

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

Sur certaines équations paraboliques non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 155-175

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__155_0

© Bulletin de la S. M. F., 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR CERTAINES ÉQUATIONS PARABOLIQUES
NON LINÉAIRES ;**

PAR

JACQUES-LOUIS LIONS.

Introduction.

Si A est un opérateur non *linéaire* de nature « elliptique » (dans un sens précisé dans le texte), on considère l'équation (de nature parabolique)

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f \quad [f \text{ donné, } t \in (0, T)]$$

et $u \in \text{domaine de } A$ (ce qui signifie, pratiquement, que u satisfait à certaines conditions aux limites *en les variables d'espaces*), avec les deux types suivants de conditions :

$$(2) \quad u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ donné (recherche de solution avec donnée initiale)} \quad (1)$$

ou

$$(3) \quad u(0) = u(T) \quad (\text{recherche de solution périodique}).$$

Le problème (1)-(2) a été récemment étudié :

- par des méthodes de compacité, dans [14];
- par des méthodes de monotonie selon [11], dans [3];

et ceci pour des classes assez générales d'opérateurs A .

Dans [14] et [3] les opérateurs A correspondent essentiellement aux opérateurs « *purement elliptiques* » étudiés par les mêmes auteurs, et par des méthodes de principe analogue, dans [13] et [2].

(1) $u(0)$ dénote la fonction $x \rightarrow u(x, 0)$, $x = \text{variables d'espace}$.

Or, dans l'article précédent de LERAY et l'auteur [6], nous avons étendu les hypothèses (aussi bien abstraites que concrètes) de VIŠK et BROWDER aux opérateurs « purement elliptiques »

Il est alors naturel d'essayer d'étudier le problème (1)-(2) — ou (1)-(3) — lorsque A vérifie des hypothèses analogues à celles considérées dans [6].

C'est l'objet de ce travail.

La méthode utilisée repose sur la « régularisation elliptique », que nous avons introduite dans [7] et utilisée dans [8] et [9] pour les problèmes analogues relatifs aux équations de Navier-Stokes (qui n'entrent pas dans la situation de ce travail — ce qui montre bien, comme nous le soulignerons encore plus loin — que la théorie présentée ici n'est pas encore placée dans un cadre assez général !); cette idée de régularisation elliptique a été utilisée dans [4] (pour démontrer des résultats de régularité) et indépendamment dans [12] (pour un même but, avec d'autres équations); la méthode consiste à

1° « Approcher » (1) par une famille d'opérateurs « elliptiques »

$$(1) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} = f \quad (\varepsilon > 0),$$

et résoudre le problème correspondant (avec des conditions aux limites convenables); cette résolution repose ici sur [6];

2° Passer à la limite en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui repose sur l'idée de MINTY [11], relative à la monotonie et sur des estimations *a priori*.

Le résultat relatif à (1)-(2) (théorème 2.1) généralise les résultats voisins de [3] et [14] (et la méthode est différente); le résultat relatif à (1)-(3) semble nouveau, même sous les hypothèses plus restrictives de [3] ou de [14].

Malgré leur relative généralité, il serait désirable d'étendre les résultats donnés ici, pour les raisons suivantes :

(i) Les résultats relatifs aux équations de Navier-Stokes n'entrent pas dans le cadre présenté ici (le problème (1)-(3) pour NAVIER-STOKES est étudié, par le même genre de méthode dans [9], mais avec des détails techniques tout à fait différents, et qui seront donnés dans [10]);

(ii) Les résultats de KATO [5] n'entrent pas non plus dans le cadre présent;

(iii) Il serait intéressant d'étendre les hypothèses faites dans l'application (III) (§ 2).

Le plan est le suivant :

1. Théorie générale.

1. Hypothèses.
2. Théorème d'existence.
3. Équations régularisées elliptiques.

4. Estimations *a priori*.
5. Passage à la limite. Démonstration du théorème d'existence.
6. Solutions périodiques.

2. Applications.

1. Application (I).
 2. Application (II).
 3. Application (III).
- Bibliographie.

1. Théorie générale.

1. Hypothèses.

1.1. — Soit H un espace de Hilbert sur \mathbf{C} (dans le cas réel, tout ce qui suit est valable en supprimant les « Re »); on désigne par $(,)$ (resp. $\| \cdot \|$) le produit scalaire (resp. la norme) dans H .

Soit B un espace de Banach réflexif tel que $B \subset H$, B dense dans H ; si B' est l'anti-dual de B (et H étant identifié à son anti-dual), alors $B \subset H \subset B'$.

Soit F un espace de Banach séparable et réflexif, (norme $\| \cdot \|$), tel que, F' désignant son anti-dual (norme $\| \cdot \|_*$), on ait

$$(1.1) \quad \begin{cases} L_\infty(0, T; B) \subset F \subset L_1(0, T; H), & \text{injections continues,} \\ L_\infty(0, T; H) \subset F' \subset L_1(0, T; B'); \end{cases}$$

on identifie $L_2(0, T; H)$ à son anti-dual. Si $g \in F'$, $f \in F$, on désigne par $\langle g, f \rangle$ leur produit scalaire (*anti-linéaire en f*). Si $g \in L_1(0, T; B')$ [resp. $L_\infty(0, T; H)$] et si $f \in L_\infty(0, T; B)$ [resp. $L_1(0, T; H)$], alors

$$\langle g, f \rangle = \int_0^T (g(t), f(t)) dt.$$

Si $K \in L_1(-T, 0)$, et $g \in F'$, alors $K \star g(t) = \int_t^0 K(t-\sigma) g(\sigma) d\sigma$ est défini et $\in L_1(0, T; B')$; on suppose

$$(1.2) \quad K \star g \in F' \quad \text{et} \quad \| K \star g \|_* \leq \| K \|_{L_1(-T, 0)} \| g \|_*.$$

Si $f \in F$, alors $\frac{df}{dt} = f'$ est définie dans l'espace $\mathcal{O}'(0, T; B')$ des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans B' ; donc on peut définir

$$W = \left\{ f \mid f \in F, \frac{df}{dt} \in F' \right\},$$

$$\mathcal{W} = \left\{ f \mid f \in F \cap L_2(0, T, H), \frac{df}{dt} \in F' + L_2(0, T; H) \right\}.$$

On suppose

$$(1.3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varphi, \psi \in W \text{ (resp. } \mathfrak{D}) \text{ alors } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont (p. p. égales à) des} \\ \text{fonctions continues de } (0, T) \rightarrow H \text{ et} \\ \langle \varphi', \psi \rangle - \langle \varphi, \psi' \rangle = (\varphi(T), \psi(T)) - (\varphi(0), \psi(0)) \\ \left(\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \psi' = \frac{d\psi}{dt} \right). \end{array} \right.$$

En outre, W est dense dans F .

