

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LEONCE LESIEUR

## **Sur la rationalité et la géométrie des intersections d'hyperquadriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 75 (1947), p. 113-192

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1947\\_\\_75\\_\\_113\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__113_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR LA RATIONALITÉ  
ET LA GÉOMÉTRIE DES INTERSECTIONS D'HYPERQUADRIQUES;**

PAR M. LÉONCE LESIEUR.

---

INTRODUCTION.

Il y a des caractères de géométrie des hyperespaces que ne révèle pas le seul examen de l'espace ordinaire. La rationalité des intersections d'hyperquadriques est de ceux-là, puisqu'il est bien connu que l'intersection de deux quadriques est rationnelle dès que l'espace a au moins quatre dimensions (Rosati 1899), alors que la biquadratique ordinaire n'est pas unicursale; on sait aussi que l'intersection de plusieurs hyperquadriques est rationnelle quand le nombre des dimensions de l'espace est suffisamment grand (Gauthier 1944).

Le Chapitre I de cette Thèse a pour but de présenter deux effets de la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques. Dans le premier, le point de départ est l'idée suivante : deux représentations rationnelles connues d'une même variété définissent une transformation birationnelle dans l'espace des paramètres. Il faut donc rappeler d'abord la représentation rationnelle d'une hyperbiquadratique (§ I) pour étudier ensuite les transformations birationnelles avec certaines de leurs applications (§ II). La deuxième conséquence de la rationalité d'une hyperbiquadratique porte sur des transformations simplement rationnelles, plus générales que les transformations birationnelles précédentes, et qui peuvent servir à transformer rationnellement deux hyperquadriques données en deux variétés cubiques doubles. Le paragraphe correspondant (III) montre en terminant le lien qui existe entre ce problème et la représentation unicursale de l'hyperbiquadratique.

Les méthodes utilisées dans ce chapitre tiennent compte d'un double désir d'extension : l'indépendance des résultats vis-à-vis du nombre  $n$  des dimensions de l'espace, et leur généralisation au cas de l'intersection d'un nombre quelconque  $r$  d'hyperquadriques.

C'est cette dernière généralisation qui fait l'objet du Chapitre II. J'étudie d'abord (§ I) la représentation rationnelle de la variété commune à  $r$  hyperquadriques dans un espace à  $n$  dimensions  $n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1$ . J'examine ensuite (§ II) le cas  $n < l$  avec l'hypothèse de la rationalité due à l'existence d'un espace

linéaire à  $r-1$  dimensions sur l'intersection. J'analyse enfin (§ III) les transformations birationnelles et rationnelles qui généralisent celles du Chapitre I.

Les résultats sont naturellement plus variés qu'au Chapitre I, mais ils ne font intervenir en définitive que quelques types de variétés, qui dépendent à la fois des entiers  $r$  et  $n$ , et qui sont reliées par des propriétés permanentes, qu'on augmente  $n$  ou  $r$ . Les méthodes allient l'intuition géométrique au support solide constitué par des éléments simples de géométrie analytique projective des hyperespaces (1).

Avec le Chapitre III commence une deuxième partie, géométrique, indépendante de la rationalité, comme du nombre des dimensions de l'espace. L'idée d'utiliser une projection conique sur l'espace ordinaire, de l'intersection de deux cônes du second ordre de l'espace à quatre dimensions, a été mise à profit par Segre (1884) pour étudier les surfaces du quatrième ordre à conique double. Je reprends cette méthode dans l'hyperespace, d'un point de vue différent, et avec des conséquences nouvelles. L'intersection de deux hyperquadriques de l'espace à  $n+1$  dimensions se projette sur l'espace à  $n$  dimensions suivant une variété particulière, du quatrième ordre, que j'appelle hypercyclide. Celle-ci peut se construire, d'après la méthode Segre, par une génération dite descriptive, à partir des éléments suivants : deux quadriques, traces de deux cônes du faisceau, deux points  $s_1, s_2$ , projections de leurs sommets, et un troisième point  $i$  trace de la droite qui joint les sommets. Points et quadriques doivent donc suffire à déterminer les autres points et les quadriques provenant de tous les cônes du faisceau.

Le paragraphe I débute par cette détermination; il souligne le fait intéressant que les quadriques et les points analogues à  $i$  ne dépendent aucunement des points analogues à  $s$ ; il continue par l'étude générale des générations et ensembles ou équipages de générations descriptives d'une hypercyclide donnée. Le paragraphe II traite spécialement des hypercyclides cubiques, dont le rôle au Chapitre I était fondamental, et qui sont obtenues par projection faite d'un point appartenant à l'hyperbiquadratique. Le paragraphe III s'occupe des applications qui découlent de la résolution du problème de la détermination des points  $i$  quand on se donne seulement les quadriques des générations descriptives d'un équipage; les résultats ainsi obtenus me paraissent nouveaux. Le paragraphe se termine par une dernière application qui fait intervenir la courbe de section plane du lieu des tangentes à une biquadratique ordinaire.

Dans le Chapitre IV j'ai été amené, pour étendre à l'espace et aux hyperespaces la dernière application du Chapitre III, à préciser la définition et les propriétés d'un lieu de tangentes particulières, que j'appelle principales, à l'intersection de deux hyperquadriques. Le premier paragraphe commence par le cas d'une variété quelconque à  $n-2$  dimensions plongée dans l'espace à  $n$  dimensions. Les tangentes principales ont pour lieu une variété à  $n-1$  dimensions, dont l'hyperplan tangent reste le même tout le long d'une génératrice. Je rejoins ainsi, en

---

(1) Éléments qu'on peut trouver par exemple dans Van der WAERDEN, *Einführung in die algebraische geometrie*, 1939, p. 1 à 43.

partant de l'arête, les variétés  $n - 2$  — développoides rencontrées par Gauthier dans sa thèse (1944); je m'occupe surtout de la développoides attachée à une hyperbiquadratique de l'espace à quatre dimensions, pour laquelle je donne quelques belles propriétés géométriques, confirmées analytiquement (§ III). Cette limitation du nombre des dimensions n'est pas restrictive : le pas franchi pour passer du plan à l'espace permet d'accéder aux hyperespaces. Enfin certaines congruences d'espaces linéaires à  $n - 2$  dimensions rencontrées dans ces deux paragraphes, dont la variété focale se présente comme section hyperplane d'une développoides de l'espace à  $n + 1$  dimensions, suggèrent un aperçu dans l'espace à  $n$  dimensions, sur les congruences d'espaces linéaires à  $p$  dimensions et sur les tangentes principales d'une variété à  $p$  dimensions (§ III).

**Notations.** — Je désigne par  $E_n$  l'espace projectif à  $n$  dimensions. Les variétés algébriques intervenant dans ce travail sont des êtres géométriques précis qui m'ont paru réclamer un nom approprié : une  $Q_n$  est une quadrique de l'espace  $E_n$ , une  $B_n$  est une biquadratique intersection de deux  $Q_n$ . Une  $B_n$  se projette à partir d'un point  $O$  quelconque, sur un  $E_p$  ( $p = n - 1$ ) suivant une variété du quatrième ordre ayant une  $Q_{p-1}$ , double, c'est-à-dire une *Cyclide*  $C_p$ . Quand  $O$  est sur la  $B_n$ , la projection est une variété du troisième ordre passant par une  $Q_{p-1}$ , ou *cyclide cubique*  $T_p$ . L'hyperplan  $E_{p-1}$  qui contient cette  $Q_{p-1}$  recoupe  $T_p$  suivant un hyperplan  $E_{p-2}$ . (Pour  $p = 3$  c'est la section plane décomposée d'une surface cubique en une droite et une conique). L'intersection résiduelle de  $T_p$  avec une quadrique  $Q_p$  passant par cet  $E_{p-2}$  est une variété  $V_{p-2}^5$  à  $p - 2$  dimensions, du cinquième ordre. Quand  $p = 3$ , c'est la quintique (1) commune à une quadrique et une surface cubique se coupant déjà suivant une droite. Quand  $p > 3$  je lui conserve le nom de *quintique* et je l'appelle  $q_p$ . Donc  $q_p$  représente, suivant la notation habituelle, une  $V_{p-2}^5$ ,  $Q_n$  une  $V_{n-1}^2$ ,  $B_n$  une  $V_{n-2}^4$ , et  $T_p$  une  $V_{p-1}^3$ .

Telles sont les notations essentielles utilisées dans le premier et les deux derniers chapitres. Dans le deuxième, qui concerne l'intersection d'un nombre quelconque d'hyperquadratiques, il en intervient d'autres qui sont définies chemin faisant; il me semble utile cependant de les rassembler dans le tableau suivant :

Variétés.	Dimension.	Ordre.	Équation.	Référence.
$T_p^r$	$p - 1$	$r + 1$	(6)	Chap. II, I, c
$q_p^r$	$p - 2$	$\frac{r(r+3)}{2}$	(4)	id.
$V_{p-1}^r$	$p - 1$	$r$	(7)	id.
$L_p^r$	$p - 2$	$\frac{r(r-1)}{2}$	(5)	id.
$B_n^r$	} Intersection de $r$ hyperquadratiques de l'espace à $n$ dimensions			

(1) Quintique de genre 2 (ENRIQUES, p. 55). (*Courbes et fonctions algébriques*. Traduction LÉGAUT, Paris, 1926).

Dans certaines équations où les lettres sont affectées d'indices, il faut veiller à ne pas confondre un indice supérieur avec un exposant. Pour éviter la confusion, la lettre est en général mise entre parenthèses dans le cas de l'exposant.

Enfin, toute référence dans le texte à un paragraphe sans numéro de chapitre, est relative au paragraphe du chapitre en cours. Les paragraphes s'accompagnent souvent de subdivisions désignées par des lettres ou des chiffres, et la remarque précédente vaut également pour une subdivision de paragraphe.

---

CHAPITRE I.

