_{x\in\Omega} |Q(x)|$.

On déduit de (2.7), pour toute fonction $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$|\langle F_\tau, D^p(Q^{|p|}u)\rangle - \langle F_{\tau'}, D^p(Q^{|p|}u)\rangle|$$
$$\leqq M_3[(2\rho + 1)K]^{|p|}(\tau')^{|p|+2n} \int e^{2\pi\tau'|x|}\,|u(x)|\,dx.$$

Nous appliquerons cette formule avec τ fixe (par exemple, $\tau = \tau_0$) et $\tau' = |p|$ (en supposant $|p| > \tau$). En vue de la formule de Stirling, nous aurons alors

$$(2.8)\qquad |\langle Q^{|p|}D^p F_\tau, u\rangle| \leqq |\langle F_{|p|}, D^p(Q^{|p|}u)\rangle|$$
$$+ M_4^{|p|+1} p! \int e^{2\pi|p|.|x|}\,|u(x)|\,dx.$$

La constante $M_4 < +\infty$ ne dépend ni de $p\in\mathbf{N}^n$, ni de $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (elle ne dépend pas non plus de τ, pourvu qu'on ait $\tau_0 \leqq \tau \leqq |p|$). La majoration (2.8) nous dit que si nous voulons avoir une majoration du type (1.9), en choisissant $F = F_\tau$, il suffira d'établir une majoration (1.9) pour $F_{|p|}$ à la place de F. [Il faudra cependant prendre garde que les constantes A et M de (1.9) soient alors indépendantes de p.]

3. Intégrations par parties.

Dans le paragraphe 2, nous avons ramené la démonstration de la majoration (1.9) à celle de majorations du même type pour les quantités

$$(3.1)\qquad \langle F_t, D^p(Q^{|p|}u)\rangle = \int_{S_t} \Phi_t(\zeta)\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}[Q(-D_\zeta)^{|p|}\,\hat{u}(\zeta)]\,d\zeta,$$

où $t=|p|$ (supposé plus grand qu'un certain nombre $\tau \geqq \tau_0$). Nous allons effectuer une intégration par parties, basée sur une identité que nous commencerons par établir.

Pour simplifier, nous posons

$$D_j = (2i\pi)^{-1}\,\partial/\partial\xi_k \quad [= (2i\pi)^{-1}\,\partial/\partial\zeta_k \text{ s'il opère sur des fonctions holomorphes de } \zeta],$$

$$f(\zeta) = \frac{\zeta^p}{P(\zeta)}.$$

Bien entendu, nous continuons à désigner par ξ la partie réelle de $\zeta \in \mathbf{C}^n$, et nous poserons

$$\varphi_t(\xi) = \varphi\left(\frac{1}{t}\xi\right) = \Phi_t(\zeta);$$

φ a été choisie p. 157. Nous commencerons par établir l'identité tout à fait élémentaire suivante :

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} -\int_{S_t} & f(\zeta)[D_j\,\hat{u}(\zeta)]\,\Phi_t(\zeta)\,d\zeta \\ = & \int_{S_t}[D_j f(\zeta)]\,\hat{u}(\zeta)\,\Phi_t(\zeta)\,d\zeta \\ & + (2i\pi)^{-1}\int_{S_t} f(\zeta)\,\hat{u}(\zeta)\,d\Phi_t(\zeta)\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\zeta_j}\wedge\ldots\wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Ceci pour chaque $j=1, \ldots, n$.

Démonstration de (3.2). — Il suffit évidemment d'établir (3.2) lorsque $j=1$. Posons $d\zeta' = d\zeta_2\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$. D'après le théorème de Stokes, on a

$$(3.3)\qquad \int_{S_t^{(r)}} d[\Phi_t(\zeta)\,f(\zeta)\,\hat{u}(\zeta)\,d\zeta'] = \int_{\partial S_t^{(r)}} \Phi_t(\zeta)\,f(\zeta)\,\hat{u}(\zeta)\,d\zeta',$$

en désignant par $S_t^{(r)}$ la portion de S_t qui se trouve dans le cylindre $|\xi| \leqq r$ $(r>0)$. D'après les propriétés de décroissance à l'infini de $\hat{u}$, le deuxième membre de (3.3) tend vers zéro quand $r\to+\infty$; comme $S_t^{(r)}$

converge vers S_t, on en déduit

$$\int_{S_t} d(\Phi_t(\zeta) f(\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta') = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(3.4) \qquad \int_{S_t} \Phi_t(\zeta)\, d(f(\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta') = \int_{S_t} d\Phi_t \wedge f(\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta'.$$

Mais puisque le produit $f(\zeta)\, \hat{u}(\zeta)$ est holomorphe au voisinage de S_t, on a, dans un tel voisinage,

$$d(f(\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta') = \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}(\zeta)\, \hat{u}(\zeta) + f(\zeta) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \zeta_1}(\zeta)\right) d\zeta.$$

Ceci, combiné avec (3.4), donne évidemment tout de suite (3.2).

Comme corollaire de (3.2), on a la formule suivante, où R est un polynôme arbitraire, à n variables :

$$\begin{aligned}(3.5) \qquad & \int_{S_t} f(\zeta)\, [R(-D_\zeta)\, \hat{u}(\zeta)]\, \Phi_t(\zeta)\, d\zeta \\ & = \int_{S_t} [R(D_\zeta)\, f(\zeta)]\, \hat{u}(\zeta)\, \Phi_t(\zeta)\, d\zeta \\ & \quad + (2i\pi)^{-1} \sum_{q \neq 0} \frac{1}{q!} \int_{S_t} (-D_\zeta)^{q'} \{ [R^{(q)}(D_\zeta)\, f(\zeta)]\, \hat{u}(\zeta) \} \\ & \quad \times d\Phi_t(\zeta) \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \ldots \wedge d\zeta_n.\end{aligned}$$

Dans la somme du second membre, on fait la convention de sommation suivante : pour tout n-uple $q \neq 0$, on a choisi, de façon arbitraire mais une fois pour toutes, un entier j, $1 \leq j \leq n$, tel que $q_j \geq 1$, et l'on a déterminé q' de façon à avoir

$$D^q = D^{q'} D_j.$$

La formule (3.2) s'écrit en effet, en posant $\omega = \Phi\, d\zeta$ et en notant $D_j^\star$ l'opérateur transposé de $-D_j$ pour la dualité entre fonctions holomorphes et formes de degré n sur S_t

$$D_j^\star(f\omega) = D_j f\omega + f D_j^\star \omega.$$

On en déduit, par la récurrence habituelle, la formule de Leibniz :

$$R(D^\star)(f\omega) = \sum \frac{1}{q!} R^{(q)}(D) f D^{\star q} \omega.$$

On a maintenant :

$$\int_{S_t} f(\zeta)\,[R(-D_\zeta)\,\hat{u}(\zeta)]\,\omega$$
$$= \int_{S_t} \hat{u}(\zeta)\,R(D^*)\,(f\omega)$$
$$= \int_{S_t} \hat{u}(\zeta) \sum \frac{1}{q!} R^{(q)}(D) f D^{*q} \omega.$$

En transposant, dans cette dernière expression $D^{*q'}$ sur $(\hat{u}/q!)\ R^{(q)}(D)f$ chaque fois que $q \neq 0$, on aboutit à (3.5).

Ce qu'il nous faut remarquer, c'est qu'il existe un opérateur différentiel du 1$^{\text{er}}$ ordre, à coefficients continus, sur $\mathbf{R}^n$, Δ_j, tel qu'on ait, sur S_t,

$$\Delta_j\, \varphi_t(\xi)\, d\xi = (2i\pi)^{-1}\, d\Phi_t \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \ldots \wedge d\zeta_n.$$

Pour calculer explicitement Δ_j, il suffit de se rappeler que, sur S_t, $\zeta = \xi + it\,v(\xi)$. Notons $b_j^k(\xi, t)$ le mineur de rang (j, k) de la matrice $I + it\,V(\xi)$, où V est la matrice de terme général $(\partial/\partial\xi_k)\,v_j$ déjà introduite, Alors

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{n} b_j^k(\xi, t)\, D_k. \tag{3.6}$$

Notre hypothèse que les dérivées premières de v sont bornées entraîne qu'on a, pour tout $t \geq 1$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$|\, b_j^k(\xi, t)\,| \leq \text{Cte } t^{n-1},$$

ce qui nous servira bientôt.

Nous allons appliquer la formule (3.5) avec $R = Q^{|p|}$. *Désormais. Q sera un polynôme à n indéterminées, à coefficients réels.* Il s'agira, pour nous, d'obtenir des majorations convenables des valeurs absolues des quantités suivantes :

$$I_0 = \int_{S_t} \hat{u}(\zeta) \left\{ R(D_\zeta) \left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)} \right) \right\} \Phi_t(\zeta)\, d\zeta,$$
$$I_q = \frac{1}{q!} \int_{S_t} \left\{ D_\xi^{q'} \left[\hat{u}(\zeta)\, R^{(q)}(D_\zeta) \left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)} \right) \right] \right\} \Delta_j\, \varphi_t(\xi)\, d\xi, \qquad q \neq 0.$$

Nous rappelons que $t = |\,p\,|$. Nous commencerons par *compter* les quantités I_q qu'il nous faut majorer : il y en a autant que de dérivées non nulles du polynôme R; appelons dorénavant d le degré de Q; celui de R est donc égal à $d\,|\,p\,|$; le nombre que nous cherchons est donc

$$\frac{(d\,|\,p\,| + n + 1)!}{(d\,|\,p\,|)!\,(n+1)!}.$$

Il est plus petit que

$$2^{d|p|+n+1}.$$

Il suffira donc de démontrer qu'il existe des constantes A, M, $N \geq 0$ telles que, pour tout n-uples p, q, $|p| \geq N$, et tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$(3.7) \qquad |I_q| \leq M^{|p|+1} p! \int e^{A|p|.|x|} |u(x)| \, dx.$$

Cela entraînera une majoration similaire de $|\langle F_t, D^p(Q^{|p|}u)\rangle|$ (pour $t = |p| \geq N$) et donc démontrera (1.9) à partir de (2.8).