On suppose enfin

$$(1.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{L'ensemble parcouru dans } H \text{ par } \varphi(0) \text{ [resp. par } \varphi(T)] \text{ lorsque} \\ \varphi \in F, \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; H), \text{ est dense dans } H. \end{array} \right.$$

Exemples.

1° Soit V un espace de Banach réflexif séparable (norme $\| \cdot \|$) tel que

$$V \subset H, \quad V \text{ dense dans } H, \text{ injection continue.}$$

Alors

$$F = L_q(0, T; V) \quad (1 < q < \infty),$$

donne lieu aux conditions (1.1), ..., (1.4).

2° Soient V_1 et V_2 deux espaces de Banach, ayant des propriétés analogues à celles de V , cas 1°; alors

$$F = L_{q_1}(0, T; V_1) \cap L_{q_2}(0, T; V_2) \quad (1 < q_i < \infty),$$

muni de la norme

$$\| \| f \| \| = \left(\int_0^T \| f(t) \|_{q_1}^{q_1} dt \right)^{\frac{1}{q_1}} + \left(\int_0^T \| f(t) \|_{q_2}^{q_2} dt \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

(où $\| \cdot \|_i$ = norme dans V_i) satisfait aux conditions (1.1), ..., (1.4).

1.2. OPÉRATEUR A . — On donne un opérateur $v \rightarrow A(v)$ de $F \rightarrow F'$ continu des sous-espaces de dimension finie dans F' faible et vérifiant

HYPOTHÈSE (I) (coercivité) :

$$\frac{\operatorname{Re} \langle A(v), v \rangle}{\| \| v \| \|} \rightarrow \infty \quad \text{si } \| \| v \| \| \rightarrow \infty.$$

HYPOTHÈSE (II) :

Il existe un opérateur : $u, v \rightarrow A(u, v)$ de $F \times F \rightarrow F'$, tel que

$$A(u, u) = A(u),$$

$$A(u, v) \in \text{borné de } F' \quad \text{si } \| \| u \| \| + \| \| v \| \| \text{ est borné,}$$

et tel que les conditions suivantes aient lieu :

- (i) $\left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow A(u, v) \text{ est continue des droites de } F \rightarrow F' \text{ faible et} \\ \operatorname{Re} \langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in F; \end{array} \right.$
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_\mu \rightarrow u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } F' \text{ faible et si} \\ \operatorname{Re} \langle A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u \rangle \rightarrow 0, \text{ alors, } \forall \varphi \in F, \text{ on a} \\ A(u_\mu, \varphi) \rightarrow A(u, \varphi) \text{ dans } F' \text{ faible;} \end{array} \right.$
- (iii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_\mu \rightarrow u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } F' \text{ faible et si } A(u_\mu, \varphi) \rightarrow \psi \\ \text{dans } F' \text{ faible } (\varphi \text{ fixé dans } F), \text{ alors} \\ \langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \rightarrow \langle \psi, u \rangle. \end{array} \right.$

2. Théorème d'existence.

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et les hypothèses (I), (II) ont lieu. Soient f donné dans F' et u_0 donné dans H . Il existe $u \in F$ tel que $u' \in F'$ et*

$$(2.1) \quad u' + A(u) = f,$$

$$(2.2) \quad u(0) = u_0.$$

Notons que grâce à (1.3) ($u \in W$), (2.2) a un sens.

La démonstration de ce théorème est donnée dans les nos 3, 4, 5.

3. Équations régularisées elliptiques.

Notations. — $\hat{V} = \{ v \mid v \in F, v' \in L_2(0, T; H) \}$; \hat{V} , muni de la norme

$$\| \| v \| \| + \left(\int_0^T |v'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ est réflexif;}$$

$$(3.1) \quad \hat{a}_\varepsilon(u, v) = \varepsilon \langle u', v' \rangle - \langle u, v' \rangle + (u(T), v(T)) + \langle A(u), v \rangle, u, v \in \hat{V}, \varepsilon > 0.$$

Notons que

$$\langle u', v' \rangle = \int_0^T (u'(t), v'(t)) dt;$$

si $u \in \hat{V}$, alors u est continue dans $(0, T) \rightarrow H$, donc $\langle u, v' \rangle$ a un sens

et vaut $\int_0^T (u(t), v'(t)) dt$. De même, $(u(T), v(T))$ a un sens. Enfin,

pour f, u_0 donnés comme au n° 2, $\langle f, v \rangle + (u_0, v(0))$ définit une forme anti-linéaire continue sur \hat{V} .

Ceci posé :

PROPOSITION 3.1. — Pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, il existe $u_\varepsilon \in F$ tel que

$$(3.2) \quad \hat{\alpha}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle + (u_0, v(0)), \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Démonstration. — On supprime les indices « ε » au cours de cette démonstration.

Soit \hat{V}' l'anti-dual de \hat{V} et $[,]$ le produit scalaire dans l'anti-dualité.

Comme $v \rightarrow \hat{\alpha}(u, v)$ est continue sur \hat{V} , on a

$$\hat{\alpha}(u, v) = [\hat{A}(u), v], \quad \hat{A}(u) \in \hat{V}'.$$

On va montrer la proposition par utilisation de [6].

1° COERCIVITÉ. — On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\hat{A}(v), v] &= \operatorname{Re} \hat{\alpha}(v, v) \\ &= \varepsilon \int_0^T |v'(t)|^2 dt + \frac{1}{2} |v(T)|^2 + \frac{1}{2} |v(0)|^2 + \operatorname{Re} \langle A(v), v \rangle, \end{aligned}$$

d'où résulte que

$$\frac{\operatorname{Re}[\hat{A}(v), v]}{\|v\|_{\hat{V}}} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \|v\|_{\hat{V}} \rightarrow \infty.$$

2° OPÉRATEUR $\hat{A}(u, v)$. — On pose, pour $u, v, w \in \hat{V}$:

$$\hat{\alpha}(u, v, w) = \varepsilon \langle v', w' \rangle - \langle v, w' \rangle + (v(T), w(T)) + \langle A(u, v), w \rangle.$$

La forme $w \rightarrow \hat{\alpha}(u, v, w)$ est continue sur \hat{V} , donc

$$\hat{\alpha}(u, v, w) = [\hat{A}(u, v), w], \quad \hat{A}(u, v) \in \hat{V}'.$$

Si $v \rightarrow 0$ sur une droite de \hat{V} , alors $v \rightarrow 0$ sur une droite de F , donc $A(u, v) \rightarrow 0$ dans F' faible et donc $[\hat{A}(u, v), w] \rightarrow 0$. Vérifions la *monotonie* en v :

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \operatorname{Re}[\hat{A}(u, u) - \hat{A}(u, v), u - v] \\ &= \varepsilon \int_0^T |u' - v'|^2 dt + \frac{1}{2} |u(T) - v(T)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |u(0) - v(0)|^2 + \operatorname{Re} \langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle, \end{aligned}$$

ce qui est > 0 .