Deux effets de la rationalité de la variété commune  
à deux hyperquadriques.

La première des conséquences de la rationalité de la variété commune à deux hyperquadriques, que je présente ici, concerne une famille de transformations birationnelles de l'espace à  $p$  dimensions, déduite de deux représentations rationnelles connues de l'intersection de deux hyperquadriques d'un espace à  $p + 2 = n$  dimensions. Il me semble donc utile de rappeler d'abord, dans un premier paragraphe, les principaux résultats relatifs à cette représentation rationnelle.

I. — REPRÉSENTATION RATIONNELLE D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE (1).

Elle est liée à l'existence d'une droite sur l'hyperbiquadratique  $B_n$ , ce qui suppose  $n > 3$ . Pour  $n = 3$  la biquadratique ordinaire n'est pas en général unicursale; quand  $n = 4$  il y a 16 droites sur la  $B_4$ , et pour  $n > 4$  une infinité dépendant de  $2(n - 4)$  paramètres, telle qu'il en passe par tout point de la  $B_n$  (2).

Soit  $\Delta$  l'une de ces droites : Définissons  $B_n$  par deux quadriques  $Q_n$  contenant  $\Delta$ . Un plan variable  $E_2$  passant par  $\Delta$  recoupe la première quadrique suivant une droite  $D_1$  et la deuxième suivant une droite  $D_2$ , donc  $B_n$  en un seul point  $M$  qui est en correspondance birationnelle avec le plan, et par suite avec sa trace  $N$  sur un  $E_{n-2} = E_p$  quelconque.

La rationalité se trouve établie en général. Nous allons préciser d'une façon analytique.

Je prends deux sommets du repère projectif  $A_n(0, 0, \dots, 1, 0)$  et  $A_{n+1}(0, 0, \dots, 0, 1)$  sur  $\Delta$  ( $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ ). Les deux quadriques sont alors définies par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + b_1 = 0, \\ a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

$a_1^1, a_1^2, a_2^1$  et  $a_2^2$  étant des formes linéaires en  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ;  $b_1$  et  $b_2$  des formes quadriques des mêmes variables. Lorsque le déterminant du système (1) linéaire en  $X_1$  et  $X_2$  n'est pas identiquement nul, on peut résoudre

$$X_1 = \frac{a_2^1 b_2 - a_2^2 b_1}{a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1}, \quad X_2 = \frac{a_2^1 b_1 - a_1^1 b_2}{a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1},$$

puis prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$  dans l' $E_{n-2}$  défini par  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . En posant

$$(2) \quad Q \equiv a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1$$

(1) Cf. LESIEUR, *Bull. Soc. Math. de France*, 1945, p. 43.

(2) BERTINI, *Iperspazi*, Messine, 1923, p. 181.

les équations paramétriques de  $B_n$  s'obtiennent après multiplication par  $Q$  sous la forme

$$(3) \quad x_1 = u_1 Q, \quad x_2 = u_2 Q, \quad \dots, \quad x_{n-1} = u_{n-1} Q, \quad X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2.$$

où  $A_1, A_2$  sont des formes cubiques constituées par deux mineurs du tableau des coefficients de (1), le troisième étant  $Q$  lui-même.

Du point de vue géométrique le point  $N(u)$  est la projection du point  $M(x)$  faite de  $\Delta$ .

J'indique en outre, que dans le cas  $Q \equiv 0$ , les deux seuls faits suivants peuvent se présenter :

1. L'hyperbiquadratique est l'intersection de deux cônes de même sommet; c'est elle-même un cône dont la rationalité n'est pas assurée, par exemple si la base est une biquadratique ordinaire non unicursale.

2. L'une des quadriques admet  $\Delta$  pour droite double, aucun de ses points n'étant double pour l'autre; alors la rationalité est assurée et la représentation rationnelle peut encore s'obtenir par des formules qui se rattachent au type (3).

*En définitive, toute hyperquadrique non conique est rationnelle, et sa représentation rationnelle peut toujours se mettre sous la forme (3).*

Les images des sections hyperplanes de  $B_n$  forment, d'après (3), un système linéaire de variétés cubiques ayant en commun l'intersection des surfaces

$$Q = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Ses équations s'obtiennent donc en annulant les mineurs de la matrice

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la quadrique  $Q$  avec la surface cubique  $A_1 = 0$ , en dehors de l'espace linéaire  $E_{n-4}$  d'équations  $a_1^2 = a_2^2 = 0$ .

Ainsi, en posant  $p = n - 2$ ,  $Q$  est une quadrique  $Q_p$  (avec l'espace double  $a_1^1 = a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$  si  $p \geq 4$ );  $A_1 = C$  est une cyclide cubique  $T$  contenant un  $E_{p-2}$  de  $Q_p$  et la recoupant ultérieurement suivant la quintique  $q_p = V_{p-2}$  d'équations (4) (voir *Notations*).

Toute surface cubique image d'une section hyperplane  $X_2 = \lambda X_1 + B_1$  ( $B_1$  forme linéaire en  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ ) est une cyclide  $T_p$ , puisqu'elle recoupe la quadrique  $Q$ , dont elle possède déjà la quintique  $q_p$ , suivant un  $E_{p-2}$ . On peut le vérifier analytiquement; en remplaçant dans (1)  $X_2$  par sa valeur, on obtient pour équation de l'image

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda a_1^2 & b_1 + a_1^2 B_1 \\ a_2^1 + \lambda a_2^2 & b_2 + a_2^2 B_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente bien une cyclide  $T_p$  recoupant la quadrique  $Q_p$  suivant l' $E_{p-2}$ ,  $a_1^1 + \lambda a_1^2 = 0$ ,  $a_2^1 + \lambda a_2^2 = 0$ . Cet  $E_{p-2}$  fait partie d'un système d' $E_{p-2}$  générateurs de  $Q$  que j'appelle premier système. Ces  $E_{p-2}$  (exemple  $a_1^1 = a_2^1 = 0$ ) s'appuient sur la quintique  $q_p$  suivant une cyclide cubique  $T_{p-2}$  (telle que la section de  $A_1 = 0$ )

tandis que ceux de l'autre système (exemple  $a_1^1 = a_1^2 = 0$ ) rencontrent  $q_p$  suivant une quadrique  $Q_{p-2}$  (telle que la section de  $b_1 = 0$ ).

Résumons l'essentiel : *Les images des sections hyperplanes de  $B_n$  forment un système linéaire de cyclides <sup>(1)</sup> cubiques  $T_p$  passant par une quintique  $q_p$ . Elles recourent la quadrique  $Q_p$  qui la contient suivant le premier système de ses  $E_{p-2}$  générateurs.*

Parmi elles s'en trouvent  $\infty^p$  décomposées en la quadrique  $Q$  et un  $E_{p-1}$  quelconque  $P$ , images de la section par l'hyperplan  $\Delta P$ . Les points de la section ayant leurs projections sur  $Q$  sont ceux qui sont infiniment voisins de  $\Delta$ . Il y a en effet pour les coordonnées d'un point  $N$  de  $Q$  impossibilité du système (1), donc aucun point de  $B_n$  en dehors de  $\Delta$  dans le plan  $\Delta N$ . Pour un tel plan les deux génératrices  $D_1 D_2$  de la section se coupent sur  $\Delta$  : quand elles sont confondues il y a indétermination pour le système (1), exprimée par les équations (4) de la quintique; on est en présence d'une droite  $D$  de  $B_n$  rencontrant  $\Delta$ , et le plan  $D\Delta$  a pour trace sur  $E_p$  un point  $N$  de  $q_p$ . Dans la section hyperplane de  $B_n$ , le point situé sur  $D$  a toujours pour projection  $N$ , quelle que soit la section : on s'explique ainsi que la quintique figure comme base du système linéaire image des sections planes.

Je rappelle aussi le cas des petites valeurs de  $p$ , utiles dans la suite :

$p = 2$ . — La représentation d'une  $B_4$  se fait par un système linéaire de cubiques passant par cinq points, qui définissent la conique  $Q$  et sont les images de cinq droites rencontrant  $\Delta$ , tandis que  $Q$  est l'image de  $\Delta$  elle-même. L'hyperplan  $E_3$  qui contient  $\Delta$  et deux d'entre elles recoupe  $B_4$  suivant une quatrième droite; sa projection joint deux des points; on trouve ainsi dix autres droites, ce qui fait seize au total.

$p = 3$ . — Le système représentatif est celui des surfaces cubiques ayant une quintique base commune <sup>(2)</sup>. Chacune d'elles recoupe la quadrique  $Q$  qui la contient suivant une corde trisécante.

$p = 4$ . —  $Q$  devient un cône de sommet  $a_1^1 = a_1^2 = a_2^1 = a_2^2 = 0$ . La cyclide  $A_4 = 0$  admet quatre points doubles définis par  $a_1^2 = a_2^2 = b_1 = b_2 = 0$  (les dérivées partielles s'annulent en l'un de ces points). Chaque surface cubique du système possède de même quatre points doubles, et ces cyclides cubiques  $T_4$  se distinguent essentiellement de la  $V_3^3$  la plus générale de l'espace à quatre dimensions.

$p = 5$ . —  $Q_5$  est un cône à droite double. Les  $T_5$  sont des cyclides ayant une  $B_3$  de points doubles.

$p = 6$ . — Les quatre points vérifiant  $a_1^1 = a_1^2 = a_2^1 = a_2^2 = b_1 = b_2 = 0$  sont triples pour la quintique. L'existence d'éléments triples pour  $q_p$  subsiste

<sup>(1)</sup> Au sens des notations. Elles n'ont pas l'ombilicale commune.

<sup>(2)</sup> Il figure comme l'un des types birationnellement distincts de systèmes linéaires de degré supérieur à 3, à intersections variables elliptiques [(GODEAUX, *Transformations birationnelles de l'espace* (Mém. Sc. Math., fasc. 67, 1934, p. 35.)]



pour  $p > 6$ , ces points étant alors distribués sur une  $B_{p-4}$  appartenant à l' $E_{p-4}$  double pour  $Q$ .