4. Majoration des quantités $|I_q|$, $q \neq 0$.

Comme d'habitude, nous posons $\xi = \operatorname{Re}\zeta$, $\eta = \operatorname{Im}\zeta$. On a

$$(4.1) \qquad |\hat{u}(\zeta)| \leq \int e^{2\pi|\eta|.|x|} |u(x)| \, dx.$$

Considérons une quantité I_q (p. 166) pour $q \neq 0$ arbitraire. Nous commençons par remarquer que le domaine d'intégration est compact : il s'agit en effet de l'ensemble

$$K_t = \{\zeta \in S_t;\ \rho t \leq |\operatorname{Re}\zeta| \leq 2\rho t\}.$$

Posons, pour simplifier,

$$X_q(\zeta) = \frac{1}{q!} D_\zeta^{q'} \left[\hat{u}(\zeta) R^{(q)}(D_\zeta) \left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)} \right) \right].$$

On a

$$|I_q| \leq \sup_{\zeta \in K_t} |X_q(\zeta)| \int |\Delta_j \varphi_t(\xi)| \, d\xi.$$

L'opérateur différentiel Δ_j est défini par (3.6), et d'après la majoration des coefficients b_j^k de Δ_j qui vient tout de suite après (3.6), on a

$$(4.2) \qquad \int |\Delta_j \varphi_t(\xi)| \, d\xi \leq M_5 t^{n-2} \int |(\operatorname{grad}\varphi)(\xi/t)| \, d\xi$$
$$= M_5 t^{2(n-1)} \int |\operatorname{grad}\varphi| \, d\xi.$$

Par conséquent, si l'on cherche à obtenir une majoration (3.7) lorsque $q \neq 0$, il suffira d'établir qu'on a, pour tout $\zeta \in K_t$,

$$(4.3) \qquad |X_q(\zeta)| \leq M_6^{|p|+1} p! \int e^{A|p|.|x|} |u(x)| \, dx,$$

où A et M_6 ne doivent dépendre ni de u, ni de p et q, ni de ζ.

Pour établir (4.3), il va falloir rendre plus stricte notre condition (2.1). Mais afin de ne pas la rendre inutilement restrictive, nous allons entrer plus à fond dans les détails. Nous supposerons que $x=(x', x'')$, avec $x'=(x_1, \ldots, x_k)$, $x''=(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$Q(x)=Q(x', 0).$$

Nous n'excluons pas le cas où $k=n$; mais comme Q ne sera pas constant, donc $d=\deg Q \geqq 1$, nous supposerons toujours que $k \geqq 1$. Si ζ est un point arbitraire de $\mathbf{C}^n$, on écrira aussi $\zeta=(\zeta', \zeta'')$. Si β est un n-uple, on écrira aussi $\beta=(\beta', \beta'')$, avec $\beta'=(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, $\beta''=(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n)$. On introduira d'ailleurs la terminologie suivante :

DÉFINITION 1. — *Un n-uple β sera dit de type Q si $\beta''=0$.*

Puisque $R=Q^{|p|}$, on voit que tout n-uple de type Q est aussi un n-uple de type R; et *vice versa.*

Ceci dit, nous pouvons énoncer l'hypothèse qui remplacera dorénavant (2.1) :

(4.4) *Il existe quatre constantes τ_0, ρ, c, $\varepsilon>0$ telles que, pour tous ζ, $z \in \mathbf{C}^n$ ayant les propriétés suivantes :*

$$\zeta=\xi+i\tau v(\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, \qquad \tau \geqq \tau_0, \qquad |\xi| \geqq \rho\tau,$$
$$|z'-\zeta'| \leqq \varepsilon\tau, \qquad z''=\zeta'',$$

on ait

$$|P(z)| \geqq c.$$

Nous poserons alors :

$$K'_t=\left\{z \in \mathbf{C}^n;\ \exists\, \zeta \in K_t,\ |z'-\zeta'| \leqq \frac{\varepsilon}{2}t,\ z''=\zeta''\right\}.$$

Les inégalités de Cauchy, appliquées en les variables z', compte tenu de ce que le n-uple q, et donc aussi q', dans l'expression de X_q (p. 167), est de type Q, entraînent qu'il existe une constante $A_n>0$, ne dépendant que de n, telle que

$$\sup_{\zeta \in K_t} |X_q(\zeta)| \leqq A_n(\varepsilon t/2)^{-|q|} \sup_{\zeta \in K'_t} \left| \hat{u}(\zeta)\, R^{(q)}(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right) \right|.$$

On utilise une fois de plus (4.1), en remarquant que, lorsque $\zeta \in K'_t$, $|\operatorname{Im}\zeta| \leqq (1+\varepsilon/2)t$, et donc, qu'on a, pour $t=|p|$,

$$\sup_{\zeta \in K'_t} |\hat{u}(\zeta)| \leqq \int e^{2\pi(1+\varepsilon/2)|p|.|x|}\, |u(x)|\, dx.$$

D'autre part, $|q| \leq \deg R = d|p|$, donc $(\varepsilon/2)^{-|q|} \leq ((2/\varepsilon)^d)^{|p|}$. Pour établir (4.3), il suffira donc de montrer qu'on a

$$(4.5) \qquad t^{-|q|} \sup_{\zeta \in K'_t} \left| R^{(q)}(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right| \leq M_7^{|p|+1} p!.$$

La constante M_7 ne doit dépendre ni de p, ni de q (on a $t = |p|$). Si $\zeta \in K'_t$, nous pouvons écrire

$$R^{(q)}(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right) = \int_{\Gamma_t(\zeta)} \frac{z^p}{P(z)} \tilde{R}^{(q)}\left(\frac{1}{z'-\zeta'}\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{dz_j}{2i\pi(z_j-\zeta_j)},$$

où nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\tilde{R}^{(q)}(X) = \sum_r R^{(q+r)}(0) X^r,$$

$$\frac{1}{z'-\zeta'} = \left(\frac{1}{z_1-\zeta_1}, \ldots, \frac{1}{z_k-\zeta_k}\right),$$

et où $\Gamma_t(\zeta)$ est l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ vérifiant :

$$|z_j - \zeta_j| = \bar{\varepsilon} t, \qquad j = 1, \ldots, k \quad (\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{2k}), \qquad z'' = \zeta''.$$

C'est un k-cycle, entièrement contenu dans l'ensemble

$$K''_t = \{ z \in \mathbf{C}^n ;\ \exists\, \zeta \in K_t,\ |z' - \zeta'| \leq \varepsilon t,\ z'' = \zeta'' \}.$$

Or, d'après (4.4), si $z \in K''_t$, on aura $|P(z)| \geq c$. Compte tenu de ce que, pour tout $z \in K''_t$,

$$|z| \leq (2\rho + 1 + \varepsilon)t,$$

il en résulte, pour tout $\zeta \in K'_t$,

$$\left| R^{(q)}(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right| \leq c^{-1}[(2\rho + 1 + \varepsilon)t]^{|p|} \sup_{z \in \Gamma_t(\zeta)} \left| \tilde{R}^{(q)}\left(\frac{1}{z'-\zeta'}\right)\right|.$$

Mais si $z \in \Gamma_t(\zeta)$,

$$\left| \tilde{R}^{(q)}\left(\frac{1}{z'-\zeta'}\right)\right| \leq \sum_r (\bar{\varepsilon} t)^{-|r|} |R^{(q+r)}(0)|.$$

Mais encore, d'après les inégalités de Cauchy,

$$|R^{(q+r)}(0)| \leq (q+r)!\, \|Q\|^{|p|},$$

où

$$(4.6) \qquad \|Q\| = \sup_{|z_j| \leq 1,\, 1 \leq j \leq n} |Q(z)|.$$

Nous constatons ainsi qu'il existe une constante $M_8 > 0$, ne dépendant ni de p, ni de q, telle qu'on ait, pour tout $\zeta \in K'_t$,

$$(4.7)\quad t^{-|q|}\left|R^{(q)}(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right| \leq M_8^{|p|+1}\left\{\sum_r{}^{\star} t^{-|q+r|}(q+r)!\right\}t^{|p|},$$

où $\sum_r^{\star}$ signifie que la sommation s'étend aux n-uples r tels que $|q+r| \leq d|p| =$ degré de R. On a, puisque $t = |p|$,

$$\sum_{|s|\leq d|p|}\frac{s!}{t^s} \leq \sum_{|s|\leq d|p|}\frac{s!}{s^s}d^s \leq M_9^{|p|+1}.$$

En combinant ceci avec (4.7), et en utilisant le fait que $t^{|p|} \leq M_{10}p!$, on obtient aussitôt (4.5), et donc (4.3) et (3.7).

5. **Majoration de $|I_0|$.**

Il nous reste à montrer que (3.7) est valable lorsque $q = 0$. Nous avons (*voir* p. 166) :

$$|I_0| \leq \left\{\sup_{\zeta\in S_t}|\hat{u}(\zeta)|\right\}\int_{S_t}\left|R(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right|\cdot|\Phi_t(\zeta)|.|d\zeta|.$$

Mais si $\zeta \in S_t$, $|\operatorname{Im}\zeta| = t$, donc

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq \int e^{2\pi t|x|}|u(x)|\,dx,$$

et, d'autre part,

$$|\Phi_t(\zeta)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n}\varphi(x) \leq 1.$$

En tenant compte de ce que, sur S_t, $d\zeta = \text{dét}(I + it\,V(\xi))\,d\xi$, où V est la matrice $((\partial/\partial\xi_k)v_j)$, et donc $|d\zeta| \leq M'_5 t^n d\xi$, on voit que

$$|I_0| \leq M'_5 t^n\left\{\int(1+|\xi|)^{-n-1}d\xi\right\}$$
$$\times\left\{\sup_{\zeta\in S_t}\left[(1+|\xi|)^{n+1}\left|R(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right|\right]\right\}\int e^{2\pi t|x|}|u(x)|\,dx.$$

Donc, en rappelant que $t = |p|$, nous voyons que s'il nous faut obtenir (3.7) pour $q = 0$, il nous suffira d'établir une majoration

$$(5.1)\qquad (1+|\xi|)^{n+1}\left|R(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)\right| \leq M_{11}^{|p|+1}p!,\qquad \xi = \operatorname{Re}\zeta,$$

où la constante $M_{11} > 0$ ne doit dépendre ni de $\zeta \in S_t$, ni de p.