Soit maintenant $u_\mu \rightarrow u$ dans \hat{V} faible et

$$[\hat{A}(u_\mu, u_\mu) - \hat{A}(u_\mu, u), u_\mu - u] \rightarrow$$

Alors, d'après (3.3), $u_\mu \rightarrow u'$ dans $L_2(0, T; H)$ fort et

$$\operatorname{Re} \langle A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u \rangle \rightarrow 0.$$

Mais, d'après l'hypothèse (II), (ii), il en résulte que $A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v)$ dans F' faible, pour v fixé dans \hat{V} , et donc, pour $w \in \hat{V}$, on a

$$[\hat{A}(u_\mu, v), w] \rightarrow [\hat{A}(u, v), w];$$

cela montre que la condition (ii), Hypothèse (II) de [6] est vérifiée.

Soit enfin u_μ une suite telle que $u_\mu \rightarrow u$ dans \hat{V} faible et $\hat{A}(u_\mu, v) \rightarrow v_*$ dans V' faible. On veut montrer que

$$[\hat{A}(u_\mu, v), u_\mu] \rightarrow [v_*, u].$$

Par hypothèse,

$$[\hat{A}(u_\mu, v), w] = \varepsilon \langle v', w' \rangle - \langle v, w' \rangle + (v(T), w(T)) + \langle A(u_\mu, v), w \rangle \rightarrow [v_*, w], \quad \forall w \in \hat{V},$$

donc

$$\langle A(u_\mu, v), w \rangle \rightarrow [v_*, w] - \varepsilon \langle v', w' \rangle + \langle v, w' \rangle - (v(T), w(T)), \quad \forall w \in \hat{V}$$

Donc, en particulier, $A(u_\mu, v) \rightarrow \xi$ au sens de $\mathcal{D}'(0, T; B')$ = distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans B' . Mais comme u_μ demeure dans un borné de \hat{V} donc de F , de toute suite v extraite de μ on peut extraire une suite ρ telle que $A(u_\rho, v) \rightarrow \eta$ dans F' faible; nécessairement $\eta = \xi$, donc indépendant de la suite extraite. Donc

$$(3.4) \quad \begin{cases} A(u_\mu, v) \rightarrow \xi \text{ dans } F' \text{ faible et, pour } w \in \hat{V}, \\ \langle \xi, w \rangle = [v_*, w] - \varepsilon \langle v', w' \rangle + \langle v, w' \rangle - (v(T), w(T)). \end{cases}$$

Mais alors, d'après l'hypothèse (II), (iii),

$$\langle A(u_\mu, v), u_\mu \rangle \rightarrow \langle \xi, u \rangle$$

et donc

$$[\hat{A}(u_\mu, v), u_\mu] \rightarrow \varepsilon \langle v', u' \rangle - \langle v, u' \rangle + (v(T), u(T)) + \langle \xi, u \rangle = [v_*, u].$$

C. Q. F. D.

La proposition 3.1 en résulte.

4. Estimations « a priori ».

PROPOSITION 4.1. — Si u_ε est solution de (3.2), alors, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

- (4.1) u_ε demeure dans un borné de F ,
- (4.2) $u'_\varepsilon \in F'$ et u'_ε demeure dans un borné de F' ,
- (4.3) $\sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon$ demeure dans un borné de $L_2(0, T; H)$,
- (4.4) $u_\varepsilon(0)$ demeure dans un borné de H .

Démonstration.

1° De (3.2) résulte :

$$(4.5) \quad \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 dt + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0)|^2 + \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \\ = \operatorname{Re} \langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0)) \\ \leq \|f\|_* \|u_\varepsilon\| + \frac{1}{4} |u_\varepsilon(0)|^2 + |u_0|^2,$$

d'où

$$(4.6) \quad \frac{\operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle}{\|u_\varepsilon\|} \leq \|f\|_* + \frac{1}{2} \frac{|u_0|^2}{\|u_\varepsilon\|}.$$

Donc $\|u_\varepsilon\|$ est borné, sinon le premier membre de (4.6) tendrait vers $+\infty$, alors que le second tendrait vers $\|f\|_*$. Ceci montre (4.1) et (4.3)-(4.4) résultent alors de (4.5).

2° Prenons dans (3.2) $v \in \mathcal{D}(0, T; B)$ (fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans B et à support compact dans $]0, T[$). Alors on voit que u_ε satisfait, au sens de $\mathcal{D}'(0, T; B')$, à l'équation

$$(4.7) \quad -\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon + A(u_\varepsilon) = f.$$

De là résulte que $u''_\varepsilon \in F' + L_2(0, T; H)$. Mais alors, pour

$$v \in \hat{V} \subset F \cap L_2(0, T; H),$$

on peut écrire, d'après (1.3),

$$\langle u''_\varepsilon, v \rangle = -\langle u'_\varepsilon, v' \rangle + (u'_\varepsilon(T), v(T)) - (u'_\varepsilon(0), v(0)).$$

On déduit donc de (4.7) (en prenant le produit scalaire par v) :

$$\varepsilon \langle u'_\varepsilon, v' \rangle - \varepsilon (u'_\varepsilon(T), v(T)) + \varepsilon (u'_\varepsilon(0), v(0)) + (u_\varepsilon(T), v(T)) \\ - (u_\varepsilon(0), v(0)) - \langle u_\varepsilon, v' \rangle + \langle A(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle,$$

d'où

$$\hat{\varepsilon}(u_\varepsilon, v) - \varepsilon (u'_\varepsilon(T), v(T)) + \varepsilon (u'_\varepsilon(0), v(0)) - (u_\varepsilon(0), v(0)) = \langle f, v \rangle$$

et

$$\langle f, v \rangle = \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - (u_0, v(0)).$$

Donc

$$-\varepsilon (u'_\varepsilon(T), v(T)) + \varepsilon u'_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0) + u_0, v(0) = 0, \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Prenant v avec $v(0) = 0$ ou $v(T) = 0$, on en déduit

$$(u'_\varepsilon(T), v(T)) = 0, \quad \forall v \in \hat{V}, \\ (\varepsilon u'_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0) + u_0, v(0)) = 0, \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Grâce à (1.4), on en déduit

$$(4.8) \quad u'_\varepsilon(T) = 0,$$

$$(4.9) \quad -\varepsilon u'_\varepsilon(0) + u_\varepsilon(0) = u_0.$$

3° De (4.7), (4.8), on déduit que

$$(4.10) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon = K_\varepsilon \star (f - A(u_\varepsilon)), \\ K_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \text{ dans } (-T, 0). \end{cases}$$

Mais $\|K_\varepsilon\|_{L_1(-T, 0)} \leq 1$, donc grâce à (1.2),

$$\| \|u'_\varepsilon\| \| \leq \| \|f - A(u_\varepsilon)\| \| \leq \text{Cte},$$

ce qui montre (4.2).