Enfin, il n'est pas possible de passer sous silence la représentation rationnelle d'une cyclide cubique  $T_p$ , dont le rôle apparaît fondamental pour l'intersection de deux hyperquadriques, et dont nous verrons au Chapitre II l'équivalent pour le cas de la variété commune à plusieurs hyperquadriques.

La définition d'une cyclide cubique  $T_p$ , donnée dans les notations, la montre comme variété cubique de  $E_p$  à  $p - 1$  dimensions, possédant une quadrique  $Q_{p-1}$ . Il revient au même de dire qu'elle possède un espace linéaire  $E_{p-2}$ . Celui-ci ayant pour équations

$$a_1^1 = 0, \quad a_2^1 = 0,$$

l'équation de la cyclide  $T_p$  peut prendre la forme

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & b_1 \\ a_2^1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit que l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes est caractéristique d'une cyclide  $T_p$  de l'espace  $E_p$ .

1° Une cyclide  $T_p$  est la projection sur  $E_p$  d'une section hyperplane de  $E_{p+2}$  faite d'une droite  $\Delta$  appartenant à la  $B_{p+2}$ .

2° Une cyclide  $T_p$  est la projection d'une  $B_{p+1}$  sur  $E_p$  faite d'un point  $O$  appartenant à la  $B_{p+1}$ .

Chacune d'elles est évidemment suffisante; il suffit en effet de se reporter pour la première à la représentation rationnelle d'une  $B_{p+2}$ , et de noter pour la deuxième que la projection d'une  $B_{p+1}$  sur un  $E_p$  faite d'un point  $O$  de la  $B_{p+1}$  est une variété  $V_{p-1}^2$  qui contient la trace  $E_{p-2}$  sur  $E_p$  de l' $E_{p-1}$  tangent en  $O$  à la  $B_{p+1}$ . Ces propriétés sont également satisfaites pour toute cyclide  $T_p$ . Car l'équation d'une cyclide  $T_p$ , écrite plus haut, la montre comme projection faite de  $\Delta$  par  $X_2 = 0$  de l'intersection  $B_{p+2}$  des deux quadriques d'équation (1), elle la montre encore comme projection sur  $E_p$  de l'intersection  $B_{p+1}$  des deux quadriques de  $E_{p+1}$  qui ont pour équation

$$a_1^1 X_1 + b_1 = 0, \quad a_2^1 X_1 + b_2 = 0,$$

la projection étant faite du point  $(X_1 = 1, u_k = 0)$  qui appartient à la  $B_{p+1}$ .

L'une ou l'autre des deux propriétés ainsi établies justifie le théorème suivant :

*Une cyclide  $T_p$  est rationnelle pour  $p \geq 3$ . Sa représentation rationnelle peut s'obtenir par  $p + 1$  cyclides cubiques  $T_{p-1}$  de l'espace  $E_{p-1}$  des paramètres, ayant en commun une quintique  $q_{p-1}$ , ainsi qu'un point  $O$  non situé sur elle.*

En effet, si j'utilise par exemple la deuxième propriété, la rationalité découle immédiatement de l'équivalence birationnelle entre la  $T_p$  et la  $B_{p+1}$  dont elle est la projection. Cette  $B_{p+1}$  est rationnelle dès que  $p + 1 \geq 4$  ou  $p \geq 3$ . Pour obtenir

sa représentation rationnelle on projette sur un  $E_{p-1}$  à partir d'une droite  $\Delta$  de la  $B_{p+1}$  : aux sections hyperplanes de  $T_p$  correspondent ainsi des sections hyperplanes de  $B_{p+1}$  passant par le point de vue, puis par projection faite de  $\Delta$  des cyclides cubiques  $T_{p-1}$  passant par un point fixe  $O$  et par une quintique  $q_{p-1}$ .

La représentation rationnelle d'une  $B_n$ , devenue maintenant familière, va nous conduire à certaines transformations birationnelles, par le détour de quelques problèmes énumératifs simples qui font l'objet du début de ce deuxième paragraphe.

II. — LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES I.

a. Paramètres d'une  $B_n$ . — Leur nombre est celui de deux quadriques  $Q_n$  diminué des deux paramètres qui les définissent dans leur faisceau, donc

$$N = n(n + 3) - 2 = n^2 + 3n - 2,$$

soit 26, 38, 52, 68, . . . , à partir de  $n = 4$ . Sont comptés dans  $N$  les  $n(n + 2)$  paramètres de la transformation projective de  $E_n$ . Il reste donc

$$\boxed{M = n - 2}$$

invariants projectifs de la  $B_n$  (1). On peut les mettre en évidence sur les équations canoniques

$$\begin{aligned} (x_1)^2 - (x_3)^2 - m_1(x_4)^2 - m_2(x_5)^2 - \dots - m_{n-2}(x_{n+1})^2 &= 0, \\ (x_2)^2 + (x_3)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 &= 0. \end{aligned}$$

En appelant cône  $i$  celui dont l'équation ne contient pas  $x_i$ , les invariants  $m_i$  ne sont autres que les  $n - 2$  rapports anharmoniques

$$(1234), (1235), (1236), \dots, [123(n+1)].$$

b. Paramètres d'une quintique  $q_p$  ( $p = n - 2$ ). — Il faut d'abord dénombrer les paramètres des éléments de la matrice (4), puis retrancher le nombre des paramètres des combinaisons linéaires des lignes et des colonnes.

Les éléments  $a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, b_1, b_2$  dépendent dans  $E_p$  de  $(p + 1)(p + 2) + 4(p + 1)$  paramètres homogènes, donc de  $(p + 1)(p + 2) + 4(p + 1) - 1$  paramètres.

Les combinaisons par colonnes fournissent la nouvelle matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 a_1^1 + \mu_1 a_1^2 & \lambda_2 a_1^1 + \mu_2 a_1^2 & \lambda_3 b_1 + B_1 a_1^1 + B_2 a_1^2 \\ \lambda_1 a_2^1 + \mu_1 a_2^2 & \lambda_2 a_2^1 + \mu_2 a_2^2 & \lambda_3 b_2 + B_1 a_2^1 + B_2 a_2^2 \end{array} \right\| = 0,$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont des formes linéaires en  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ , tandis que les  $\lambda$  et les  $\mu$  sont des constantes. Elles dépendent donc de  $2(p + 1) + 5$  paramètres homogènes, ou  $2(p + 1) + 4$  paramètres. Les combinaisons par lignes dépendent de quatre paramètres homogènes ou trois paramètres.

(1) Cf. BERTINI, *Iperspazi*, p. 169.

En définitive le nombre des paramètres de la quintique est

$$L = (p + 1)(p + 2) + 4(p + 1) - 1 - 2(p + 1) - 4 - 3,$$

ou

$$L = p^2 + 5p - 4$$

d'où

$p$	2	3	4	5	...
$L$	10	20	32	46	...

Il s'agit pour  $p = 2$  des paramètres de cinq points d'un plan, pour  $p = 3$  des vingt paramètres de la quintique de genre 2.

*c. Relation entre L et M.* — Comptons le nombre des paramètres d'une  $B_n$  à l'aide de ceux des  $n + 1$  cyclides cubiques  $T_p$  du réseau à base quintique  $q_p$  qui en permet la représentation rationnelle. Le choix des surfaces cubiques dans le réseau équivaut à une projectivité pour  $B_n$  dans  $E_n$ . Le nombre  $M$  des invariants de  $B_n$  est donc lié au nombre  $L$  des paramètres de la quintique elle-même. Il lui serait égal si, inversement,  $B_n$  définissait  $q_p$ ; il s'en faut du nombre  $X$  des paramètres des transformations birationnelles qui n'altèrent pas la nature algébrique du réseau, c'est-à-dire transforment ses surfaces en nouvelles cyclides cubiques ayant une nouvelle quintique  $q'_p$  commune; de telles transformations donnent en effet une nouvelle représentation paramétrique de  $B_n$  qui est du même type que l'ancienne. On a donc  $M = L - X$  ou

$$X = L - M = p^2 + 4p - 4 = n^2 - 8.$$

Nous obtenons ainsi :

*L'existence d'une famille à  $p^2 + 4p - 4$  paramètres de transformations birationnelles qui n'altèrent pas la nature algébrique d'un réseau donné de surfaces cubiques à base quintique d'un espace  $E_p$ .*

Parmi elles se trouvent naturellement les transformations projectives de  $E_p$ , qui dépendent de  $p(p + 2)$  paramètres. Mais dès que  $p > 2$ ,  $X = p^2 + 4p - 4$  est supérieur à  $p(p + 2)$ . Il faut donc se poser le problème de la recherche d'autres transformations de cette famille

*d. Les transformations birationnelles  $t$ .* — Le problème posé a son origine dans la représentation rationnelle d'une  $B_{p+2}$  : il y trouve aussi sa solution.

Prenons en effet deux droites  $D$  et  $\Delta$  de la  $B_{p+2}$ ; faisons correspondre au point  $m$  de  $E_p$  le point  $M$  de  $B_{p+2}$  situé dans le plan  $(D, m)$ , puis la projection  $m'$  de  $M$  sur  $E_p$ , faite de  $\Delta$ . Nous définissons ainsi dans  $E_p$  une transformation  $(m, m')$  évidemment birationnelle, que nous appelons  $(t)$ . Nous allons montrer, en l'étudiant pour  $p = 2, 3$ , puis  $p > 3$ , qu'elle fait partie de la famille cherchée.