Nous commençons par appliquer la formule de Leibniz :

$$R(D_\zeta)\left(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)}\right)=\sum_r \frac{1}{r!}D_\zeta^r(\zeta^p)\,R^{(r)}(D_\zeta)\,(P^{-1}(\zeta))$$
$$=\sum_{r\preceq p}\binom{p}{r}(2i\pi)^{-|r|}\zeta^{p-r}R^{(r)}(D_\zeta)\,(P^{-1}(\zeta)).$$

Nous avons posé $\binom{p}{r}=\binom{p_1}{r_1}\cdots\binom{p_n}{r_n}$; $r\preceq p$ signifie que $r_j\leqq p_j$ pour tout $j=1,\ldots,n$. Comme

$$\left|\sum_{r\preceq p}\binom{p}{r}(2i\pi)^{-|r|}\right|\leqq 2^{|p|},$$

on voit que, pour obtenir la majoration (5.1), il suffira d'obtenir une majoration

(5.2) $$\sup_{\zeta\in S_t}\{(1+|\xi|)^{n+1}|\zeta^{p-r}R^{(r)}(D_\zeta)(P^{-1}(\zeta))|\}\leqq M_{12}^{|p|+1}p!,$$

où M_{12} ne doit dépendre ni de p, ni de r (on rappelle que $t=|p|$ et que $r\preceq p$). Pour obtenir une majoration (5.2), nous devrons renforcer nos hypothèses, et tout d'abord, supposer dorénavant que Q, et donc aussi $R=Q^{|p|}$, sont des polynômes *homogènes*. Ceci va nous permettre d'appliquer le lemme 3 ci-dessous.

Il est commode, pour énoncer le lemme 3, d'adopter les notations suivantes. Soit $N(n,\nu)$ le nombre de n-uples $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de longueur $|\alpha|=\nu$; on a d'ailleurs $N(n,\nu)=\dfrac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$. Nous noterons alors $g^{(\nu)}$ la fonction définie dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}^{N(n,\nu)}$ dont les valeurs ont pour coordonnées les fonctions scalaires $D^\alpha g$, $|\alpha|=\nu$ (ici, comme plus bas, g désigne une fonction $\mathcal{C}^\infty$ arbitraire). Plus généralement, nous noterons $\xi_{(\nu)}$ la variable dans $\mathbf{R}^{N(n,\nu)}$, ξ_α sa coordonnée correspondant au n-uple α, $|\alpha|=\nu$.

LEMME 3. — *Pour tout entier $k\geqq 0$ et tout n-uple α de longueur $|\alpha|\leqq k$, il y a un polynôme U_α^k ayant les propriétés suivantes :*

(5.3) $U_0^k=(-1)^k k!$ *et* $U_\alpha^k=0$ *si* $|\alpha|=1$;

(5.4) *Si* $2\leqq|\alpha|\leqq k$, U_α^k *est un polynôme en les* ξ_β *pour* $2\leqq|\beta|$, $\beta\preceq\alpha$ (*i. e.*, $\alpha_j\geqq\beta_j$ *pour tout* $j=1,\ldots,n$);

(5.5) *Si T est une indéterminée,*

$$U_\alpha^k(T^2\xi_{(2)},\ldots,T^\nu\xi_{(\nu)},\ldots)=T^{|\alpha|}U_\alpha^k(\xi_{(2)},\ldots,\xi_{(\nu)},\ldots);$$

(5.6) $\|U_\alpha^k\|\leqq e^{kn}(k-|\alpha|+3^n)!,$

et enfin :

(5.7) *Pour tout polynôme homogène H en n variables, de degré k, et pour toute fonction $g \in \mathcal{E}^\infty$,*

$$g\, H(D)\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{|\alpha| \leq k} U_\alpha^k\left(\frac{g^{(2)}}{g}, \ldots, \frac{g^{(\nu)}}{g}, \ldots\right) H^{(\alpha)}\left(\frac{g^{(1)}}{g}\right).$$

Nous avons défini la norme d'un polynôme U, $\| U \|$, en un nombre quelconque N de variables ξ_j ($j = 1, \ldots, N$), comme le maximum de $| U |$ sur le « cube » unité de $\mathbf{C}^N$ [*cf.* (4.6)]

$$\| U \| = \sup_{\substack{|\xi_j| \leq 1 \\ j=1, \ldots, N}} | U(\xi) |.$$

Démonstration du lemme 3. — On commence par appliquer la formule de Leibniz, de la façon suivante :

$$0 = H(D)\left(g \frac{1}{g}\right) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \xi_\alpha \left[g\, H^{(\alpha)}(D)\left(\frac{1}{g}\right)\right],$$

où nous avons posé $\xi_\alpha = D^\alpha g/g$. On déduit de cela

$$(5.8) \qquad -g\, H(D)\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \xi_\alpha g\, H^{(\alpha)}(D)\left(\frac{1}{g}\right).$$

On raisonne alors par récurrence sur le degré k de H. Les propriétés (5.3) à (5.7) sont trivialement satisfaites, lorsque $k = 0$, par $U_0^0 = 1$. On peut donc écrire, d'après (5.8),

$$(5.9) \quad -g\, H(D)\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \frac{\xi_\alpha}{\alpha!} \times \sum_{|\beta| \leq k - |\alpha|} U_\beta^{k-|\alpha|}(\xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(\beta)})\, H^{(\alpha+\beta)}(\xi_{(1)}),$$

où $\xi_{(\nu)}$ désigne l'élément de $R^{N(n,\nu)}$ ayant pour coordonnées les $D^r g/g$ avec $| r | = \nu$. On réordonne la sommation dans (5.9) :

$$-g\, H(D)\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{|\alpha|=1,\ |\beta| \leq k-1} U_\beta^{k-1}(\xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(\beta)})\, \xi_\alpha H^{(\alpha+\beta)}(\xi_{(1)}) + \sum_{\substack{2 \leq |\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq k - |\alpha|}} \frac{\xi_\alpha}{\alpha!} U_\beta^{k-|\alpha|}(\xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(\beta)})\, H^{(\alpha+\beta)}(\xi_{(1)}).$$

Nous appliquons la formule d'Euler pour les fonctions homogènes :

$$\sum_{|\alpha|=1} \xi_\alpha H^{(\alpha+\beta)}(\xi_{(1)}) = (k - |\beta|)\, H^{(\beta)}(\xi_{(1)}),$$

d'où

$$-g\,H(D)\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{|\beta|\leq k-1} (k-|\beta|)\,U_\beta^{k-1}(\xi_{(2)},\ldots)\,H^{(\beta)}(\xi_{(1)})$$
$$+\sum_{2\leq|\gamma|\leq k}\left(\sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|\geq 2}} \frac{\xi_\alpha}{\alpha!}\,U_\beta^{k-|\alpha|}(\xi_{(2)},\ldots)\right)H^{(\gamma)}(\xi_{(1)}).$$

Finalement, on voit que

$$(5.10)\qquad -U_\gamma^k = (k-|\gamma|)\,U_\gamma^{k-1} + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|\geq 2}} \frac{\xi_\alpha}{\alpha!}\,U_\beta^{k-|\alpha|},$$

où, dans tous les cas, $|\gamma|\leq k$, et où, au second membre, le premier terme n'est présent que lorsque $|\gamma|\leq k-1$, alors que la somme, qui constitue le deuxième terme, n'est présente que lorsque $|\gamma|\geq 2$. On a $U_0^k = -k\,U_0^{k-1}$ et, en vertu de la récurrence sur k, $U_\gamma^k = U_\gamma^{k-1} = 0$ si $|\gamma| = 1$, d'où (5.3).

Encore à cause de la récurrence sur k, on voit que U_γ^k n'est fonction que des ξ_α pour $\alpha\leq\gamma$ et $|\alpha|\geq 2$, d'où (5.4). De même, la propriété d'homogénéité exprimée par (5.5) est vérifiée puisqu'elle l'est par les U_α^l, avec $l\leq k$. Reste à vérifier la majoration (5.6). On a, d'après (5.10),

$$\|U_\gamma^k\|\leq (k-|\gamma|)\,(k-1-|\gamma|+3^n)!\,e^{(k-1)n}$$
$$+\sum_{2\leq|\alpha|,\ \alpha\preceq\gamma} \frac{1}{\alpha!}\,e^{(k-|\alpha|)n}(k-|\gamma|+3^n)!,$$

d'où l'on déduit facilement (5.6).

Le lemme 3 est démontré. Nous allons l'appliquer en vue d'obtenir la majoration (5.2); nous prendrons donc $H = R^{(r)}$. Nous obtenons ainsi :

$$(5.11)\qquad R^{(r)}(D)\left(\frac{1}{P}\right) = \sum_{|\alpha|\leq|p|d-|r|} \frac{1}{P}\,U_\alpha^{d|p|-|r|}\left(\frac{P^{(2)}}{P},\ldots\right)R^{(r+\alpha)}\left(\frac{P^{(1)}}{P}\right).$$

Soulignons le fait très important suivant, déjà signalé à propos de la majoration (5.2), que nous nous intéressons seulement aux n-uples r tels que $r\preceq p$.