5. Passage à la limite. Démonstration du théorème d'existence.

5.1. — D'après (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), on peut extraire de u_ε une suite — que nous désignons encore par u_ε — telle que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(5.1) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } F \text{ faible},$$

$$(5.2) \quad u'_\varepsilon \rightarrow u' \quad \text{dans } F' \text{ faible},$$

$$(5.3) \quad A(u_\varepsilon) \rightarrow \chi \quad \text{dans } F \text{ faible},$$

$$(5.4) \quad u_\varepsilon(0) \rightarrow \zeta \quad \text{dans } H \text{ faible}.$$

De (5.1), (5.2) et du fait [cf. (1.3)] que w est contenu dans $C(0, T; H)$ = espace des fonctions continues de $(0, T) \rightarrow H$, il résulte que $\zeta = u(0)$.

Désormais, u est bien défini; comme $A(u_\varepsilon, u)$ est borné dans F' , on peut supposer, par une nouvelle extraction de suite, que

$$(5.5) \quad A(u_\varepsilon, u) \rightarrow \psi \quad \text{dans } F' \text{ faible}.$$

Au sens de $\mathcal{O}'(0, T; B')$, $\varepsilon u'_\varepsilon \rightarrow 0$, donc (4.7) donne

$$(5.6) \quad u' + \chi = f.$$

Pour v fixé dans \hat{V} , on a

$$\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) \rightarrow -\langle u, v' \rangle + (u(T), v(T)) + \langle \chi, v \rangle = \langle f, v \rangle + (u_0, v(0));$$

or, d'après (1.3),

$$-\langle u, v' \rangle = \langle u', v \rangle - (u(T), v(T)) + (u(0), v(0)),$$

d'où l'on déduit que

$$(5.7) \quad u(0) = u_0.$$

Il reste donc à montrer que $\chi = A(u)$.

5.2. — Posons

$$X_\varepsilon = \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2 dt - \langle u_\varepsilon - u, u'_\varepsilon - u' \rangle + |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2 \\ + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle.$$

On a

$$X_\varepsilon = X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2 + X_\varepsilon^3 - X_\varepsilon^4 + X_\varepsilon^5, \\ X_\varepsilon^1 = \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 dt - \langle u_\varepsilon, u'_\varepsilon \rangle + |u_\varepsilon(T)|^2 + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle, \\ X_\varepsilon^2 = -\langle u_\varepsilon, u' \rangle + (u_\varepsilon(T), u(T)) + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle, \\ X_\varepsilon^3 = \langle u, u'_\varepsilon - u' \rangle - (u(T), u_\varepsilon(T) - u(T)), \\ X_\varepsilon^4 = \langle A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon \rangle, \\ X_\varepsilon^5 = \langle A(u_\varepsilon, u), u \rangle.$$

Mais

$$X_\varepsilon^1 = \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0)) \rightarrow \langle f, u \rangle + |u_0|^2. \\ X_\varepsilon^2 \rightarrow -\langle u, u' \rangle + |u(T)|^2 + \langle \chi, u \rangle = \langle u' + \chi, u \rangle + |u_0|^2$$

[car $u_\varepsilon(T) \rightarrow u(T)$ dans H faible]; comme $u' + \chi = f$, on a donc

$$X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2 \rightarrow 0.$$

Puis $X_\varepsilon^3 \rightarrow 0$. Ensuite $X_\varepsilon^4 \rightarrow \langle \psi, u \rangle$ d'après l'hypothèse (II), (iii), et enfin $X_\varepsilon^5 \rightarrow \langle \psi, u \rangle$. Donc $X_\varepsilon \rightarrow 0$. Donc $\operatorname{Re} X_\varepsilon \rightarrow 0$; or

$$\operatorname{Re} X_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2 dt + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0)|^2 + \\ + \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle.$$

Donc

$$(5.8) \quad \sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_2(0, T; H) \text{ fort,}$$

$$(5.9) \quad u_\varepsilon(T) \rightarrow u(T), \quad u_\varepsilon(0) \rightarrow u(0) \quad \text{dans } H \text{ fort,}$$

$$(5.10) \quad \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle \rightarrow 0.$$

5.3. — Soit φ fixée avec $\varphi \in F$, $\varphi' \in F'$. Posons

$$Y_{\varepsilon, \varphi} = -\langle u_\varepsilon - \varphi, u'_\varepsilon - \varphi' \rangle + |u_\varepsilon(T) - \varphi(T)|^2 \\ + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle.$$

On a

$$Y_{\varepsilon, \varphi} = Y_\varepsilon^1 - Y_{\varepsilon, \varphi}^2 + Y_{\varepsilon, \varphi}^3 - Y_{\varepsilon, \varphi}^4 + Y_{\varepsilon, \varphi}^5, \\ Y_\varepsilon^1 = -\langle u_\varepsilon, u'_\varepsilon \rangle + |u_\varepsilon(T)|^2 + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle, \\ Y_{\varepsilon, \varphi}^2 = -\langle u_\varepsilon, \varphi' \rangle + (u_\varepsilon(T), \varphi(T)) + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), \varphi \rangle, \\ Y_{\varepsilon, \varphi}^3 = \langle \varphi, u'_\varepsilon - \varphi' \rangle - (\varphi(T), u_\varepsilon(T) - \varphi(T)), \\ Y_{\varepsilon, \varphi}^4 = \langle A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon \rangle, \\ Y_{\varepsilon, \varphi}^5 = \langle A(u_\varepsilon, \varphi), \varphi \rangle.$$

Mais

$$Y_\varepsilon^1 = \hat{a}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 dt = \langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0)) - \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 dt$$

et utilisant (5.8),

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon^1 &\rightarrow \langle f, u \rangle + |u_0|^2 = \langle u', u \rangle + |u_0|^2 + \langle \chi, u \rangle \\ &= -\langle u, u' \rangle + |u(T)|^2 + \langle \chi, u \rangle. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon, \varphi}^2 &\rightarrow -\langle u, \varphi' \rangle + (u(T), \varphi(T)) + \langle \chi, \varphi \rangle, \\ Y_{\varepsilon, \varphi}^3 &\rightarrow \langle \varphi, u' - \varphi' \rangle - (\varphi(T), u(T) - \varphi(T)); \end{aligned}$$

ensuite

$$(5.11) \quad Y_{\varepsilon, \varphi}^4 \rightarrow \langle A(u, \varphi), u \rangle;$$

en effet, d'après (5.10) et l'hypothèse (II), (ii), $A(u_\varepsilon, \varphi) \rightarrow A(u, \varphi)$ dans F' faible, et alors, d'après l'hypothèse (II), (iii), on a (5.11).