$p = 2$ . — L'hyperplan  $E_3$  défini par  $D$  et  $\Delta$  dans  $E_4$  coupe  $B_4$  suivant un quadricatère gauche et le plan  $E_2$  suivant une droite  $d$ . Les projections sur  $E_2$  des

sections hyperplanes de  $B_4$ , faites de  $D$ , sont des cubiques passant par cinq points dont deux appartiennent à  $d$ ; les autres forment un triangle  $T$ . On définit de même pour  $\Delta$  le triangle  $\theta$  dont les sommets ne sont pas sur  $d$ . Dans la transformation  $t$ , à une droite correspond sur  $B_4$  une section par un  $E_3$  contenant  $D$ , donc une cubique gauche rencontrant  $\Delta$  et qui se projette par suite sur une conique; celle-ci passe par les sommets du triangle  $\theta$ . Dans la transformation inverse, une droite a pour homologue une conique circonscrite au triangle  $T$ . Enfin, le réseau des cubiques ayant pour points bases les cinq points relatifs à  $D$  se transforme dans le réseau analogue relatif à  $\Delta$ . *La transformation  $t$  est donc une transformation quadrique déterminée faisant partie de la famille cherchée.*

Il en est de même de son produit par une homographie quelconque. Il y a bien  $X = 8$  paramètres.

$p = 3$ ;  $X = 17$ . — On définit encore la droite  $d$ , trace de l'hyperplan  $E_3$  qui contient  $D$  et  $\Delta$ , et corde commune aux deux quintiques relatives à  $D$  et  $\Delta$ . Deux points homologues  $m$  et  $m'$  sont dans un plan  $\pi$  passant par  $d$ , trace de  $L'E_4(D\Delta M)$ ; ( $t$ ), qui laisse  $\pi$  invariant, est donc une transformation de Jonquières dont l'empreinte sur  $\pi$  est quadratique, les points fondamentaux se trouvant sur les deux quintiques. Les plans ont pour homologues, sur  $B_3$  les sections par des  $E_4$  qui contiennent  $D$ , donc en projection *des surfaces cubiques ayant en commun, avec la droite  $d$ , la quintique  $q(\Delta)$*  <sup>(1)</sup>. Pour la transformation inverse la base du réseau homaloïdal des surfaces cubiques est formée par  $d$  et  $q(D)$ . A une droite correspond sur  $B_3$  une cubique gauche, qui se projette suivant une cubique gauche, et ceci dans chaque sens; la transformation est donc d'indice (3,3). Enfin les surfaces cubiques passant par la quintique  $q(D)$ , qui fournissent sur  $B_3$  les sections par les  $E_4$ , se transforment par là-même en surfaces cubiques contenant  $q(\Delta)$ . C'est ce qui nous intéresse : la nature algébrique du premier système de surfaces n'est pas changée par  $t$ , ni par le produit  $ht$ ,  $h$  étant une homographie. Ce système étant donné, le nombre de paramètres de cette famille de transformations est celui de l'homographie : 15, augmenté des deux paramètres de  $t$  qui définissent la corde sur la quintique. Elle dépend bien de dix-sept paramètres.

$p > 3$ ;  $X = n^2 - 8$ . — Signalons les circonstances nouvelles. *Le réseau homaloïdal est encore formé de cyclides à base quintique accompagnée d'une de ses cordes*, mais cette base n'est plus une variété décomposée comme dans le cas  $p = 3$  où la corde et la quintique avaient même dimension. En outre, l'homologue d'un  $E_{p-2}$  est, sur  $B_{p+2}$  une  $B_p$ , et en projection faite de  $\Delta$  une  $B_p$  qui contient  $d$  <sup>(2)</sup>. Par contre une droite se transforme en cubique gauche dans les deux sens, et la propriété essentielle des transformations  $t$  subsiste. Le produit  $ht$  par une homographie dépend de  $p(p+2) = n(n-2)$  paramètres, auxquels il

<sup>(1)</sup> C'est-à-dire une sextique de genre 3 décomposée. ( $t$ ) se présente alors, à une homographie, près, comme cas particulier de la birationnelle définie par trois réciprocités.

<sup>(2)</sup> Cette propriété est reprise au paragraphe suivant. La transformation  $t$  est d'indice 3, 4, 4... 4, 4, 3.

faut ajouter ceux de  $t$ ; la quintique  $q(D)$  étant donnée les paramètres de  $t$  sont ceux de la droite  $\Delta$  ou encore de la corde  $d$  joignant deux points de  $q_p$ , qui est une  $V_{n-1}^5$ , soit  $2(n-4)$ , en tout  $n(n-2) + 2(n-4) = n^2 - 8$ . On retrouve X.

Notons, fait commun à toutes les transformations  $t$  quel que soit  $p$ , que les points de la trace  $B_p$  de  $B_{p+2}$  sur  $E_p$  sont invariants (quatre points pour  $p = 2$ ).

Telles sont les caractéristiques générales de la famille de transformations birationnelles annoncées à la fin du paragraphe *c*; elles peuvent comprendre des cas particuliers (1) divers suivant les particularités de la  $B_{p+2}$ , ainsi que les positions de  $D$  et  $\Delta$ . Nous n'en abordons pas l'étude. Dégageons, pour conclure, la méthode employée pour former certaines transformations birationnelles : *elle consiste à prendre, pour une même variété, deux représentations rationnelles dont on a fait auparavant l'étude.*

*e. Retour sur la rationalité d'une  $B_n$ .* — Nous avons remarqué au paragraphe précédent que les transformations  $t$  opèrent sur les  $E_{n-2}$  quand  $n > 3$  pour les transformer en hyperbiquadratiques  $B_n$ . Ce serait une nouvelle preuve de la rationalité de  $B_n$  si la structure et l'existence même de  $t$  n'étaient pas liées à la représentation rationnelle de  $B_{n+2}$ , si par exemple on avait fait une analyse autonome de  $t$  dans l'espace  $E_n$ . Montrons néanmoins comment on peut, à partir d'une  $B_n$  donnée, bâtir dans tout  $E_n$  une birationnelle qui la transforme en un  $E_{n-2}$ . Plongeons  $E_n$  dans  $E_{n+2}$ ; par  $E_{n-2}$  pris dans  $E_n$  nous faisons passer un autre  $E'_n$  puis nous prenons une droite  $D$  quelconque qui ne rencontre pas  $E_n$ . Le cône de sommet  $D$  et de base  $B_n$  (2) est coupé suivant une  $B'_n$  sur laquelle nous pouvons choisir une droite  $\Delta$  lorsque  $n \geq 4$ ; elle se projette dans  $E_n$  suivant une droite  $d$  de  $b_n$ , la projection étant faite de  $D$ . Enfin je considère une  $B_{n+2}$  qui contient  $B'_n$  et  $D$ . Il est clair que dans  $E_n$  la transformation  $t$  définie à l'aide de  $B_{n+2}$  et des droites  $D, \Delta$  fait correspondre à  $B_n$  l'espace  $E_{n-2}$ . *Il ne s'agit plus seulement, comme dans la représentation rationnelle d'une  $B_n$ , d'une correspondance birationnelle de variété à variété, mais d'une transformation birationnelle de Cremona étendue à tout l'espace dans lequel  $E_n$  se trouve  $B_n$ .*

Cette méthode géométrique est d'ailleurs susceptible d'une réalisation analytique particulière. Partons des éléments suivants dans  $E_n$  :

$$B_n \begin{cases} a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2 + b_1 = 0. \\ a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

$$E_{n-2}(X_1 = X_2 = 0); \quad d(x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0);$$

deux variables auxiliaires,  $X_3$  et  $X_4$ , définissent  $E_{n+2}$ , et  $D$  est la droite

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = X_1 = X_2 = 0.$$

Prenons pour  $E'_n$

$$X_3 = X_1, \quad X_4 = X_2,$$

(1) L'un deux se présente au paragraphe suivant *e*.

(2) C'est-à-dire le lieu des  $E_2$  passant par  $D$  et s'appuyant sur  $B_n$ .

$B'_n$  est alors définie en ajoutant ces deux équations aux deux équations de  $B_n$ . Elle se trouve sur

$$\begin{aligned} a_1^1 X_3 + a_1^2 X_2 + b_1 &= 0, \\ a_2^1 X_1 + a_2^2 X_4 + b_2 &= 0, \end{aligned}$$

que nous pouvons prendre pour  $B_{n+2}$ . La droite  $\Delta$ , intersection de  $E'_n$  et de l' $E_3$  ( $d$  D) a pour équations

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad X_3 = X_1, \quad X_4 = X_2.$$

Au point  $n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2)$  de  $E_n$  nous associons le point  $M$  de  $B_{n+2}$  situé dans le plan  $Dm$ . Il a pour coordonnées

$$M \left\{ \begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2, X_3 &= \frac{-b_1 - a_1^2 X_2}{a_1^1}, \\ X_4 &= \frac{-b_2 - a_2^1 X_1}{a_2^2}. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à projeter de  $\Delta$ . Effectuons pour cela le changement de variables

$$x_i = y_i (i < n), \quad X_1 - X_3 = Y_1, \quad X_2 - X_4 = Y_2, \quad X_1 = Y_3, \quad X_2 = Y_4.$$

Les coordonnées de la projection  $m'$  de  $M$  sont :

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2,$$

soit ici

$$(5) \quad y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = X_1 + \frac{a_1^2 X_2 + b_1}{a_1^1}, \quad Y_2 = X_2 + \frac{a_2^1 X_1 + b_2}{a_2^2},$$

ou

$$(6) \quad y_i = x_i a_i^1 a_i^2, \quad Y_1 = (a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + b_1) a_1^2, \quad Y_2 = (a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2 + b_2) a_2^1.$$

Telles sont les équations de la transformation que sous la forme (5) on reconnaît birationnelle, et qui transforme  $B_n$  en  $Y_1 = Y_2 = 0$ . Les équations (6) auraient pu s'écrire d'emblée, mais leur formation méthodique a l'avantage de montrer sans plus que la transformation birationnelle correspondante fait partie de la famille ( $t$ ). Il est vrai qu'elle ne constitue qu'un cas particulier du type général esquissé au paragraphe  $d$ , car il est facile de vérifier d'après (6) que chacune des surfaces cubiques du système homaloïdal admet la droite  $d$  pour droite double, tandis que la quintique de base se trouve décomposée (<sup>4</sup>). Quoi qu'il en soit on peut donner en quelque sorte comme deuxième application des transformations  $t$  la propriété suivante :

*Il est possible, au moyen d'une transformation birationnelle  $t$  de tout l'espace  $E_n$ , de transformer une  $B_n$  quelconque en un  $E_{n-2}$  de l'espace ambiant  $E_n$  ( $n \geq 4$ ).*

(<sup>4</sup>) La variété commune aux surfaces cubiques du système homaloïdal est en effet formée par

$$\begin{cases} a_1^1 = 0 \\ a_2^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_1^1 = 0 \\ a_2^1 x_2 + b_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_2^1 x_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

soit un  $E_{n-2}$  passant par  $d$  et  $2Q_{n-1}$  coniques ayant  $d$  pour génératrice et situées dans deux  $E_{n-1}$  qui se rencontrent suivant l' $E_{n-2}$  précédent.