Un autre aspect important de la somme, au deuxième membre de (5.11), c'est que le n-uple α est nécessairement de type R. Si nous utilisons le fait que $R = Q^{|p|}$, nous voyons que α est de type Q. Revenons d'ailleurs au polynôme Q. On a, pour tout n-uple s,

$$(5.12)\qquad R^{(s)} = \sum c_\sigma^s\,Q^{(\sigma_1)}\ldots Q^{(\sigma_{|p|})},$$

où la sommation s'effectue sur les ensembles $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|p|})$ de $|p|$ n-uples σ_j vérifiant $\sigma_1+\ldots+\sigma_{|p|}=s$, et où

$$c_\sigma^s=s!/(\sigma_1!\ldots\sigma_{|p|}!).$$

Finalement, nous devons étudier une expression

$$Z_r=\sum c_\sigma^s\, U_\alpha^{d|p|-|r|}\left(\frac{P^{(2)}}{P}, \ldots\right) Q^{(\sigma_1)}\left(\frac{P^{(1)}}{P}\right)\cdots Q^{(\sigma_{|p|})}\left(\frac{P^{(1)}}{P}\right),$$

où r est un n-uple de type Q et $t\leqq p$. La sommation s'effectue de la façon suivante : s varie dans l'ensemble des n-uples de type Q et de longueur $\leqq d|p|$; $\alpha=s-r$; la sommation par rapport aux σ_j s'effectue comme dans l'expression (5.12) de $R^{(s)}$. Enfin, *remarque importante*, les $U_\alpha^{d|p|-|r|}\left(\dfrac{P^{(2)}}{P}, \ldots\right)$ ne dépendant que des $P^{(\beta)}/P$, où $|\beta|\geqq 2$ et $\beta \preceq \alpha$ [d'après (5.4)], en particulier β est de type Q.

Il nous faut démontrer que, sous des hypothèses convenables, on a

$$\sup_{\zeta\in S_t}\{(1+|\xi|)^{n+1}|\zeta^{p-r}Z_r|\}\leqq cM_{12}^{|p|+1}p!. \tag{5.13}$$

Ceci entraînera bien (5.2) [on a $|P(\zeta)|\geqq c$ pour $\zeta\in S_t$ d'après (4.4)].

6. Les hypothèses principales.

Pour établir les majorations (5.13), nous allons rendre plus strictes nos hypothèses concernant le polynôme P. Dorénavant, nous supposerons que $Q=Q_0^\lambda$, où Q_0 est un polynôme homogène de degré d_0, et λ un entier $\geqq 1$ qui sera choisi plus loin. Nous admettrons *qu'il existe des constantes* θ, $C>0$ *telles qu'on ait, pour tout nombre* $t\geqq\tau_0$ *et tout* $\xi\in\mathbf{R}^n$, $|\xi|\geqq\rho t$,

(6.1) *Pour tout n-uple* $\beta\neq 0$, *de type* Q (définition 1),

$$t^{|\beta|}|P^{(\beta)}(\xi+itv(\xi))|\leqq C\left(\frac{t}{t+|\xi|}\right)^{\theta(|\beta|-1)}|P(\xi+itv(\xi))|;$$

$$\left|Q_0\left(t\frac{P^{(1)}(\xi+itv(\xi))}{P(\xi+itv(\xi))}\right)\right|\leqq C\left(\frac{t}{t+|\xi|}\right)^\theta. \tag{6.2}$$

Nous rappelons que $P^{(1)}=\operatorname{grad}P$ et, plus généralement, que $P^{(j)}$ est le vecteur de $\mathbf{C}^{N(n,j)}$ ayant pour coordonnées les $P^{(\beta)}$ avec $|\beta|=j=1, \ldots$. Nous poserons, pour simplifier,

$$M(\xi, t)=\left(\frac{t}{t+|\xi|}\right)^\theta;$$

on remarquera que $M(\xi, t) \leqq 1$. Nous supposerons que la constante C ci-dessus est $\geqq 1$. Alors, d'après (6.1), on a pour $j \geqq 2$ et $\zeta \in S_t$,

$$\left|\frac{P^{(j)}(\zeta)}{P(\zeta)}\right| \leqq [Ct^{-1} M(\xi, t)^{1/2}]^j. \tag{6.3}$$

On utilise ensuite la propriété d'homogénéité (5.5), et la remarque de la page 174. Si nous tenons compte de (5.6) et de (6.3) nous obtenons

$$\left| U_\alpha^k\left(\frac{P^{(2)}(\zeta)}{P(\zeta)}, \dots\right)\right| \leqq e^{kn}(k - |\alpha| + 3^n)!\,(Ct^{-1} M(\xi, t)^{1/2})^{|\alpha|}. \tag{6.4}$$

D'autre part, encore en vertu de (6.1) et en augmentant, si nécessaire, la constante C, on a pour tout n-uple $\gamma \neq 0$,

$$\left| Q_0^{(\gamma)}\left(t\frac{P^{(1)}(\zeta)}{P(\zeta)}\right)\right| \leqq C,$$

et donc, pour tout n-uple γ,

$$\left| Q^{(\gamma)}\left(t\frac{P^{(1)}(\zeta)}{P(\zeta)}\right)\right| \leqq \begin{cases} C^\lambda & \text{si } |\gamma| > \lambda, \\ C^\lambda M(\xi, t)^{\lambda - |\gamma|} & \text{si } |\gamma| \leqq \lambda. \end{cases} \tag{6.5}$$

Nous allons tenir compte de (6.4) et (6.5) dans l'expression de Z_r (p. 174). Soit $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{|p|})$ un ensemble de $|p|$ n-uples; nous désignerons par $\nu(\sigma)$ le nombre de ces n-uples σ_j tels que $|\sigma_j| < \lambda/2$. En tenant compte du fait que Q est homogène, de degré d, on a

$$\begin{aligned} |Z_r| \leqq \sum c_\sigma^s\, & e^{(d|p|-|r|)n}(d|p| - |s| + 3^n)!\,(C/t)^{|\alpha|} \\ & \times M(\xi, t)^{|\alpha|/2} C^{\lambda|p|} t^{-(d|p|-|s|)} M(\xi, t)^{\lambda\nu(\sigma)/2}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Nous rappelons que $\alpha = s - r$ et que $r \precsim p$. La sommation est celle que nous avons précisée p. 174. En particulier,

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_{|p|} = s.$$

Il en résulte que

$$|s| \geqq \frac{\lambda}{2}(|p| - \nu(\sigma)),$$

et donc, puisque $|\alpha| = |s - r| \geqq |s| - |p| \geqq \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)|p| - \frac{\lambda}{2}\nu(\sigma)$,

$$\frac{1}{2}\{|\alpha| + \lambda\,\nu(\sigma)\} \geqq \lambda' |p|,$$

où nous avons posé $\lambda' = (\lambda - 4)/4$. Il est bien entendu que nous supposerons dorénavant $\lambda > 4$. Compte tenu de ceci, nous déduisons de (6.6)

$$|Z_r| \leqq M_{13}^{|p|+1} M(\xi, t)^{\lambda'|p|} \sum c_\sigma^s (d|p| - |s| + 3^n)!\, t^{-d|p|+|r|}.$$

Revenons à la définition de $M(\xi, t)$, et fixons λ de manière à avoir $\lambda'\theta \geqq 2$, ce qui entraîne, pour tout n-uple p, tel que $|p| \geqq n+1$,

$$|p|\lambda'\theta \geqq |p|+n+1,$$

soit

$$M(\xi, t)^{\lambda'|p|} \leqq M(\xi, t)^{\frac{1}{\theta}(|p|+n+1)} = \left(\frac{t}{t+|\xi|}\right)^{|p|+n+1}$$
$$\leqq t^{|p|+n+1}(1+|\xi|)^{-n-1}(t+|\xi|)^{|p|},$$

en supposant $t \geqq \tau_0 \geqq 1$. Remarquons ensuite que, sur S_t,

$$|\zeta^{p-r}| \leqq (t+|\xi|)^{|p-r|} \leqq t^{-|r|}(t+|\xi|)^{|p|},$$

et donc, enfin, pour tout $\zeta \in S_t$,

$$|\zeta^{p-r} Z_r| \leqq M_{14}^{|p|+1}(1+|\xi|)^{-n-1} t^{|p|+n+1} \Sigma_p,$$

où nous avons posé

$$\Sigma_p = \sum c_\sigma^s (d|p| - |s| + 3^n)!\, t^{-d|p|},$$

la convention de sommation ayant été décrite p. 174. Comme $t = |p|$, on a, pour tout $\zeta \in S_t$, en vertu de la formule de Stirling,

$$(1+|\xi|)^{n+1}|\zeta^{p-r} Z_r| \leqq M_{15}^{|p|+1} p!\, \Sigma_p,$$

et il suffira donc de prouver qu'on a $\Sigma_p \leqq M_{16}^{|p|+1}$. Or, d'après la formule de Stirling, on a

$$(d|p| - |s| + 3^n)! \leqq M_{17}^{|p|+1}(d|p| - |s|)^{d|p|-|s|} \leqq M_{17}^{|p|+1}(d|p|)^{d|p|-|s|}$$

et donc, puisque $t = |p|$,

$$\Sigma_p \leqq M_{18}^{|p|+1} \sum c_\sigma^s (d|p|)^{-|s|}.$$

Tout revient à montrer qu'on a

$$\sum c_\sigma^s (d|p|)^{-|s|} \leqq M_{19}^{|p|+1}. \tag{6.7}$$

Démonstration de (6.7). — Soient $X^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, |p|)$ $|p|$ vecteurs « indéterminés » de $\mathbf{R}^n$; on a

$$(X^{(1)} + \ldots + X^{(|p|)})^s = \sum c_\sigma^s (X^{(1)})^{\sigma_1} \ldots (X^{(|p|)})^{\sigma_{|p|}},$$

où, comme d'habitude, si X est un n-vecteur et p un n-uple, $X^p = X_1^{p_1} \ldots X_n^{p_n}$, et où la sommation s'effectue par rapport aux n-uples

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{|p|})$ tels que $\sigma_1 + \ldots + \sigma_{|p|} = s$. Appliquons (6.8) lorsque

$$X_k^{(j)} = 1/d\,|\,p\,| \quad \text{pour tous } j = 1, \ldots, |\,p\,|,\ k = 1, \ldots, n.$$

On obtient

$$\sum_{\sigma} c_\sigma^s (d\,|\,p\,|)^{-|s|} = d^{-|s|}.$$

Reportons ceci dans (6.7) en nous souvenant que la somme s'y calcule aussi par rapport à tous les n-uples s tels que $|\,s\,| \leqq d\,|\,p\,|$. On voit que

$$\sum_{s,\,\sigma} c_\sigma^s (d\,|\,p\,|)^{-|s|} \leqq d^{-|s|}\, 2^{n+d|p|+1}.$$

Ceci démontre (6.7) et, par conséquent, (5.13).