Enfin $Y_{\varepsilon, \varphi}^5 \rightarrow \langle A(u, \varphi), \varphi \rangle$. Donc

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon, \varphi} &\rightarrow -\langle u - \varphi, u' - \varphi' \rangle + |u(T) - \varphi(T)|^2 + \\ &\quad + \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle = Y_\varepsilon. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y_{\varepsilon, \varphi} &= \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T) - \varphi(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0) - \varphi(0)|^2 \\ &\quad + \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle \end{aligned}$$

et grâce à la monotonie [hypothèse (II), (i)] :

$$\operatorname{Re} Y_{\varepsilon, \varphi} \geq 0.$$

Donc

$$\operatorname{Re} Y_\varphi \geq 0.$$

Donc

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} Y_\varphi &= \frac{1}{2} |u(T) - \varphi(T)|^2 + \frac{1}{2} |u(0) - \varphi(0)|^2 \\ &\quad + \operatorname{Re} \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci a lieu pour tout $\varphi \in F$, avec $\varphi' \in F'$.

On peut donc prendre

$$\varphi = u - \xi w, \quad w \in F, \quad w' \in F', \quad \xi > 0.$$

Il vient, après division par ξ ,

$$\frac{\xi}{2} (|w(T)|^2 + |w(0)|^2) + \operatorname{Re} \langle \chi - A(u, u - \xi w), w \rangle \geq 0.$$

Faisant tendre ξ vers zéro, on a en utilisant l'hypothèse (II), (i),
 (5.13) $\operatorname{Re}\langle \chi - A(u, u), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in F \text{ tel que } w' \in F'.$

Mais on a supposé [cf. (1.3)] que W est dense dans F . Donc (5.13) a lieu, $\forall w \in F$, donc

$$\chi = A(u, u) = A(u),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

6. Solutions périodiques.

On se donne les espaces H, F comme précédemment, les hypothèses (1.2), (1.4) étant remplacées par les hypothèses (6.1), (6.2) ci-dessous.

Si $g \in F'$, on définit $K_i^\varepsilon g$ ($i = 1, 2$) par

$$K_1^\varepsilon g(t) = \int_0^t \exp\left(\frac{t-s-T}{\varepsilon}\right) g(s) ds \quad (\varepsilon > 0),$$

$$K_2^\varepsilon g(t) = \int_t^T \exp\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) g(s) ds;$$

on suppose alors que

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_i^\varepsilon g \in F' \quad \text{et} \quad ||| K_i^\varepsilon g |||_* \leq c ||| g |||_* \quad (\varepsilon \rightarrow 0, i = 1, 2), \\ c = \text{Cte.} \end{array} \right.$$

L'hypothèse (1.3) est sans changement; (1.4) est remplacée par

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'ensemble parcouru ar } \varphi(0) \text{ lorsque } \varphi \in F, \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; H) \\ \text{avec } \varphi(0) = \varphi(T), \text{ est dense dans } H. \end{array} \right.$$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. — *On suppose que (1.1), (6.1), (1.3), (6.2) et les hypothèses (I), (II), n° 1, ont lieu. Soit f donné dans F' . Il existe $u \in F$ tel que $u' \in F'$ avec*

$$(6.3) \quad u' + A(u) = f,$$

$$(6.4) \quad u(0) = u(T).$$

La condition (6.4) est une condition de *périodicité*.

La démonstration de ce théorème repose sur les mêmes principes que celle du théorème 2.1. Donnons-en seulement les grandes lignes. On introduit

$$\tilde{V} = \{ v \mid v \in F, v' \in L_2(0, T; H), v(0) = v(T) \}$$

et pour $u, v \in \tilde{V}$, on pose ($\varepsilon > 0$)

$$(6.5) \quad \tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \varepsilon \langle u', v' \rangle + \langle u', v \rangle + \langle A(u), v \rangle.$$

On montre alors, comme à la proposition 3.1, qu'il existe $u_\varepsilon \in \tilde{V}$ tel que

$$\tilde{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

On vérifie ensuite, comme à la proposition 4.1, que

$$(6.6) \quad u_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } F,$$

$$(6.7) \quad \sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L_2(0, T; H).$$

Montrons (car ici la vérification est différente) que

$$(6.8) \quad u'_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } F'.$$

Tout d'abord, u_ε vérifie

$$(6.9) \quad -\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon + A(u_\varepsilon) = f$$

et, par des intégrations par parties, on vérifie que

$$(6.10) \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(T).$$

De (6.9), (6.10), on déduit que [avec les notations de (6.1)] :

$$(6.11) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon = \exp\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \left(\exp\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) - 1 \right)^{-1} (K_1^\varepsilon g_\varepsilon + K_2^\varepsilon g_\varepsilon), \\ g_\varepsilon = f - A(u_\varepsilon). \end{cases}$$

Alors (6.8) résulte de (6.1).

On peut alors, grâce à (6.6), (6.8), extraire une suite — encore désignée par u_ε — telle que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans F faible, $u'_\varepsilon \rightarrow u'$ dans F' faible, $A(u_\varepsilon) \rightarrow \chi$ dans F' faible, $A(u_\varepsilon, u) \rightarrow \psi$ dans F' faible et $u' + \chi = f$.

On a $u(0) = u(1)$, et il reste à vérifier que $\chi = A(u)$.

On introduit cette fois (comparer à 5.2)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2 dt + \langle u'_\varepsilon - u', u_\varepsilon - u \rangle + \\ + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle \end{aligned}$$

et l'on vérifie que $\tilde{X}_\varepsilon \rightarrow 0$. D'où

$$(6.12) \quad \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle \rightarrow 0.$$

Soit φ fixée avec $\varphi \in F$, $\varphi' \in F'$, $\varphi(0) = \varphi(T)$.