En effectuant à la suite de  $t$  une transformation birationnelle du type inversion la  $B_n$  se trouve changée en une quadrique  $Q_{n-1}$ . Je vais montrer qu'on peut arriver directement à cette transformation par une birationnelle du troisième ordre faisant partie de la famille ( $t$ ).

Il est clair que le passage, dans  $E_n$ , du point  $m(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2)$  au point  $m'(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2)$  par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} y_i = x_i (i < n), & Y_1 = \frac{\alpha_1^1 X_1 + \alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \\ \alpha_1^1 Y_1 + \alpha_2^1 Y_2 + b_2 & = \alpha_1^1 X_1 + \alpha_2^1 X_2 + b_2, \end{cases}$$

définit une transformation birationnelle dans  $E_n$  pour laquelle l'homologue de  $B_n$ , d'équations (1), est une quadrique  $Q_{n-1}$  d'équations  $Y_1 = 0, \alpha_2^1 Y_2 + b_2 = 0$ .

Sous forme résolue les équations (7) s'écrivent :

$$(7') \quad y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = \frac{\alpha_1^1 X_1 + \alpha_1^2 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad Y_2 = \frac{(\alpha_1^1 \alpha_2^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) X_2 - \alpha_2^1 b_1}{\alpha_1^1 \alpha_2^1},$$

que nous allons interpréter comme une transformation  $t$ . Considérons pour cela l' $E_{n+2}$  obtenu en adjoignant aux coordonnées de  $E_n$  les nouvelles variables  $X_3$  et  $X_4$ , et dans  $E_{n+2}$  les deux droites

$$(D) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = X_1 = X_2 = 0,$$

et

$$(\Delta) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad X_1 - X_3 = 0, \quad X_2 - X_4 = 0,$$

qui appartiennent à la  $B_{n+2}$  suivante :

$$B_{n+2} \quad \begin{cases} \alpha_1^1 X_3 + \alpha_1^2 X_4 + b_1 = 0, \\ \alpha_2^1 X_3 + \alpha_2^2 X_4 = 0. \end{cases}$$

Puis cherchons les équations de la transformation birationnelle  $t$  qui associe au point  $m$  de  $E_n$  la projection  $m'$  dans  $E_n$ , faite de  $\Delta$ , du point  $M$  de  $B_{n+2}$  situé dans l' $E_2$  défini par  $D$  et  $m$ .  $M$  a pour coordonnées

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X_1, X_2, X_3 = -\frac{\alpha_1^1 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad X_4 = \frac{(\alpha_2^1 \alpha_1^1 X_2 + b_1)}{\alpha_1^1 \alpha_2^1}.$$

Pour projeter  $M$  de  $\Delta$  nous effectuons le changement de repère déjà employé

$$x_i = y_i (i < n), \quad X_1 - X_3 = Y_1, \quad X_2 - X_4 = Y_2, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = Y_4,$$

ce qui donne les coordonnées de  $m'$

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y_1, Y_2,$$

soit

$$y_i = x_i (i < n), \quad Y_1 = X_1 + \frac{\alpha_1^1 X_2 + b_1}{\alpha_1^1}, \quad Y_2 = X_2 - \frac{\alpha_1^1 (\alpha_1^1 X_2 + b_1)}{\alpha_1^1 \alpha_2^1}.$$

On retrouve les formules (7)'. Donc :

*Au moyen d'une transformation birationnelle du troisième ordre de la famille  $t$ , une  $B_n$  quelconque d'un espace à quatre dimensions au moins peut être transformée en une quadrique  $Q_{n-1}$ .*

La transformation (7)' qui nous a servi n'est d'ailleurs qu'une transformation  $t$  particulière. On vérifiera sans peine que la quintique de base du système homaloïdal est ici encore décomposée<sup>(1)</sup>.

Quand  $n = 3$  les considérations précédentes n'ont plus lieu d'être pour une  $B_3$  générale. Elles s'appliquent cependant à la transformation étendue à tout l'espace, birationnelle, d'une cubique gauche en droite ou en conique. Le réseau homaloïdal est formé dans le premier cas de conoïdes du troisième ordre ayant une droite double  $d$  et passant par deux génératrices communes non coplanaires rencontrant  $d$ , tandis que dans le dernier cas les deux génératrices se croisent sur  $d$ .

J'arrive maintenant à la deuxième conséquence de la rationalité d'une hyperbiquadrique, annoncée dans le titre du chapitre. Elle est présentée dans le paragraphe III qui suit.

### III. — LES TRANSFORMATIONS SIMPLEMENT RATIONNELLES.

Traisons d'abord un problème simple, comme introduction.

1. **Transformer une conique en conique double.** — Il s'agit de remplacer les coordonnées homogènes  $x, y, z$  des points du plan par des polynômes homogènes en  $u, v, w$ , tels que la forme quadratique  $\varphi(x, y, z)$  devienne identique au carré d'un polynôme homogène  $f(u, v, w)$ . C'est donc transformer d'une façon rationnelle la conique  $Q$  d'équation  $\varphi = 0$  en la courbe double  $f = 0$  <sup>(2)</sup>.

Associons à  $Q$  la quadrique  $Q_3$  de l'espace  $x, y, z, X$  d'équation  $\varphi(x, y, z) - X^2 = 0$ . Il est immédiat que sa représentation paramétrique nous fournit les expressions cherchées pour  $x, y, z$ , tandis que l'expression de  $X$  donne celle de  $f$ .

Par exemple prenons  $\varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2$ . La représentation paramétrique de l'hyperboloïde  $x^2 + y^2 + z^2 - X^2 = 0$ , qui se fait en coupant par une droite variable menée par le point  $A(0, 0, 1, 1)$ , conduit aux formules :

$$(8) \quad x = 2uw, \quad y = 2vw, \quad z = u^2 + v^2 - w^2$$

et

$$X = u^2 + v^2 + w^2.$$

La transformation définie par (3) est l'une des transformations cherchées; elle rend  $\varphi \equiv (u^2 + v^2 + w^2)^2$ .

(1) Suivant les variétés

$$\begin{cases} a_1^4 = 0 \\ a_1^2 x_2 + b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_2^1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^2 = 0 \\ a_1^2 x_2 + b_1 = 0 \end{cases}$$

Le système homaloïdal est alors formé de surfaces cubiques ayant une droite double  $d$ , et qui passent par 1° deux  $Q_{n-1}$  coniques contenant  $d$  et sections d'une même  $Q_n$  conique par deux  $E_{n-1}$  passant par  $d$ ; 2° un  $E_{n-2}$  section de l'un deux par un 3°  $E_{n-1}$  contenant  $d$ .

(2) Nous excluons naturellement les correspondances dégénérées qui n'opèrent que sur  $\infty^1$  points du plan. Exemple,  $x = u^2, y = 0, z = 0$ . (Cf. GODEAUX, p. 8, Mémorial cité.)



Éclairons cela géométriquement (*fig. 1*). Le point  $m(u, v, w)$  du plan  $(xOy)$  donne par perspective de  $A$  le point  $P$  de l'hyperboloïde qui se projette en  $M(x, y, z)$ . Inversement, au point  $M$  correspondent deux points  $m, m'$  alignés avec  $O$  et conjugués par rapport à zéro et  $M$  ainsi que par rapport à la conique  $Q(\varphi = x^2 + y^2 + z^2 = 0)$ ,  $\tau$  est donc une transformation  $(1, 2)$ . Quand  $M$  est sur  $Q$ ,  $P$  et  $P'$  viennent se confondre avec  $M$ , ainsi que  $m$  et  $m'$ . La conique  $Q$  se transforme donc en elle-même comptée double.

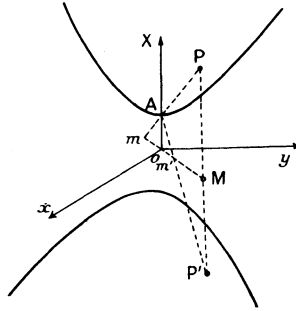


Fig. 1.

REMARQUES. — I. La Jacobienne de la transformation  $\tau$ , définie par  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 0$ , et qui est du troisième ordre, se décompose donc en cette conique et une droite ( $w = 0$ ).

II. Les transformations  $t\tau$  produit de  $\tau$  par une transformation rationnelle quelconque  $t$  transformant encore  $Q$  en courbe double. Si  $t$  est  $(1, p)$ ,  $t\tau$  est une correspondance rationnelle  $(1, 2p)$ . Une telle correspondance s'obtient par exemple quand la représentation paramétrique de la quadrique est impropre.

III. Il est clair que le problème de transformer une quadrique quelconque  $Q_p$  en quadrique double se traite exactement de la même façon, même dans le cas  $p = 1$ , ou deux points se transforment chacun en points unis <sup>(1)</sup>.