7. Énoncé du critère qui a été démontré.

Dans les paragraphes 1 à 7 du présent chapitre, nous avons construit, sous des hypothèses convenables, une solution élémentaire de $P(-D)$ qui est analytique dans le complémentaire d'un certain cône algébrique réel $\{x;\ Q(x) = 0\}$. Nous allons maintenant énoncer les conclusions de cette étude, en y apportant quelques simplifications évidentes. Tout d'abord, nous raisonnerons sur $P(D)$ au lieu de $P(-D)$. Nous poserons, pour toute fonction f et $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Ceci n'est autre que la symétrie par rapport à l'origine, agissant sur les fonctions définies dans $\mathbf{R}^n$. On peut la définir sur les distributions sur $\mathbf{R}^n$, en posant

$$\langle \check{T}, u \rangle = \langle T, \check{u} \rangle, \qquad u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

On voit alors facilement que les hypothèses et la conclusion de l'étude qui précède sont invariantes par symétrie par rapport à 0 puisque, si E est une solution élémentaire de $P(-D)$, $\check{E}$ en est une, pour $P(D)$, que E et $\check{E}$ sont analytiques en même temps dans un cône donné (ceci sous-entend que le cône est symétrique par rapport à 0, ce qu'il est — puisqu'il est algébrique), et enfin toutes nos hypothèses sont invariantes, comme on le vérifie en substituant ξ à $-\xi$ et $v(-\xi)$ à $-v(\xi)$.

En second lieu, nous remarquons que les zéros de Q et ceux de Q_0 sont les mêmes, ainsi que les n-uples de type Q et ceux de type Q_0 (définition 1). Ainsi avons-nous le droit de remplacer partout, dans nos hypothèses [c'est-à-dire dans (6.1)] et dans notre conclusion, le polynôme Q par Q_0. Ayant fait cela, nous pouvons omettre l'indice 0 et écrire Q au lieu de Q_0.

Soit enfin $\zeta \in S_\tau$ et $z \in \mathbf{C}^n$ tels que $|z' - \zeta'| \leqq \varepsilon\tau$, $z'' = \zeta''$ (*cf.* p. 161); on a, en vertu de (6.1),

$$|P(z) - P(\zeta)| \leqq \varepsilon \sum_{\beta \neq 0,\, \beta''=0} \frac{\tau^{|\beta|}}{\beta\,!} |P^{(\beta)}(\zeta)| \leqq \varepsilon C e^k |P(\zeta)|.$$

Si donc $\varepsilon \leqq 1/(2\,C e^k)$, nous voyons que $|P(z)| \geqq |P(\zeta)|/2$. Ceci signifie que la conjonction de (2.1) et de (6.1) implique (4.4). Nous pouvons donc énoncer ainsi le critère démontré :

THÉORÈME 1. — *Soit P un polynôme à n variables, à coefficients complexes. Supposons qu'il existe :*

1° *un polynôme homogène de degré d, à n variables, à coefficients complexes, Q;*

2° *une application $\mathcal{C}^1$, $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, bornée ainsi que toutes ses dérivées premières, $|v(\xi)| = 1$ si $|\xi| \geqq 1$,*

satisfaisant la condition suivante :

(7.2) *Il y a des constantes ρ, τ_0, θ, c, $C > 0$ telles que, pour tout $\tau \geqq \tau_0$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi| \geqq \rho\tau$, on ait*

$$|P(\xi + i\tau v(\xi))| \geqq c; \tag{7.3}$$

(7.4) *pour tout n-uple $\beta \neq 0$, de type Q* (définition 1),

$$\tau^{|\beta|} \left| \frac{P^{(\beta)}(\xi + i\tau v(\xi))}{P(\xi + i\tau v(\xi))} \right| \leqq C \left(\frac{\tau}{\tau + |\xi|} \right)^{\theta(|\beta|-1)};$$

$$\left| Q\left(\tau \frac{\operatorname{grad} P(\xi + i\tau v(\xi))}{P(\xi + i\tau v(\xi))} \right) \right| \leqq C \left(\frac{\tau}{\tau + |\xi|} \right)^{\theta}. \tag{7.5}$$

Dans ces conditions, le polynôme différentiel P(D) possède une solution élémentaire qui est analytique dans l'ouvert $\{x \in \mathbf{R}^n;\ Q(x) \neq 0\}$.

Comme scholie, rappelons qu'on peut prendre $E = E_0 + h$, h étant une fonction entière de type exponentiel, et E_0 étant la distribution définie par

$$\langle E_0, \check{u} \rangle = \int_{S_\tau} \frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)} \Phi_\tau(\zeta)\, d\zeta,$$

où u est un élément arbitraire de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\hat{u}$ sa transformée de Fourier, τ un nombre réel $\geqq \tau_0$,

$$S_\tau = \{\zeta \in \mathbf{C}^n;\ \operatorname{Re}\zeta = \xi,\ \operatorname{Im}\zeta = \tau v(\xi)\},$$

$$\Phi_\tau(\zeta) = \varphi(\tau^{-1}\xi), \qquad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 1,$$

$$\varphi(\xi) = 0 \quad \text{si } |\xi| < \rho \qquad \text{et} \qquad \varphi(\xi) = 1 \quad \text{si } |\xi| > 2\rho.$$

CHAPITRE II.

Exemples d'applications.

8. Polynômes différentiels à caractéristiques réelles simples et à partie principale réelle.

Comme auparavant, nous considérons un polynôme P en n indéterminées, à coefficients complexes, dont nous noterons m le degré. La *partie principale* de P, c'est-à-dire la partie homogène de degré maximal, ici de degré m, sera notée P_m. Nous ferons l'hypothèse suivante :

(8.1) *La partie principale P_m de P est à coefficients réels.*
Les *caractéristiques* de l'opérateur différentiel $P(D)$ sont par définition les vecteurs $\zeta \in \mathbf{C}^n$, $\zeta \neq 0$, tels que

$$P_m(\zeta) = 0.$$

Un tel vecteur est appelé une caractéristique *simple* de $P(D)$ si

$$\operatorname{grad} P_m(\zeta) \neq 0.$$

Nous ferons la deuxième hypothèse suivante :

(8.2) *Les caractéristiques réelles de $P(D)$ sont simples.*

Exemples de polynômes différentiels vérifiant (8.1) *et* (8.2) : les opérateurs à partie principale réelle qui sont, soit strictement hyperboliques, soit elliptiques; les opérateurs ultrahyperboliques.

Supposons donc que (8.1) et (8.2) soient vérifiées. Lorsque $\xi \in \mathbf{R}^n$ parcourt le *cône caractéristique réel* de $P(D)$,

$$\Gamma = \{ \xi \neq 0;\ P_m(\xi) = 0 \},$$

la réunion de $\{0\}$ et de toutes les droites d'équation

$$x = t \operatorname{grad} P_m(\xi), \qquad t \in \mathbf{R}^1,$$

forme un cône, appelé *cône bicaractéristique réel* de $P(D)$. Soit γ l'intersection du cône Γ avec la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. L'intersection, avec cette même sphère, du cône bicaractéristique est l'image de γ par l'application

$$\xi \mapsto \tilde{v}(\xi) = \frac{\operatorname{grad} P_m(\xi)}{|\operatorname{grad} P_m(\xi)|}. \tag{8.3}$$

Il n'est pas difficile de voir que (sous les conditions où nous nous sommes placés) cette image est un ensemble algébrique, c'est-à-dire l'ensemble des zéros d'un certain polynôme (puisque nous sommes sur le corps des réels). (*Voir*, par exemple, F. BRUHAT [2].)

Il en résulte que le cône bicaractéristique réel lui-même est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène, que nous noterons Q. Bien entendu, ce cône n'est pas identique à l'espace tout entier, i. e., le polynôme Q n'est pas identiquement nul.

Nous allons démontrer que le théorème 1 admet la conséquence suivante :

THÉORÈME 2. — *Soit $P(D)$ un polynôme différentiel dont la partie principale est à coefficients réels et dont les caractéristiques réelles sont simples.*

Alors $P(D)$ possède une solution élémentaire E qui est analytique dans le complémentaire du cône bicaractéristique réel de $P(D)$.

Démonstration. — Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^n$, $0 \leqq \psi \leqq 1$, nulle au voisinage de l'origine, égale à 1 en dehors de la boule $|\xi| < 1/2$. Soit $\tilde{v}$ la fonction définie en (8.3); posons $v = \psi\tilde{v}$. Soit Q le polynôme introduit plus haut : l'ensemble de ses zéros réels est exactement le cône bicaractéristique réel de $P(D)$. Nous pouvons noter d son degré (Q est homogène de degré d). Nous allons démontrer que v et Q satisfont à la condition (7.2), avec $\theta = 1$. Ceci résultera de la propriété suivante :

(8.4) *Il existe une constante $c > 0$ et un nombre $\rho \geqq 1$ tels que, pour tout nombre réel $\tau \geqq 1$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, vérifiant $|\xi| \geqq \rho\tau$,*

$$|P(\xi + i\tau\, v(\xi))| \geqq c\tau(|\xi| + \tau)^{m-1}.$$

Démonstration de (8.4). — Il suffit visiblement de considérer le cas où $P = P_m$. Or, pour $|\xi| \geqq 1$, on a

$$|P_m(\xi + i\tau\, v(\xi))| \geqq \Big| P_m(\xi) + i\tau\, |\operatorname{grad} P_m(\xi)| \Big| - K\tau^2(|\xi| + \tau)^{m-2},$$

où K est une constante $\geqq 0$, ne dépendant que de P_m, nulle si $m \leqq 1$. Comme P_m est réel dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$\Big| P_m(\xi) + i\tau\, |\operatorname{grad} P_m(\xi)| \Big| \geqq \tau\, |\operatorname{grad} P_m(\xi)|.$$

Comme les caractéristiques réelles de $P(D)$ sont simples, $|\operatorname{grad} P_m(\xi)|$ ne s'annule pas pour $\xi \neq 0$ (là où $\operatorname{grad} P_m$ s'annule, P_m s'annule aussi d'après l'identité d'Euler), donc, par homogénéité, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$|\operatorname{grad} P_m(\xi)| \geqq c_0\, |\xi|^{m-1}.$$

Finalement, pour $|\xi| \geqq 1$,

$$|P_m(\xi + i\tau\, v(\xi))| \geqq \tau\, \{ c_0\, |\xi|^{m-1} - K\tau(|\xi| + \tau)^{m-2} \}.$$

De là, la propriété (8.4) découle facilement.