On introduit (comparer à 5.3)

$$\tilde{Y}_{\varepsilon, \varphi} = \langle u'_\varepsilon - \varphi', u_\varepsilon - \varphi \rangle + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle$$

et l'on vérifie [utilisant (6.12) et les hypothèses (II)] que

$$\tilde{Y}_{\varepsilon, \varphi} \rightarrow \langle u' - \varphi', u - \varphi \rangle + \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle.$$

Alors

$$\operatorname{Re} \tilde{Y}_{\varepsilon, \varphi} \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \tilde{Y}_{\varepsilon, \varphi} \rightarrow \operatorname{Re} \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle,$$

d'où

$$\operatorname{Re} \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle \geq 0$$

et l'on termine comme au n° 5.

REMARQUE 5.1. — Les hypothèses (6.1), (6.2), (6.3) sont vérifiées pour les exemples 1°₀, 2°₀, n° 1 (1.1).

2. Applications.

1. Application (I).

1.1. NOTATIONS.

Ω ouvert borné de \mathbf{R}^n ; $Q = \Omega \times]0, T[$;

$W_p^m(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$, norme habituelle, $1 < p < \infty$ (les fonctions considérées sont à valeurs réelles);

$\overset{0}{W}_p^m(\Omega) =$ adhérence de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $W_p^m(\Omega)$;

$\overset{0}{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$, V fermé dans $W_p^m(\Omega)$; norme $\| \cdot \|$;

$N =$ nombre de D_x^α , $|\alpha| \leq m - 1$;

$M =$ nombre de D_x^α , $|\alpha| = m$;

$A_\alpha(x, t, \eta, \xi) =$ fonction $\begin{cases} \text{mesurable en } (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \text{continue en } \eta, \xi \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M. \end{cases}$

Si $u = u(x, t)$, on pose

$$\begin{aligned} \delta u &= \{D_x^\alpha u, |\alpha| \leq m - 1\} \\ D^m u &= \{D_x^\alpha u, |\alpha| = m\}. \end{aligned}$$

Alors $A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u)$ a un sens (avec des hypothèses convenables sur u)

$$F = L_p(0, T; V), \quad \| \| f \| \| = \left(\int_0^T \| f(t) \|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

HYPOTHÈSE 1.1. — Pour $u, v \in F$, on a

$$(1.1) \quad A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(Q), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On peut naturellement donner des conditions algébriques sur la croissance de $A_\alpha(x, t, \eta, \xi)$ pour que (1.1) ait lieu.

Pour $u, v, w \in F$ on peut alors définir

$$(1.2) \quad \begin{cases} a(u, v, w) = a_1(u, v, w) + a_2(u, w), \\ a_1(u, v, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v) D^\alpha w \, dx \, dt, \\ a_2(u, w) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx \, dt. \end{cases}$$

La forme $w \rightarrow a(u, v, w)$ est continue sur F , donc

$$(1.3) \quad a(u, v, w) = \langle A(u, v), w \rangle, \quad A(u, v) \in F';$$

ici

$$(1.4) \quad F' = L_{p'}(0, T; V').$$

On pose

$$(1.5) \quad A(u) = A(u, u) \quad (u \in F).$$

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE 1.2. — On a (Monotonie en v)

$$(1.6) \quad a_1(u, u, u-v) - a_1(u, v, u-v) \geq 0, \quad \forall u, v \in F.$$

HYPOTHÈSE 1.3. — Soit $u_\mu \in F$, $u_\mu \rightarrow u$ dans F faible, $u'_\mu \rightarrow u'$ dans F' faible et

$$(1.7) \quad a_1(u_\mu, u_\mu, u_\mu - u) - a_1(u_\mu, u, u_\mu - u) \rightarrow 0.$$

Alors, $\forall \alpha$,

$$(1.8) \quad A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \rightarrow A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(Q) \text{ faible.}$$

On peut donner, exactement comme dans [3], des conditions algébriques suffisantes pour que (1.8) ait lieu (en employant [1] comme dans la vérification ci-dessus de (ii), (II), § 1).

On suppose enfin

$$\text{HYPOTHÈSE 1.4.} \quad \frac{a(v, v, v)}{\|v\|} \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \|v\| \rightarrow \infty.$$

On va vérifier qu'on est alors, pour l'opérateur A , dans les conditions d'application de la théorie générale du paragraphe 1.

L'hypothèse (I), § 1, est évidemment identique à 1.4.

L'opérateur $A(u, v)$ est déjà défini, et la monotonie (i), (II), § 1, est équivalente à 1.2; pour la continuité de (i), (II), § 1, utiliser le lemme 3.2 de [6].

Vérification de (ii), (II), § 1. — On a une suite satisfaisant aux conditions de l'hypothèse 1.3. Il faut montrer que, pour φ fixée dans F , $A(u_\mu, \varphi) \rightarrow A(u, \varphi)$ dans F' faible, donc que

$$a(u_\mu, \varphi, w) \rightarrow a(u, \varphi, w), \quad \forall w \in F.$$

On a déjà (1.8), donc $a_2(u_\mu, w) \rightarrow a_2(u, w)$.

Reste donc à voir que

$$a_1(u_\mu, \varphi, w) \rightarrow a_1(u, \varphi, w).$$

Or considérons $W_p^{m-1}(\Omega)$; l'injection $V \rightarrow W_p^{m-1}(\Omega)$ est compacte ⁽²⁾; donc, d'après [1], si $u_\mu \rightarrow u$ dans $L_p(o, T; V)$ faible, $u'_\mu \rightarrow u'$ dans $L_{p'}(o, T; V')$ faible, alors $u_\mu \rightarrow u$ dans $L_p(o, T; W_p^{m-1}(\Omega))$ fort et alors $A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m \varphi) \rightarrow A_\alpha(x, t, \delta u, D^m \varphi)$ dans $L_{p'}(Q)$ fort, d'où le résultat.

Vérification de (iii), (II), § 1. — On a une suite u_μ telle que

$$\begin{aligned} u_\mu \rightarrow u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } F' \text{ faible;} \\ A(u_\mu, \varphi) \rightarrow \psi \text{ dans } F' \text{ faible } (\varphi \text{ fixé dans } F) \end{aligned}$$

et l'on veut montrer que

$$X_\mu = \langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \rightarrow \langle \psi, u \rangle.$$

On écrit l'identité

$$\begin{aligned} X_\mu &= a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) + a_2(u_\mu, u) \\ &= a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) + (A_1(u_\mu, \varphi), u) - a_1(u_\mu, \varphi, u). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) - a_1(u_\mu, \varphi, u) \rightarrow 0.$$

Or $u_\mu \rightarrow u$ dans $L_p(o, T; W_p^{m-1}(\Omega))$ fort (comme déjà vu au point précédent), donc $A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m \varphi) \rightarrow A_\alpha(x, t, \delta u, D^m \varphi)$ dans $L_{p'}(Q)$ fort, et donc

$$a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) \rightarrow a_1(u, \varphi, u), \quad a_1(u_\mu, \varphi, u) \rightarrow a_1(u, \varphi, u).$$

⁽²⁾ On suppose la frontière de Ω assez régulière pour que cela ait lieu. Aucune condition si $V = \dot{W}_p^m(\Omega)$.