2. Transformer deux quadriques  $Q_p$  en deux cyclides doubles  $T_p$ . — Posons nous le même problème pour deux quadriques quelconques  $Q_p$ , d'équations  $\varphi = 0, \psi = 0$  dans  $E_p$ . La substitution rationnelle transforme  $\varphi$  en  $(f)^2$  et  $\psi$  en  $(g)^2$ . Associons-leur la  $B_{p+2}$  de l'espace  $(x_1, \dots, x_{p+1}, X, Y)$  d'équations  $\varphi - X^2 = 0, \psi - Y^2 = 0$ . Il est clair que sa représentation paramétrique fournit une solution par les expressions de  $x_1, \dots, x_{p+1}$ , tandis que celles de  $X$  et  $Y$  donnent les polynômes  $f$  et  $g$ . D'après la forme de ces expressions, étudiées au paragraphe 1, la transformation  $\tau$  fait correspondre aux plans  $E_{p-1}$  de l'espace  $E_p$  un réseau de dimension  $p$  de cyclides cubiques  $T_p$  ayant une quintique commune  $q_p$ , et les deux quadriques  $\varphi$  et  $\psi$  deviennent chacune une cyclide du réseau

<sup>(1)</sup> Transformation utilisée au paragraphe 3.

*comptée double*. Interprétons  $\tau$  géométriquement comme au paragraphe 1. Soit  $\Delta$  la droite de  $B_{p+2}$  qui sert à faire la représentation paramétrique, et  $D$  la droite  $x_1 = \dots = x_{p+1} = 0$ , qui ne rencontre pas  $B_{p+2}$ . Au point  $M(x)$  correspondent sur  $B_{p+2}$  les quatre points  $P$  situés dans le plan  $DM$ , puis par projection faite de  $\Delta$  quatre points  $m(u)$ .  $\tau$  est donc une transformation  $(1, 4)$ . Les quatre points  $m$  sont dans un plan  $E_2$  qui contient  $M$  et pivote autour de la trace  $d$  sur  $E_p$  de l'hyperplan  $E_3$  défini par  $\Delta D$ ; en effet, cet  $E_2$  est l'intersection avec  $E_p$  de l' $E_4$  défini par  $\Delta D$  et  $M$ . Dans  $E_2$ , qui coupe la quintique  $g_p$  en cinq points, l'empreinte de  $\tau$  est une correspondance rationnelle  $(1, 4)$  qui transforme les droites en un réseau à deux dimensions de cubiques passant par ces cinq points. Notons encore que l'involution des quatre points  $m$  homologues de  $M$  admet pour triangle diagonal  $abM$  (fig. 2), où  $a$  et  $b$  sont les projections faites des points  $A(x_1 = 0, X = 0, Y = 1)$  et  $B(x_1 = 0, X = 1, Y = 0)$  de  $D$ , car  $ABM$  est le triangle diagonal du quadrangle des quatre points  $P$ .

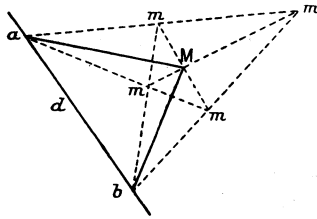


Fig. 2.

Quand à la propriété de  $\tau$  concernant la transformation de  $\varphi$  et  $\psi$  en cyclides doubles, elle s'explique par la considération du faisceau de quadriques  $\varphi - \lambda\psi = 0$ .

A chaque quadrique de ce faisceau correspondent sur  $B_{p+2}$  deux sections planes  $X = \pm\sqrt{\lambda}\psi$  variant dans le faisceau de base  $E_p$  d'une façon involutive. Il en est de même des projections qui sont deux cyclides ayant en commun la quintique  $g_p$  et l'intersection  $B_p$  des deux quadriques  $\varphi$  et  $\psi$ . Les deux cyclides viennent se confondre quand il s'agit des plans doubles  $X = 0$  et  $Y = 0$ , c'est-à-dire pour les homologues de  $\varphi$  et  $\psi$ . Leur biquadratique commune est invariante de façon qu'un de ses points  $M$  coïncide avec les quatre points  $m$  homologues, tandis qu'un point quelconque de  $\varphi$  ou  $\psi$  donne deux points distincts dont chacun représente deux points  $m$  confondus.

Signalons comme au paragraphe 1 que le produit de  $\tau$  par une transformation rationnelle  $(1, p)$  est une correspondance rationnelle  $(1, 4p)$  qui rend encore  $\varphi$  et  $\psi$  surfaces doubles. C'est le cas d'une représentation impropre de  $B_{p+2}$ .

Mentionnons aussi que la transformation simplement rationnelle  $\tau$  devient birationnelle lorsque la droite  $D$ , qui sert dans sa définition, appartient à la  $B_{p+2}$ . Elle coïncide alors avec une transformation  $t$  de la famille étudiée au paragraphe II.

Terminons enfin par l'exemple des deux quadriques

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv x^2 - y^2 + 2z^2 - t^2 = 0, \\ \psi &\equiv x^2 + y^2 + 3z^2 - 3t^2 = 0, \end{aligned}$$

à transformer en cyclides doubles. On leur associe la  $B_3$

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + 2z^2 - t^2 - X^2 &= 0, \\x^2 + y^2 + 3z^2 - 3t^2 - 2Y^2 &= 0,\end{aligned}$$

dont la représentation rationnelle obtenue à partir de la droite.

$$\Delta \begin{cases} x = y = Y, \\ z = t = X, \end{cases}$$

donne pour équations de  $\tau$

$$\begin{aligned}x &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\y &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2h^2[3uv + (v + w)(u - 2h)], \\z &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2), \\t &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)],\end{aligned}$$

avec les cyclides transformées de  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement

$$\begin{aligned}X &= -(u - 2h)(u^2 + v^2 + w^2) + u(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)] = 0, \\Y &= -3v(u^2 + v^2 + w^2) - (v + w)(u^2 - 3v^2 - 2h^2) + 2v[3uv + (v + w)(u - 2h)] = 0.\end{aligned}$$

**3. Points unis d'une transformation.** — Montrons comment le seul examen des points unis d'une des transformations simplement rationnelles  $\tau$ , donne immédiatement certaines conditions *nécessaires*, relatives à son existence et à son ordre minimum. Ces points unis ont pour lieu la jacobienne de  $\tau$ , définie par le déterminant  $\frac{D(x_i)}{D(m)} = 0$ .

Pour  $p = 1$ . — Le degré de la jacobienne d'une transformation simplement rationnelle d'ordre  $m$  sur la droite représente le nombre de ses points unis, soit :  $2(m - 1)$ . Les quatre zéros de deux formes quadratiques deviennent en général  $4m$  points, qui, s'ils étaient deux à deux unis, compteraient pour  $2m$  dans le nombre des points unis. Or celui-ci est seulement  $2m - 2$ . Il est donc impossible en général de rendre carrés parfaits deux formes quadratiques homogènes à deux variables, et cette impossibilité traduit l'irrationalité de la  $B_3$ . Cela deviendrait possible si les deux formes avaient un zéro commun; on aurait alors seulement  $\frac{3m}{2}$  points unis provenant de ces deux formes et l'inégalité  $\frac{3m}{2} \leq 2(m - 1)$  est satisfaite pour  $\boxed{m \geq 4}$ . Effectivement, les deux formes sont alors réductibles à  $xy$  et  $x(ax + by)$ ; les deux quadriques associées  $xy - z^2 = 0$  et  $x(ax + by) - t^2 = 0$  ont au point commun  $x = z = t = 0$  même plan tangent  $x = 0$ . Ce point est double dans l'intersection, qui est unicursale; sa représentation paramétrique peut s'obtenir par une transformation rationnelle de la droite rendant trois points unis; celle-ci sera par exemple le produit de deux transformations d'ordre 2, du type du paragraphe 4; la première transforme deux points en points deux à deux unis et le troisième en un couple de points que l'on peut rendre à leur tour unis

par une transformation du même type. On aura ainsi réalisé le schéma de la figure 3 pour les zéros  $A_1 A_2 A'_1 A'_2$  dont deux coïncident.

Exemple :

$$xy - z^2 = 0, \quad x(x - y) - t^2 = 0.$$

On rend  $xy(A_1 A'_1)$  carré parfait par une représentation paramétrique de  $xy - z^2 = 0$  soit  $x = X^2, y = Y^2, (z = XY)$ . Alors  $x - y(A'_2)$  devient  $X^2 - Y^2$

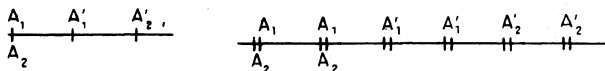


Fig. 3.

qu'on rend à son tour carré par la représentation paramétrique de  $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ , soit

$$X = u^2 + v^2, \quad Y = u^2 - v^2.$$

Par suite

$$x = (u^2 + v^2)^2, \quad y = (u^2 - v^2)^2, \quad z = u^2 - v^2, \quad t = 2uv(u^2 + v^2);$$

c'est donc une véritable méthode qui se dégage de ces remarques simples.

Lorsque  $p = 2$  une transformation rationnelle d'ordre  $m$  pour jacobienne une courbe de degré  $3(m - 1)$ ; les transformées, supposées doubles, de deux coniques, comptent pour le degré  $2m$ ; ce qui entraîne la condition  $3(m - 1) \geq 2m$  ou  $m \geq 3$ . Il n'y a plus cette fois d'impossibilité, et la transformation d'ordre minimum est cubique, comme celle qui a été trouvée au paragraphe 2.