Les propriétés (7.3) et (7.4) sont des conséquences immédiates de (8.4) (on prend $\theta = 1$ comme nous l'avons dit). Reste à vérifier (7.5), aussi, avec $\theta = 1$.

Raisonnons sur la sphère unité $\{\xi \in \mathbf{R}^n;\ |\xi| = 1\}$. On a, sur cette sphère,

$$(8.5) \qquad |Q(\operatorname{grad} P_m(\xi))| \leqq C_0 |P_m(\xi)|.$$

En effet, $Q(\operatorname{grad} P_m(\xi))$ s'annule là où $P_m(\xi) = 0$, et cette équation définit une surface algébrique sans singularités (en dehors de l'origine).

Le premier membre de (8.5) est homogène en ξ de degré $d(m-1)$ alors que le deuxième l'est de degré m, donc, pour $\xi \in \mathbf{R}^n$ arbitraire, on doit avoir

$$(8.6) \qquad |Q(\operatorname{grad} P_m(\xi))| \leqq C_0 |\xi|^{d(m-1)-m} |P_m(\xi)|.$$

D'autre part, pour des raisons d'homogénéité évidentes, on a

$$(8.7) \qquad |Q(\operatorname{grad} P_m(\xi)) - Q(\operatorname{grad} P(\xi + i\tau v(\xi)))| \leqq C_1 \tau (|\xi| + \tau)^{d(m-1)-1}.$$

Supposons maintenant que $|\xi| \geqq \rho\tau$, comme dans (8.4); on a

$$\begin{aligned} |P_m(\xi)| &\leqq |P(\xi + i\tau v(\xi))| + C_2 \tau (|\xi| + \tau)^{m-1} \\ &\leqq C_3 |P(\xi + i\tau v(\xi))|. \end{aligned}$$

En tenant compte de ceci et de (8.7) dans (8.6), on voit que

$$\left| Q\left(\frac{\operatorname{grad} P(\xi + i\tau v(\xi))}{P(\xi + i\tau v(\xi))}\right) \right| \leqq C_4 \left\{ \frac{|\xi|^{d(m-1)-m}}{|P(\xi + i\tau v(\xi))^{d-1}|} + \frac{\tau(|\xi| + \tau)^{d(m-1)-1}}{|P(\xi + i\tau v(\xi))^d|} \right\}.$$

Ceci est valable pour $|\xi| \geqq \rho\tau$. En utilisant une fois de plus (8.4), on obtient

$$\left| Q\left(\frac{\operatorname{grad} P(\xi + i\tau v(\xi))}{P(\xi + i\tau v(\xi))}\right) \right| \leqq C_5 \left[\tau^{-d+1} \frac{|\xi|^{(d-1)(m-1)-1}}{(|\xi| + \tau)^{(d-1)(m-1)}} + \tau^{-d+1} (|\xi| + \tau)^{-1} \right].$$

La propriétés (7.5) est une conséquence immédiate de cette inégalité. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Corollaire 1. — *Si $P(D)$ est strictement hyperbolique, $P(D)$ possède une solution élémentaire qui est analytique dans le complémentaire du cône bicaractéristique.*

En effet, si $P(D)$ est strictement hyperbolique, il existe un nombre complexe $z \neq 0$ tel que $zP(D)$ ait sa partie principale à coefficients réels.

Corollaire 2. — *Si $P(D)$ est elliptique, $P(D)$ possède une solution élémentaire analytique dans le complémentaire de l'origine.*

En effet, $P(D)\overline{P}(D)$ est à coefficients réels et n'a pas de caractéristiques réelles, donc son cône bicaractéristique est réduit à $\{0\}$. Si E est une solution élémentaire de $P(D)\overline{P}(D)$, $\overline{P}(D)E$ en est une de $P(D)$.

Supposons toujours que $P_m(D)$ est à coefficients réels et que les caractéristiques réelles de $P(D)$ sont simples. Il résulte facilement de (8.4) que la solution élémentaire E de $P(D)$ construite au chapitre I est *propre*, ce qui signifie que, pour tout opérateur différentiel à coefficients constants, $R(D)$, *plus faible* que $P(\xi)$,(ce qui veut dire que la fonction

$$\xi \mapsto \left(\sum_{\alpha} | R^{(\alpha)}(\xi)|^2\right) \Big/ \left(\sum_{\alpha} | P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)$$

est bornée dans $\mathbf{R}^n$; on a

$$R(D) E \star L^2_c \subset L^2_{\text{loc}}.$$

9. Polynômes différentiels semi-elliptiques.

Dans ce paragraphe, m désignera un n-uple $(m_1, \ldots, m_n)$ (les m_j sont donc des entiers $\geqq 0$). Si $p = (p_1, \ldots, p_n)$ est un autre n-uple, on pose

$$| p : m | = \sum_{j=1}^{n} p_j / m_j.$$

Étant donné un polynôme P (à n variables, à coefficients complexes), il existe toujours un n-uple m tel que

$$P(X) = \sum_{|p:m| \leqq 1} a_p X^p, \tag{9.1}$$

tel, de plus, que

$$P_m(X) = \sum_{|p:m|=1} a_p X^p$$

ne soit pas identiquement nul. Mais, en général, m n'est pas unique. Si l'on peut choisir m de sorte que le seul zéro de P_m dans R^n soit l'origine, alors m est unique : car pour chaque $j = 1, \ldots, n$, m_j est exactement le degré de $P(X)$ par rapport à X_j.

DÉFINITION 2. — *On dit que le polynôme différentiel $P(D)$ est semi-elliptique s'il existe un n-uple m tel qu'on ait* (9.1) *et si le seul zéro de P_m dans $\mathbf{R}^n$ est l'origine.*

Les polynômes différentiels elliptiques et ceux paraboliques (au sens de Petrowski) sont semi-elliptiques. On peut démontrer (*voir* HÖRMANDER [4], theorem 4.1.8) que les opérateurs semi-elliptiques sont hypoelliptiques.

Si $P(D)$ est semi-elliptique et si m_j est le degré de $P(X)$ par rapport à X_j $(j = 1, \ldots, n)$, nous dirons que $m = (m_1, \ldots, m_n)$ est le *multi-degré* de $P(D)$. Nous poserons, pour $\zeta \in \mathbf{C}^n$,

$$|\zeta|^m = |\zeta_1|^{m_1} + \ldots + |\zeta_n|^{m_n}, \qquad \zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_n).$$

LEMME 4. — *Si $P(D)$ est semi-elliptique de multi-degré m, il y a des constantes ρ, $C > 0$ telles que, pour tout ξ, $\eta \in \mathbf{R}^n$, vérifiant*

(9.2) $$|\xi|^m \geqq \rho |\eta|^m,$$

on ait

(9.3) $$1 + |\xi|^m + |\eta|^m \leqq C(1 + |P(\xi + i\eta)|).$$

Démonstration. — Il suffit de raisonner dans le cas où $P = P_m$. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, si $|\xi|^m = 1$, $|P_m(\xi)| \geqq c$. Donc, par continuité, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si $|\eta|^m \leqq \delta$, $|P_m(\xi + i\eta)| \geqq c/2$.
Il suffit de prendre $\rho = \delta^{-1}$ et d'utiliser la propriété d'homogénéité

$$P_m(t^{1/m_1}X_1, \ldots, t^{1/m_n}X_n) = t P_m(X_1, \ldots, X_n),$$

en choisissant $t = |\xi|^{-1}$ pour $\xi \neq 0$ maintenant arbitraire.

Un autre fait que nous utiliserons c'est que si l'on a (9.1) et si β est un n-uple quelconque,

(9.4) $$|P^{(\beta)}(\zeta)| \leqq C(1 + |\zeta|^m)^{1-|\beta:m|},$$

où C est une constante > 0 indépendante de $\zeta \in \mathbf{C}^n$.

Supposons que $P(D)$ soit semi-elliptique. Alors, pour chaque $\xi \in \mathbf{R}^n$, notons $d(\xi)$ le degré du polynôme $P(T\xi)$ par rapport à l'indéterminée T. Nous désignerons par V_P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ formé de O et des $\xi \neq 0$ tels que $d(\xi)$ soit minimum, sans être maximum et sans être nul [noter que si $\deg P > 0$, $\xi \neq 0$ implique $d(\xi) \neq 0$].

THÉORÈME 3. — *Si $P(D)$ est semi-elliptique, il possède une solution élémentaire qui est analytique dans le complémentaire du sous-espace vectoriel V_P de $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. — On choisit les coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ de sorte que $x_1, \ldots, x_k$ soient les coordonnées de l'orthogonal de V_P, i. e., que V_P soit exactement l'ensemble des zéros de

$$Q(X) = X_1^2 + \ldots + X_k^2.$$

Ainsi nous nous trouvons dans la situation introduite p. 160. Nous prendrons $v(\xi) = (1, 0, \ldots, 0)$. On voit facilement que la propriété (7.2) est une conséquence du fait suivant :

(9.5) *Il existe des constantes ρ, $C > 0$ telles que, pour tout n-uple β de type Q* (i. e., tel que $\beta_j = 0$ si $j > k$) *et tout $\zeta = (\xi_1 + i\tau, \xi') \in \mathbf{C}^n$ $|\xi| \geqq \rho\tau$, $\tau \geqq 1$, on ait*

$$\tau^{|\beta|}|P^{(\beta)}(\zeta)| \leqq C\left(\frac{\tau}{\tau + |\xi|}\right)^{|\beta|}|P(\zeta)|.$$

Nous déduisons (9.5) de (9.3) et (9.4). En effet, prenons $\eta = \tau(1, 0, \ldots, 0)$; (9.2) devient $|\xi|^m \geq \rho\tau^{m_1}$, qui est une conséquence de $|\xi| \geq \rho^{1/m_1}\tau$, puisque $m_1 \leq m_j$ pour tout j. La conjonction de (9.3) et (9.4) entraîne

$$\left|\frac{P^{(\beta)}(\zeta)}{P(\zeta)}\right| \leq C'(1 + \tau^{m_1} + |\xi|^m)^{-|\beta:m|}.$$

Mais si β est de type Q, $|\beta : m| = |\beta|/m_1$ et donc

$$(|\xi|^m)^{|\beta:m|} \geq |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|,$$

d'où immédiatement (9.5).