Reste à montrer que $a_2(u_\mu, u_\mu - u) \rightarrow 0$. Or

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leq c \|u_\mu - u\|_{L_p(0, T; W^{m-1}_p(\Omega))} \rightarrow 0,$$

d'où le résultat.

2. Application (II).

On considère maintenant

$$W^{m_i}_p(\Omega) \subset V_i \subset W^{m_i}_{p_i}(\Omega) \quad (i = 1, 2; 1 < p_i < \infty);$$

N_i = nombre de dérivées $D^\alpha_x, |\alpha| \leq m_i - 1$;

M_i = nombre de dérivées $D^\alpha_x, |\alpha| = m_i$;

$A^{(i)}_x(x, t, \eta, \xi)$ fonction $\begin{cases} \text{mesurable en } (x, t) \in Q; \\ \text{continue en } \eta, \xi \in \mathbf{R}^{N_i} \times \mathbf{R}^{M_i}; \end{cases}$

$$\delta^{(i)}(u) = \{D^\alpha_x u \mid |\alpha| \leq m_i - 1\};$$

$$F = L_{p_1}(0, T; V_1) \cap L_{p_2}(0, T; V_2);$$

$$\| \| f \| \| = \left(\int_0^T \| f(t) \|_1^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\int_0^T \| f(t) \|_2^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

où $\| \|_i$ = norme dans V_i .

On définit alors $a(u, v, w), u, v, w \in F$, par

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{aligned} a(u, v, w) &= a_1^{(1)}(u, v, w) + a_1^{(2)}(u, v, w) + a_2^{(1)}(u, w) + a_2^{(2)}(u, w), \\ a_1^{(i)}(u, v, w) &= \sum_{|\alpha| = m_i} \int_Q A^{(i)}_x(x, t, \delta^{(i)}u, D^{m_i}v) D^\alpha w \, dx \, dt, \\ a_2^{(i)}(u, w) &= \sum_{|\alpha| < m_i - 1} \int_Q A^{(i)}_x(x, t, \delta^{(i)}u, D^{m_i}u) D^\alpha w \, dx \, dt. \end{aligned} \right.$$

On suppose

$$(2.2) \quad A^{(i)}_x(x, t, \delta^{(i)}(u), D^{m_i}v) \in L_{p'_1}(Q) + L_{p'_2}(Q) \quad (u, v \in F; i = 1, 2),$$

$$(2.3) \quad a_1^{(i)}(u, u, u - v) - a_1^{(i)}(u, v, u - v) \geq 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Si } u_\mu \rightarrow u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } F' \text{ faible,} \\ &\text{et } a_1^{(i)}(u_\mu, u_\mu, u_\mu u - u) - a_1^{(i)}(u_\mu, u, u_\mu - u) \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2), \\ &\text{alors } A^{(i)}_x(x, t, \delta^{(i)}u_\mu, D^{m_i}u_\mu) \rightarrow A^{(i)}_x(x, t, \delta u, D^{m_i}u) \\ &\text{dans } L_{p'}(Q) \text{ faible.} \end{aligned} \right.$$

Ajoutant la condition de coercivité, on vérifie qu'on est encore dans les conditions d'application de la théorie générale.

3. Application (III).

3.1. — Notre objet est ici de voir si la théorie du paragraphe 1 s'applique au système ($u = \{u_1, \dots, u_n\}$) :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = f + \text{grad } p, \\ \text{div } u = 0, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega = \Gamma \quad (t > 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{donné,} \end{array} \right.$$

(qui est le système de Navier-Stokes, si $p = 2$).

Dans (3.1) on a posé

$$(3.2) \quad |\nabla u| = \left(\sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On va montrer que la théorie du paragraphe 1 s'applique lorsque $p \geq 3$.

Le cas $p = 2$ est par ailleurs résolu par des méthodes différentes ⁽³⁾.

Les cas $1 < p < 3$ ($p \neq 2$) semblent ouverts.

3.2. NOTATIONS.

Ω ouvert borné de \mathbf{R}^n ;

$H = \{f \mid f = \{f_1, \dots, f_n\}, f_i \in L_2(\Omega), \text{div } f = 0\}$;

$V = \{v \mid v = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in \overset{0}{W}_p^1(\Omega), \text{div } v = 0\}$;

$F = L_p(0, T; V)$.

Pour $u, v, w \in F$, on pose :

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,k=1}^n \int_Q |\nabla v|^{p-2} D_i v_k D_i w_k \, dx \, dt \quad \left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; Q = \Omega \times]0, T[\right),$$

$$\beta(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^n \int_Q u_k (D_k v_i) w_i \, dx \, dt;$$

$$a(u, v, w) = \alpha(v, w) + \beta(u, v, w).$$

Ces expressions ont un sens [pour $\beta(u, v, w)$, noter, par exemple, que $u_k, D_k v_i$ et w_i sont dans $L_3(Q)$ puisque $p \geq 3$], et $w \rightarrow \alpha(v, w)$, $w \rightarrow \beta(u, v, w)$ sont des formes linéaires continues sur F .

⁽³⁾ « Résolu » signifiant : l'existence globale est connue, l'unicité n'étant connue qu'en dimension d'espace 2.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha(v, w) &= \langle \mathfrak{A}(v), w \rangle, & \mathfrak{A}(v) \in F', \\ \beta(u, v, w) &= \langle \mathfrak{B}(u, v), w \rangle, & \mathfrak{B}(u, v) \in F', \\ \alpha(u, v, w) &= \langle A(u, v), w \rangle, & A(u, v) = \mathfrak{A}(v) + \mathfrak{B}(u, v). \end{aligned}$$

Comme on le vérifie sans peine, une formulation faible de (3.1) équivaut à la recherche de $u \in F$ solution de

$$(3.3) \quad u' + A(u) = f,$$

où

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A(u) &= A(u, u), & f \in L_{p'}(0, T; V') = F' \quad (4), \\ u(0) &= u_0, & u_0 \text{ donné dans } H. \end{aligned}$$

3.3. Vérification du fait que les hypothèses (I), (II) du paragraphe 1, n° 1, ont lieu.

D'abord, comme on le vérifie sans peine,

$$\beta(u, v, v) = 0, \quad \forall v \in F$$

de sorte que

$$\langle A(v), v \rangle = \alpha(v, v)$$

et la coercivité est immédiate.