Enfin quand  $p > 2$  l'inégalité obtenue s'écrit  $(p + 1)(m - 1) \geq 2m$  ou  $m \geq 1 + \frac{2}{p-1}$ ;  $m$  étant entier elle équivaut à  $m \geq 2$  mais rien ne prouve qu'il existe en général des transformations d'ordre 2 répondant à la question. La condition  $m \geq 2$ , qui est nécessaire, est peut-être trop large; il paraît déjà remarquable que les transformations  $\tau$  du paragraphe 2, qui sont du troisième ordre, résolvent le problème. Celui-ci, d'ailleurs, s'il est résolu par la représentation rationnelle d'une  $B_{p-2}$ , n'exige qu'une représentation unicursale, même impropre <sup>(1)</sup>, de cette variété. Il équivaut donc à la rationalité dans le cas  $p = 1$  (théorème de Lüroth),  $p = 2$  (théorème de Castelnuovo sur la rationalité des involutions du plan), mais cela n'est déjà plus vrai pour  $p = 3$  [ENRIQUES, *Sopra un' involuzione non razionale dello spazio (Acad. Lincei, 1912)*].

Les considérations précédentes sur la jacobienne d'une transformation simplement rationnelle qui rend deux quadriques surfaces doubles, se vérifient facilement pour le cas des solutions  $\tau$  du paragraphe 2; leur jacobienne comprend comme parties les deux cyclides transformées de  $\varphi$  et  $\psi$ . Quand  $p = 2$  ce sont deux

<sup>(1)</sup> Cette idée suggère la solution de problèmes parallèles tels que : transformer par substitution simplement rationnelle une surface cubique de l'espace ordinaire  $\varphi = 0$  en surface triple  $(f)^3 = 0$ . On y arrive par une représentation paramétrique impropre de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions  $\varphi - \lambda^3 = 0$ .

cubiques qui la constituent entièrement; pour  $p > 2$  l'expression  $Q$  figure dans son équation à la puissance  $p - 2$ ; elle y compte donc pour l'ordre  $2(p - 2)$ , et les deux cyclides pour 6, soit en tout  $2(p + 1)$ , c'est-à-dire que ces surfaces la forment entièrement.

## CHAPITRE II.

### Extension au cas de $r$ hyperquadriques.

Si l'on veut étendre les résultats du chapitre I, qui proviennent de la rationalité de l'intersection de deux hyperquadriques, il faut d'abord se demander si la variété commune à  $r$  hyperquadriques de l'espace  $E_n$  est rationnelle. J'avais trouvé une réponse satisfaisante à cette question en même temps qu'elle paraissait dans une note de L. Gauthier<sup>(1)</sup> sous la forme suivante :

« L'intersection de  $r$  hyperquadriques quelconques d'un espace  $E_n$  à  $n$  dimensions est certainement rationnelle pour  $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$ . La rationalité provient dans ce cas de l'existence d'un  $E_{r-1}$  sur l'intersection : un point  $M$  variable sur celle-ci est en correspondance birationnelle avec la trace  $N$  dans un  $E_p$  ( $p = n - 2$ ) de l' $E_r$  défini par  $E_{r-1}$  et  $M$ . »

Il suffit par exemple  $n \geq 4$ , comme on l'a vu au chapitre I, pour assurer la rationalité d'une  $B_n$ ; il suffit  $n \geq 8$  pour la rationalité de l'intersection de trois hyperquadriques.

Comme en définitive les conséquences que nous en tirons sont relatives à l'espace des paramètres  $E_p$ , on ne peut se contenter de l'affirmation de la rationalité; une étude précise de la représentation rationnelle elle-même est nécessaire : paragraphe I. Les méthodes employées sont inspirées du chapitre I; les notations s'en déduisent en règle générale par l'addition de l'indice  $r$ , qui vaut implicitement deux dans le chapitre I : par exemple une  $B_n^r$  représente la variété commune à  $r$  hyperquadriques de l'espace à  $n$  dimensions, de même qu'une  $B_n$  ou  $B_n^2$  désigne la biquadratique intersection de deux hyperquadriques de  $E_n$ . Toutes précisions utiles sont d'ailleurs données en cours de route, et cette notation remplace avantageusement, sans l'exclure, la notation  $V_{n-r}^r$ , moins précise et plus compliquée.

Sauf indication contraire, nous avons supposé dans ce premier paragraphe la dimension  $n$  de l'espace supérieure ou égale à la valeur limite  $l = \frac{r(r+3)}{2} - 1$  qui assure la rationalité de la  $B_n^r$  grâce à l'existence d'un  $E_{r-1}$  situé sur elle. Dans le deuxième paragraphe j'examine le cas  $n < l$  avec l'hypothèse d'un  $E_{r-1}$  contenu dans la  $B_n^r$ ; les résultats sont plus variés qu'au chapitre I ( $l = 4$ ) où se présentait seulement la décomposition d'une biquadratique en cubique gauche accompagnée d'une corde; ici la variété  $B_n^r$  ayant un  $E_{r-1}$  se trouve décomposée pour  $n \leq 2r - 1$ , et son étude est indispensable pour celle des transformations birationnelles  $t_r$  qui font avec les transformations rationnelles  $\tau_r$  l'objet du paragraphe III.

---

(1) L. GAUTHIER, *Rationalité de l'intersection de  $p$  hyperquadriques dans l'espace  $S_r$  à  $r$  dimensions* (Bulletin Soc. Roy. Sc., Liège, 13, p. 191, 1944).

I. — REPRÉSENTATION RATIONNELLE DE L'INTERSECTION DE  $r$  HYPERQUADRIQUES  
DE L'ESPACE  $E_n$  ( $n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1$ ).

*a. Équations paramétriques.* — Il vient d'être rappelé comment on obtient la représentation rationnelle à partir d'un  $E_{r-1}\Delta$  situé sur la  $B_n^r$ . Précisons d'une façon analytique, en choisissant  $r$  sommets du repère projectif dans l' $E_{r-1}\Delta$  ( $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-r+1} = 0$ ). Les  $r$  quadriques sont alors définies par les équations

$$(1) \quad a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^r X_r + b_i = 0,$$

où  $i = 1, 2, \dots, r$ , les  $a_i^j$  étant des formes linéaires en  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ , et les  $b_i$  des formes quadratiques des mêmes variables. Lorsque le déterminant du système (1), linéaire en  $X_1 \dots X_r$ , n'est pas identiquement nul, on peut résoudre :

$$X_1 = \frac{A_1}{B}, \quad X_2 = \frac{A_2}{B}, \quad \dots, \quad X_r = \frac{A_r}{B}$$

en posant

$$(2) \quad B = | a_i^1 \quad a_i^2 \quad \dots \quad a_i^r |$$

et en désignant par  $A_i$  le mineur tiré du tableau des coefficients de (1) par suppression de la colonne  $i$ . Il suffit de prendre comme paramètres homogènes de la représentation rationnelle les coordonnées  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$  ( $p = n - r$ ) d'un point  $N$  quelconque de l'espace  $E_p$  défini par les coordonnées  $x_1 x_2 \dots x_{p+1}$ , pour obtenir après multiplication par  $B$  les équations paramétriques suivantes :

$$(3) \quad x_1 = u_1 B, \quad x_2 = u_2 B, \dots, x_{p+1} = u_{p+1} B, \quad X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2, \dots, X_r = A_r,$$

$B$  est d'après (2) une forme d'ordre  $r$  en  $u_1 \dots u_{p+1}$ , et les  $A_i$  des formes d'ordre  $r+1$ .

Du point de vue géométrique le point  $N(u)$  est la projection sur  $E_p$ , faite de  $\Delta$ , du point  $M(x)$ .

*b. Cas particulier.* — Lorsque  $B$  est identiquement nul, les  $a_i^j$  peuvent être reliés :

1° soit par une combinaison linéaire des colonnes

$$\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \dots + \lambda_r a_i^r \equiv 0,$$

à coefficients  $\lambda$  constants et non tous nuls, grâce à laquelle les équations (1) s'écrivent ( $\lambda_r \neq 0$ )

$$a_i^1 (X_1 + \mu_1 X_r) + a_i^2 (X_2 + \mu_2 X_r) + \dots + a_i^{r-1} (X_{r-1} + \mu_{r-1} X_r) + b_i = 0,$$

par le changement de repère dans l' $E_{r-1}\Delta$  :

$$X_1 + \mu_1 X_r = Y_1, \quad X_2 + \mu_2 X_r = Y_2, \dots, X_{r-1} + \mu_{r-1} X_r = Y_{r-1}.$$

On vérifie que la  $B_n^r$  est l'intersection de  $r$  cônes ayant leur sommet commun dans  $\Delta$ ; c'est elle-même un cône dont la base est une  $B_{n-1}^r$ . Sa rationalité n'est plus assurée.

2° soit par une combinaison linéaire des colonnes

$$\lambda_1 a_1^r + \lambda_2 a_2^r + \dots + \lambda_r a_r^r = 0,$$

à coefficients constants et non tous nuls, d'où l'on déduit

$$b_r = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_r b_r = 0,$$

pour l'une des quadriques contenant la  $B_n^r$ . Cette quadrique est un cône de sommet  $E_{r-1}$ , dont la représentation rationnelle permet d'obtenir celle de la  $B_n^r$ , à condition que le système (1) soit de rang  $r-1$ , c'est-à-dire qu'il existe un déterminant d'ordre  $r-1$  non identiquement nul tiré des coefficients  $a_i^r$ . S'il n'en est pas ainsi, si le rang du système est seulement  $r-2$ , deux des équations (1), par exemple les deux dernières, pourront être remplacées par

$$b_{r-1} = 0, \quad b_r = 0.$$

Dans l'espace  $E_p$  ces deux quadriques ont une intersection rationnelle en général, ce qui entraîne la rationalité de la  $B_n^r$ ; il y a exception pour le cas où l'hyperbiquadratique est un cône non rationnel (1).