Corollaire 1. — *Tout polynôme différentiel elliptique possède une solution élémentaire analytique dans* $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

En effet, si $P(D)$ est elliptique, $V_P = \{0\}$.

Corollaire 2. — *Si $P(D)$ est parabolique par rapport à x_1, il possède une solution élémentaire qui est analytique dans l'ouvert* $\{x \in \mathbf{R}^n;\ x_1 \neq 0\}$.

En effet, si $P(D)$ est parabolique en x_1, V_P est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$.

10. L'opérateur de Schrödinger.

L'opérateur de Schrödinger

$$\frac{1}{i}(\partial/\partial t) + (\partial/\partial x_1)^2 + \ldots + (\partial/\partial x_n)^2$$

possède une solution élémentaire E qui est analytique dans l'ouvert $t \neq 0$, par exemple

$$E = i\left(\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n Y(t)\exp\left(\frac{|x|^2}{4it}\right),$$

où Y est la fonction d'Heaviside. Nous allons montrer que le polynôme différentiel de Schrödinger satisfait aux conditions du théorème 1. En fait, nous raisonnerons sur le polynôme $P(X) = X_1 - |X'|^2$, où $X' = (X_2, \ldots, X_n)$ et $|X'|^2 = X_2^2 + \ldots + X_n^2$. Nous montrerons que la condition (7.2) est satisfaite si l'on prend $Q(X) = X_1$ et

$$v(\xi) = (v_1(\xi), v'(\xi)),$$

avec

$$v_1(\xi) = a(\xi)([a(\xi)]^2 + |\xi'|^2)^{-1/2},$$
$$v'(\xi) = \xi'([a(\xi)]^2 + |\xi'|^2)^{-1/2}.$$

La fonction a est définie ainsi :

$$a(\xi) = (1 + \xi_1^2)^{\varphi(t)/2},$$

où $t = \dfrac{\xi_1}{1 + |\xi'|^2}$ et où φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $t \in \mathbf{R}^1$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geqq 0$, $\varphi(t) = 1$, pour $t \leqq -1$. Nous supposerons qu'on a toujours

$$(10.1) \qquad |\xi| \geqq \rho\tau, \qquad \tau \geqq 1,$$

où ρ est une constante qui sera choisie plus bas. Posons $\zeta = \xi + i\tau v(\zeta)$. Alors

$$\operatorname{Re} P(\zeta) = \xi_1 - |\xi'|^2 + \tau^2 |\xi'|^2/([a(\xi)]^2 + |\xi'|^2),$$
$$\operatorname{Im} P(\zeta) \,| = \tau(a(\xi) + 2|\xi'|^2)/([a(\xi)]^2 + |\xi'|^2)^{1/2}.$$

Nous allons démontrer qu'on a, sous les conditions (10.1),

$$(10.2) \qquad |P(\zeta)| \geqq c\tau^{1/2}(\tau + |\xi|)^{1/2}.$$

La constante c sera > 0 et indépendante de τ et ξ. Comme $P^{(1,0,\ldots 0)} = 1$ et que les seuls n-uples β de type Q sont ceux tels que $\beta_j = 0$ si $j > 1$, on voit que (10.2) entraînera la validité de (7.2).

Nous distinguerons plusieurs cas, suivant la valeur de $t = \xi_1/(1 + |\xi'|^2)$, et nous supposerons qu'on a

$$(10.3) \qquad |\operatorname{Re} P(\zeta)| \leqq \frac{1}{2}(\tau + |\xi|),$$

autrement (10.2) est vérifiée.

1° $t \leqq -1$. — Donc $\xi_1 < 0$, en vertu de quoi (10.3) fournit

$$|\xi_1| + |\xi'|^2 \leqq \tau + 2\tau^2 |\xi'|^2/(a^2 + |\xi'|^2).$$

Nous choisissons ρ dans (10.1) de manière à avoir $|\xi_1| + |\xi'|^2 \geqq 2\tau$, d'où

$$|\xi'|^2 \leqq 4\tau^2 |\xi'|^2/(a^2 + |\xi'|^2),$$

d'où

$$(10.4) \qquad (a^2 + |\xi'|^2)^{1/2} \leqq 2\tau.$$

Puisque $t \leqq -1$, on a $a(\xi) \geqq |\xi_1|$: en prenant $\rho > 2$, on a abouti à une contradiction : donc (10.3) doit être faux, donc (10.2) est vérifiée.

2° $-1 \leqq t \leqq 0$. — Ici encore, (10.3) implique (10.4), d'où

$$\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \frac{1}{2}(a + 2|\xi'|^2) \geqq |\xi'|^2.$$

Mais $|\xi_1| \leqq |t|(1 + |\xi'|^2)$. Si $\rho > 5$, ceci exige $|\xi'| > 1$, et donc $|\xi_1| \leqq 2|\xi'|^2$, soit $\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \frac{1}{4}(|\xi_1| + |\xi'|^2)$. Mais le fait que $a \geqq 1$

entraîne $\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \tau/2$, donc

$$\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \frac{1}{8}(\tau + |\xi_1| + |\xi'|^2),$$

ce qui entraîne aussitôt (10.2).

3° $0 \leqq t \leqq 4$. — On a $|\xi_1| \leqq 4(1 + |\xi'|^2)$. Comme $a(\xi) = 1$ pour $t \geqq 0$, on a

$$\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \tau(1 + |\xi'|^2)^{1/2} \geqq \frac{1}{8}\tau(|\xi_1| + |\xi'|^2)^{1/2},$$

d'où aisément (10.2).

4° $t \geqq 4$. — Alors $|\xi'|^2 \leqq \frac{1}{4}|\xi_1|$; on déduit de (10.3)

$$3|\xi_1| \leqq 2(\tau + |\xi_1| + |\xi_1|^{1/2}),$$

d'où $|\xi_1| \leqq 16\,\tau$. On utilise une fois de plus le fait que $\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \tau/2$. Ceci donne, compte tenu de ce que $4|\xi'|^2 \leqq |\xi_1|$,

$$\operatorname{Im} P(\zeta) \geqq \frac{1}{128}(\tau + |\xi_1| + |\xi'|^2),$$

d'où (10.2).

11. Support singulier des solutions élémentaires et régularité des solutions.

Nous rappelons que le *support singulier* d'une distribution T (définie dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$), supp sing T, est le plus petit sous-ensemble fermé de Ω en dehors duquel T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Soient un polynôme différentiel $P(D)$ sur $\mathbf{R}^n$, x^0 un point quelconque de $\mathbf{R}^n$.

THÉORÈME 4. — *Soit une distribution T dans un ouvert Ω contenant x^0. On suppose qu'il existe une solution élémentaire F de $P(-D)$ et un ouvert relativement compact Ω' de Ω, $\Omega' \ni x^0$, tels que les faits suivants soient vrais :*

(11.1) *$P(D)T$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω';*

(11.2) *les ensembles*

$$\partial\Omega' \cap [(\text{supp sing} F) + x^0] \quad \textit{et} \quad \text{supp sing } T$$

sont disjoints.

Dans ces conditions, T est $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de x^0.

Démonstration. — Le support singulier de la distribution T sera noté $\mathcal{S}(T)$. Par une translation, nous nous ramenons aussitôt au cas où $x^0 = 0$, et nous considérons un voisinage U de $\partial\Omega'$ tel que $\mathcal{S}(T)$

et $U \cap \mathcal{S}(F)$ soient disjoints. Soit $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$, $g = 1$ dans un voisinage de 0 et $\operatorname{supp}(\operatorname{grad} g) \subset U$. Posons $E = \check{F}$; ainsi $P(D)E = \delta$. Posons aussi

$$S = P(D)(gT) - g\,P(D)T:$$

supp $S \subset \Omega' \cap U$, et l'on a

$$gT = E \star P(D)(gT) = E \star [g\,P(D)T] + E \star S.$$

Désignons par R l'une quelconque des deux distributions $g\,P(D)T$ ou S. Dans les deux cas, supp$R$ est compact et $\mathcal{S}(R)$ est contenu dans

$$\operatorname{supp}(\operatorname{grad} g) \cap \mathcal{S}(T) \subset U \cap \mathcal{S}(T).$$

On utilise alors le fait, vrai pour n'importe quelles distributions E et R, dont l'une au moins est à support compact, que

(11.3) $$\mathcal{S}(E \star R) \subset \mathcal{S}(E) + \mathcal{S}(R)$$

(*cf.* démonstration de la proposition 7.2) dans Treves [9]). Ceci entraînera, compte tenu de ce que $F = \check{E}$,

$$\mathcal{S}(gT) \subset U \wedge \mathcal{S}(T) - \mathcal{S}(F),$$

et donc que $\mathcal{S}(gT)$, donc aussi $\mathcal{S}(T)$, ne contient pas O.

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *Soient un ouvert borné Ω' de $\mathbf{R}^n$, T une distribution définie dans un voisinage ouvert de $\overline{\Omega'}$ dont le support singulier ne rencontre pas $\partial\Omega'$. Soit $P(D)$ un polynôme différentiel quelconque sur $\mathbf{R}^n$. Si $P(D)T$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω', il en est de même de T.*

Corollaire 2. — *Soit $T \in \mathcal{C}'(\mathbf{R}^n)$ telle que $P(D)\,T$ soit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^n$. Si T est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors d'un compact, T est $\mathcal{C}^\infty$ dans l'espace $\mathbf{R}^n$ entier.*

Corollaire 3. — *Si $P(-D)$ a une solution élémentaire qui est $\mathcal{C}^\infty$ dans le complémentaire de l'origine, pour toute distribution T dans un ouvert Ω,*

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing} T = \operatorname{supp}\operatorname{sing} P(D)\,T$$

Le corollaire 3 est évidemment bien connu ! Le corollaire 2 se trouve dans Agranovič [1].