Monotonie en v :

$$\begin{aligned} \langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle &= \langle \mathfrak{A}(u) - \mathfrak{A}(v), u - v \rangle \\ &\quad + \langle \mathfrak{B}(u, u) - \mathfrak{B}(u, v), u - v \rangle. \end{aligned}$$

Mais le dernier terme vaut $\beta(u, u - v, u - v) = 0$; reste donc à montrer que

$$\langle \mathfrak{A}(u) - \mathfrak{A}(v), u - v \rangle \geq 0,$$

ce qui résulte de

$$\sum_{i,k=1}^n (|\nabla u|^{p-2} D_i u_k - |\nabla v|^{p-2} D_i v_k) (D_i(u_k - v_k)) \geq 0,$$

ce qui résulte de la convexité de la fonction

$$\zeta \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

(4) En passant au dual V' de V , on passe au quotient par les « gradients », d'où la disparition du terme en « grad p ».

HYPOTHÈSE (II) (ii). — En fait, on a beaucoup plus, à savoir : si $u_\mu \rightarrow u$ dans F faible, alors, $\forall \varphi \in F$, on a

$$A(u_\mu, \varphi) \rightarrow A(u, \varphi) \quad \text{dans } F' \text{ faible.}$$

En effet, il y a seulement à vérifier que $\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \rightarrow \mathcal{B}(u, \varphi)$ dans F' faible, ce qui est immédiat.

HYPOTHÈSE (II) (iii). — Soit u_μ avec $u_\mu \rightarrow u$ dans F faible, $u'_\mu \rightarrow u'$ dans F' faible, $A(u_\mu, \varphi) \rightarrow \psi$ dans F' faible; on veut montrer que

$$\langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \rightarrow \langle \psi, u \rangle.$$

Comme $A(u_\mu, \varphi) = \mathcal{A}(\varphi) + \mathcal{B}(u_\mu, \varphi)$, on a donc

$$\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \rightarrow \psi - \mathcal{A}(\varphi) \quad \text{dans } F' \text{ faible.}$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \rightarrow \mathcal{B}(u, \varphi)$ dans F' faible, donc

$$\psi - \mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{B}(u, \varphi)$$

et il reste à montrer que

$$\langle \mathcal{B}(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}(u, \varphi), u \rangle,$$

i. e. que

$$\beta(u_\mu, \varphi, u_\mu) \rightarrow \beta(u, \varphi, u).$$

Revenant à la définition de β , il faut montrer que

$$\int_Q u_{\mu k} (D_k \varphi_i) u_{\mu i} dx dt \rightarrow \int_Q u_k (D_k \varphi_i) u_i dx dt.$$

Il suffit donc de montrer que $u_{\mu k} u_{\mu i} \rightarrow u_k u_i$ dans $L_{p'}(Q)$ faible; or $u_{\mu k} u_{\mu i}$ est borné dans $L_{p/2}(Q)$ et l'on peut extraire u_ν telle que $u_{\nu k} u_{\nu i} \rightarrow g_{ki}$ dans $L_{p/2}(Q)$ faible. Par ailleurs, d'après les hypothèses et [1], $u_\mu \rightarrow u$ dans $L_p(Q)$ fort (par exemple), on peut donc supposer que $u_{\nu k}(x) \rightarrow u_k(x)$ p. p., donc $g_{ki} = u_k u_i$, donc : $u_{\nu k} u_{\nu i} \rightarrow u_k u_i$ dans $L_{p/2}(Q)$

faible, et l'on a le résultat voulu si $L_{p/2}(Q) \subset L_{p'}(Q)$, i. e. si $\frac{2}{p} \leq \frac{1}{p'}$,

i. e. $p \geq 3$.

Ceci achève la vérification des hypothèses (I) et (III).

3.4. Conclusion.

Si $p \geq 3$, il existe une solution du problème (3.1) [le sens précis étant (3.3), (3.4)].

L'unicité n'est pas résolue.

De même, il existe une *solution périodique*, i. e. une solution du système (3.1), mais où la condition initiale « $u(0) = u_0$ » est remplacée par la condition « $u(0) = u(T)$ ».

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AUBIN (J. P.). — Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 5042-5044.
- [2] BROWDER (F. E.). — Non linear elliptic boundary value problems, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 69, 1963, p. 862-874.
- [3] BROWDER (F. E.). — Strongly non linear parabolic boundary value problems, *Amer. J. Math.*, t. 86, 1964, p. 339-357.
- [4] COHN (J.) and NIRENBERG (L.). — *Non coercive boundary value problem* (à paraître).
- [5] KATO (T.). — *Non linear evolution equations in Banach spaces* (à paraître).
- [6] LERAY (J.) et LIONS (J.-L.). — Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. math. France*, t. 93, 1965, p. 97-107.
- [7] LIONS (J.-L.). — Équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert, *Centro Internazionale Matematico Estivo* [30 mai-8 juin 1963]: *Equazioni differenziale astratte*, n° 2, 71 pages. — Roma, Cremonese, 1963.
- [8] LIONS (J.-L.). — *Singular perturbations and some non linear boundary value problems*, Mathematical Research Center, University of Wisconsin, Report 421, 36 pages.
- [9] LIONS (J.-L.). — Quelques remarques sur certains problèmes d'évolution non linéaires, *Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* [octobre 1964. Cagliari-Sassari] (à paraître).
- [10] LIONS (J.-L.) et PEETRE (J.). — *Théorie de l'interpolation des opérateurs et applications* (Ouvrage en préparation).
- [11] MINTY (G. J.). — Monotone (non linear) operators in Hilbert space, *Duke math. J.*, t. 29, 1962, p. 341-346.
- [12] OLEJNIK (O. A.). — Sur un problème de Fichera [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. R.*, t. 157, 1964, p. 1297-1300.
- [13] VIŠIK (I. M.). — Systèmes différentiels quasi-linéaires fortement elliptiques sous forme divergente [en russe], *Trudy Moskovskogo Mat. Obšč.*, t. 12, 1963, p. 125-184.
- [14] VIŠIK (I. M.). — Résolution de problèmes aux limites pour équations paraboliques quasi-linéaires d'ordre quelconque [en russe], *Mat. Sbornik*, t. 59, 1962, p. 289-335.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1964.)

Note ajoutée à la correction des épreuves. — D'autres résultats sur l'existence de solutions périodiques d'équations non linéaires ont été récemment obtenus par G. PROUSE, G. PRODI (Congrès de Gênes, février 1965) et par F. E. BROWDER, (*Existence of periodic solutions for non linear equations of evolution*, à paraître).

Jacques-Louis LIONS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
42, rue du Hameau, Paris 15^e.