12. Remarques complémentaires sur le support singulier des solutions élémentaires.

Nous avons vu (théor. 2) que tout polynôme différentiel d'ordre m, $P(D)$, dont la partie principale $P_m(D)$ est à coefficients réels, et dont les caractéristiques réelles sont toutes simples, possède une solution élémentaire dont le support singulier est contenu dans le cône bicaractéristique réel. Ceci n'exclut aucunement que $P(D)$ ait une solution élémentaire dont le support singulier soit plus petit que le cône bicaractéristique réel, ou bien soit plus grand. Nous démontrons ici qu'en fait, pourvu qu'il ne soit pas elliptique, $P(D)$ possède toujours une solution élémentaire dont le support singulier est égal à l'espace tout entier (théor. 6). D'autre part, on rappelle que les polynômes différentiels strictement hyperboliques possèdent une solution élémentaire dont le support est contenu dans l'enveloppe convexe d'un *demi-cône* bicaractéristique réel — et qui est analytique dans le complémentaire de ce demi-cône. Le théorème 5 ci-dessous énonce que cette propriété est, en quelque sorte, ce qu'on peut espérer de mieux : sous nos conditions précédentes, à savoir que P_m soit réelle et que les caractéristiques réelles soient simples, le support singulier de n'importe quelle solution élémentaire doit contenir un demi-cône bicaractéristique réel.

THÉORÈME 5. — *Soit $P(D)$ un polynôme différentiel dont les caractéristiques réelles sont simples et dont la partie principale est à coefficients réels. Soit E une solution élémentaire quelconque de $P(D)$, $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$, un vecteur caractéristique réel quelconque de $P(D)$.*

Alors l'une au moins des deux demi-droites

$$x = t \operatorname{grad} P_m(\xi) \qquad \textit{ou bien} \qquad x = -t \operatorname{grad} P_m(\xi), \qquad t \geqq 0,$$

est entièrement contenue dans le support singulier de E.

Démonstration. — Il existe une fonction u, $\mathcal{C}^m$ dans R^n, qui est solution de l'équation homogène $P(-D)u = 0$ et dont le support singulier est exactement égal à la droite réelle engendrée par $\operatorname{grad} P_m(\xi)$ (ZERNER [11]). Supposons alors que l'assertion du théorème ne soit pas vraie : il y aurait un intervalle non vide dans chacune des deux demi-droites considérées qui ne serait pas contenu dans supp sing$E$. Autrement dit, il y aurait un voisinage Ω' de 0, ouvert et borné, tel que

$$\partial\Omega' \cap (\text{supp sing} E) \qquad \text{et} \qquad \text{supp sing} u$$

soient disjoints. Si nous appliquons le théorème 4 avec $P(D)$ au lieu de $P(-D)$, et $T = u$, on conclut que u est C^∞ au voisinage de l'origine, contrairement à l'hypothèse que tout point de la forme $x = t \operatorname{grad} P_m(\xi)$ (t réel) appartient à supp sing u.

THÉORÈME 6. — *Mêmes hypothèses sur $P(D)$ que pour le théorème 5. Si $P(D)$ n'est pas elliptique, il existe une solution élémentaire E de $P(D)$ dont le support singulier est égal à l'espace R^n entier.*

Démonstration. — Il existe une solution élémentaire E_0 de $P(D)$ dont le support singulier est contenu dans un ensemble algébrique distinct de l'espace entier, et qui est par conséquent C^∞ dans un ouvert partout dense de R^n. Il suffit donc de montrer qu'il existe une solution distribution u de l'équation homogène $P(D)\,u = 0$ telle que $\operatorname{supp\,sing} u = R^n$ et de prendre ensuite $E = E_0 - u$. Le théorème 6 découlera donc du résultat suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit un polynôme différentiel $P(D)$ sur R^n. Supposons que la partie principale $P_m(D)$ soit à coefficients réels et qu'il existe un vecteur $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$, qui vérifie*

$$P_m(\xi) = 0, \qquad \operatorname{grad} P_m(\xi) \neq 0.$$

Alors il existe une distribution u sur R^n telle que

$$P(D)\,u = 0 \quad \textit{dans } R^n \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{supp\,sing} u = R^n.$$

Démonstration du théorème. — Les hypothèses nous permettent de faire un changement linéaire de variables dans R^n qui mette $P(D)$ sous la forme

$$P(D) = D_1^{m-1} D_2 + \sum_{k=0}^{m-2} Q_{m-k}(D')\, D_1^k,$$

où $D' = (D_2, \ldots, D^n)$ et $Q_{m-k}(D')$ est un polynôme différentiel d'ordre $\leq m - k$. Soit w la solution du problème de Goursat

$$P(D) w = 0 \quad \text{dans } R^n,$$
$$D_1^\nu w = 0 \quad (0 \leq \nu < m - 2) \qquad \text{et} \qquad D_1^{m-2} w = 1 \quad \text{si } x_1 = 0,$$
$$w = 0 \quad \text{si } x_2 = 0.$$

La fonction w est analytique dans R^n entier. D'après les conditions aux limites du problème de Goursat, on voit que

$$P^{(1, 0, \ldots, 0)}(D) w = 0 \quad \text{si } x_1 = 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction $Y(x_1) w(x)$ satisfait aussi à l'équation homogène dans R^n, $P(D)(Yw) = 0$ (nous notons Y la fonction d'Heaviside, égale à 0 pour $x < 0$, et à 1 pour $x \leq 0$). Soit alors une distribution quelconque, $S(x_1)$, sur la droite; nous l'identifions à la distribution $S(x_1) \otimes 1(x')$ sur R^n, en notant $1(x')$ la fonction identiquement égale à 1 sur $R^{n-1} (x' = (x_2, \ldots, x_n))$, et nous considérons la convolution par rapport à x_1 seulement,

$$u_+(x) = [Y(x_1)\, w(x)] \underset{x_1}{\star} S(x_1),$$

qui a un sens lorsque le support de $S(x_1)$ est contenu dans la demi-droite $[0, +\infty[$, ce que nous supposerons. Bien entendu, $P(D)\,u_+ = 0$

dans R^n. D'autre part,

$$\begin{aligned} D_1^{m-1} u_+(x) &= [D_1^{m-1}(Y(x_1)w(x))] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1) \\ &= [Y(x_1) D_1^{m-1} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1) + [\delta(x_1) D_1^{m-2} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1). \end{aligned}$$

Mais

$$\delta(x_1) D_1^{m-2} w(x) = \delta(x_1) D_1^{m-2} w(0, x') = \delta(x_1)$$

et donc

$$D_1^{m-1} u_+(x) = [Y(x_1) D_1^{m-1} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1) + S(x_1).$$

Nous allons démontrer qu'on peut choisir la distribution S sur la droite de manière que le support singulier de $D_1^{m-1} u_+$ soit exactement égal au demi-espace $x_1 \geqq 0$. En recommençant le même raisonnement pour la distribution

$$u_-(x) = [Y(-x_1) w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(-x_1),$$

dont le support singulier sera exactement égal au demi-espace $x_1 \leqq 0$, on obtiendra une distribution sur R^n, $u = u_+ + u_-$, qui satisfait à toutes les conditions de l'énoncé.

Quant à notre assertion sur la possibilité de choisir S, elle est facile à démontrer : prenons pour $S(x_1)$ une fonction continue dans $\mathbf{R}^1$ qui ne possède de dérivée continue sur aucun intervalle non vide de la demi-droite $[0, +\infty[$. Puisque $S(x_1)$ est continue,

$$[Y(x_1) D_1^{m-1} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1)$$

est une fois continûment dérivable; en effet,

$$\begin{aligned} D_1 \{ [Y(x_1) D_1^{m-1} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1) \} \\ = [Y(x_1) D_1^{m} w(x)] \underset{x_1}{\bigstar} S(x_1) + S(x_1) D_1^{m-1} w(0, x'). \end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre est évidemment continu; mais le premier terme aussi puisque c'est la convolution d'une fonction localement L^∞ avec une fonction continue. Alors, si $D_1^{m-1} u_+$ était une fois continûment dérivable dans un ouvert du demi-espace $x_1 > 0$, $S(x_1)$ devrait l'être dans un intervalle non vide de la demi-droite $x_1 > 0$, contrairement à notre choix.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGRANOVIČ (M. S.). — Partial differential equations with constant coefficients [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk.*, t. 16, 1961, n° 2, p. 27-93.

[2] BRUHAT (François). — *Géométrie algébrique élémentaire*, Cours de Mathématiques approfondies, 1964. — Paris, École Normale Supérieure, 1965 (multigraphié).

[3] GÅRDING (Lars). — Transformation de Fourier des distributions homogènes, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 381-428.

[4] HÖRMANDER (L.). — *Linear partial differential operators.* — Berlin, Springer-Verlag, 1963 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 116).

[5] KOTAKE (T.). — Analycité du noyau élémentaire de l'opérateur parabolique, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherches scientifique : Les équations aux dérivées partielles* [117, 1962, Paris], p. 53-60. — Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1963.

[6] LERAY (Jean). — Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire (Problème de Cauchy, IV), *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 39-156.

[7] MIZOHATA (S.). — Analycité des solutions élémentaires du système hyperbolique à coefficients constants, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto*, Series A : *Mathematics*, t. 32, 1960, p. 213-234.

[8] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, 3e édition. — Paris, Hermann, 1966.

[9] TREVES (François). — *Linear partial differential equations with constant coefficients.* — New York, Gordon and Breach, 1967.

[10] ZERNER (Martin). — Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, *C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2980-2982.

[11] ZERNER (Martin). — Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles, *Bull. Soc. math. France*, t. 91, 1963, p. 203-226.

(Manuscrit reçu le 20 mars 1967.)

François TRÈVES,
Dept. of Mathematics,
Purdue University,
Lafayette, Ind. (États-Unis);

Martin ZERNER,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose, 06-Nice.