Poursuivant le même raisonnement on arrive à supposer le rang du système (1) égal à 1. L'intersection  $B_n^r$  se trouve alors définie par

$$\begin{aligned} a_1^r x_1 + a_1^r x_2 + \dots + a_1^r x_r + b_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, \quad b_3 = 0, \dots, \quad b_r = 0. \end{aligned}$$

Dans  $E_p$  les  $r-1$  quadriques  $b'$  ont en général une intersection rationnelle; il faut pour le vérifier montrer que la dimension  $p = n - r$  est supérieure ou égale à la valeur limite  $l'$  relative à  $r-1$ . Or

$$l' = \frac{(r-1)(r+2)}{2} - 1 \quad \text{et} \quad p = n - r = \frac{r(r+1)}{2} - 1.$$

La condition  $p > l'$  est remplie si

$$r(r+1) > (r-1)(r+2),$$

ce qui est vérifié. Pourtant la rationalité n'est pas assurée quand l'intersection des  $r-1$  quadriques est un cône non rationnel, ce qui n'implique pas que la  $B_n^r$  elle-même fût un cône.

On voit ainsi apparaître une nouvelle circonstance pour laquelle une  $B_n^r$  n'est pas à coup sûr rationnelle même si le nombre  $n$  des dimensions de l'espace où elle se trouve est suffisamment grand. Elle exige, comme on vient de le voir, que deux au moins des quadriques qui contiennent  $B_n^r$  soient des cônes de sommet  $E_{r-1}$  commun  $\Delta$ .  $\Delta$  est alors sur  $B_n^r$  d'un ordre de multiplicité supérieur à 2.

---

(1) Sa base est alors une biquadratique ordinaire sans point double (Chap. I, § 1).

Donc :

Toute  $B_n^r$  est certainement rationnelle pour  $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$  sauf peut-être dans l'un des deux cas suivants :

- 1° la  $B_n^r$  est un cône;
- 2° la  $B_n^r$  admet  $\Delta$  comme  $E_{r-1}$  multiple d'ordre supérieur à 2.

S'il m'a semblé nécessaire d'ajouter ces précisions sur la rationalité d'une  $B_n^r$ , ce n'est pas elles pourtant que je veux mettre en lumière, mais le fait que la représentation rationnelle peut toujours s'obtenir par les équations (3). Ce fait résulte aussi de ce qui précède, sauf dans le cas du cône rationnel, et les cas rationnels où  $\Delta$  est multiple. Je peux donc énoncer le résultat suivant :

Toute  $B_n^r$  non conique et dépourvue d'un  $E_{r-1}$  double (1) est rationnelle pour  $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$ , et sa représentation rationnelle peut toujours s'effectuer d'après les équations (3).

Celles-ci permettent l'étude facile de la représentation rationnelle, que nous poursuivons maintenant.

c. *Images des sections planes.* — Elles varient, d'après (3), dans un système linéaire de variétés d'ordre  $r+1$  ayant en commun l'intersection des surfaces

$$B = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \dots, A_r = 0.$$

Ses équations s'obtiennent donc en annulant la matrice à  $r+1$  lignes et  $r+1$  colonnes

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^r & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^r & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r^1 & a_r^2 & \dots & a_r^r & b_r \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{q_p^r}$$

Cette variété constitue l'intersection résiduelle de la variété d'ordre  $r$  d'équation  $B = 0$ , avec la variété d'ordre  $r+1$  d'équation  $A_1 = 0$ , en dehors d'une variété déjà commune d'équation

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^r \\ a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r^2 & a_r^3 & \dots & a_r^r \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{L_p^r}$$

La détermination de l'ordre des variétés (4) et (5) se fait immédiatement d'après un calcul de Salmon (2) sur l'ordre d'un tableau dont les éléments sont des

(1) Dans le cas où  $\Delta$  est double sur l'une des quadriques qui contiennent  $B_n^r$ , cas où l'une des équations se réduisent à  $b_p = 0$ , la représentation rationnelle ne s'obtient pas à partir de celle de  $b_p = 0$  sous la forme (3). On pourrait l'y ramener à partir d'un autre  $E_{r-1}$  situé sur  $B_n^r$ ; quand on coupe celle-ci par un  $E_r$  contenant  $\Delta$  il faudrait pour obtenir un deuxième  $E_{r-1}$  que le système (1) se réduise à une quadrique; cela exige pour le point N dans  $E_{p,r(r-2)+1}$  conditions.

Pour  $p = l - r = \frac{r(r+1)}{2} - 1$  elles ne peuvent être satisfaites que si  $\frac{r(r+1)}{2} - 1 \geq r(r-2) + 1$  ou  $(r-1)(r-4) \leq 0$ , soit pour  $r = 1, 2, 3, 4$ . Donc : Lorsqu'une  $B_n^r$  admet un  $E_{r-1}$  double  $\Delta$  il existe, pour  $n \geq l$  et quand  $r$  ne dépasse pas 4, d'autres  $E_{r-1}$  sur  $B_n^r$  incidents à  $\Delta$  suivant un  $E_r$ .

(2) SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 415.



polynomes par rapport aux variables : la variété (4) généralisant la quintique  $q_p$  est une variété à  $p - 2$  dimensions, d'ordre  $\frac{r(r+3)}{2}$ . Je la désigne par  $q'_p$ . La variété (5) est à  $p - 2$  dimensions et son ordre (Salmon) vaut  $\frac{r(r-1)}{2}$ , elle généralise un  $E_{p-2}$  du cas  $r = 2$ , je la désigne par  $L'_p$ . Toute variété  $V_{p-1}^{r-1}$  dont l'équation peut prendre la forme

$$(6) \quad | a_i^2 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^r \ bi | = 0 \quad \boxed{T'_p}$$

et qui généralise par conséquent la cyclide  $T_p$ , sera désignée par  $T'_p$ . Je vais montrer que l'image d'une section hyperplane quelconque de la  $B'_n$

$$X_r = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + \dots + \lambda^{r-1} X_{r-1} + B_1,$$

où  $B_1$  est une forme linéaire en  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ , et les  $\lambda^i$  des constantes, constitue une variété  $T'_p$ ; il suffit de remplacer dans (1)  $X_r$  par son expression; on obtient alors comme équation de l'image

$$| a_i^1 + \lambda^1 a_i^r, \quad a_i^2 + \lambda^2 a_i^r, \dots, a_i^{r-1} + \lambda^{r-1} a_i^r, \quad b_i + B_1 a_i^r | = 0$$

qui est bien une variété  $T'_p$ . Elle contient la  $q'_p$  et recoupe la variété  $B = 0$  suiv an une  $L'_p$  d'équation :

$$\| a_i^1 + \lambda^1 a_i^r, \quad a_i^2 + \lambda^2 a_i^r, \dots, a_i^{r-1} + \lambda^{r-1} a_i^r \| = 0$$

Ces notations admises, on vient ainsi de prouver que :

*Les images des sections hyperplanes d'une  $B'_n$  forment dans  $E_p$  un système linéaire complet de variétés  $T'_p$  de dimensions  $p - 1$  et d'ordre  $r + 1$ , ayant une variété commune  $q'_p$ , de dimension  $p - 2$  et d'ordre  $r(r + 3)$ .*

Parmi elles s'en trouvent  $\infty^r$  décomposées en un  $E_{p-1}$  et la variété  $V_{p-1}^{r-1}$  d'équation

$$(7) \quad | a_i^1 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^r | = 0 \quad \boxed{V_{p-1}^{r-1}}$$

qui contient la  $q'_p$ , de même que la quadrique  $Q$  passait par la quintique pour  $r = 2$ . Ces images décomposées correspondent aux hyperplans  $E_{n-1}$  passant par l' $E_{r-1} \Delta$ . Un point  $N$  de  $V_{p-1}^{r-1}$  est la projection d'un point sur  $B'_n$  infiniment voisin de  $\Delta$ . Il y a en effet impossibilité du système (1) pour les coordonnées de ce point  $N$ , donc aucun point de  $B'_n$  en dehors de  $\Delta$  dans l' $E_r \Delta N$ ; quand se produit l'indétermination, exprimée par les équations (4) de  $q'_p$ , on est en présence d'une droite de  $B'_n$  rencontrant  $\Delta$ . Chaque point de  $q'_p$  est donc la projection d'une droite incidente à  $\Delta$  : on s'explique ainsi que la variété  $q'_p$  figure comme base du système linéaire image des sections planes. Dans le cas  $p = l - r$ , c'est-à-dire  $n = l$ , il ne saurait y avoir dans le système (1) d'indétermination suffisante pour entraîner l'existence d'un deuxième  $E_{r-1}$  de la  $B'_n$  rencontrant le premier suivant un  $E_{r-2}$ ; il faudrait en effet que le tableau des coefficients de (1), les  $b_i$  compris, ait toutes ses lignes proportionnelles, ce qui exige  $r(r - 1)$

conditions algébriques dans l'espace à  $p = \frac{r(r+1)}{2} - 1$  dimensions. Or l'inégalité

$$\frac{r(r+1)}{2} - 1 \geq r(r-1)$$

s'écrit

$$(r-1)(r-2) \leq 0.$$

Elle n'est vérifiée que pour  $r=2$  ( $r=1$  est sans intérêt). Donc,

*Quand  $n=l$ , c'est-à-dire quand le nombre des  $E_{r-1}$  communs à  $r$  hyperquadriques de  $E_n$  est fini et non nul, il n'en existe pas deux qui soient incidents suivant un  $E_{r-2}$ , sauf pour  $r=2$  (1).*

*d. Exemples et propriétés.* —  $r=1$ . Cas banal de la représentation rationnelle d'une hyperquadrique, d'une quadrique, ou d'une conique. La représentation rationnelle s'effectue dans  $E_p$  par des quadriques  $Q_p$  ayant une  $Q_{p-1}$  commune ( $a_1=0, b_1=0$ ). Donc

$$V_{p-1}^1 = E_{p-1}, \quad T_p^1 = Q_p, \quad q_{p-1} = Q_{p-1}.$$

$r=2$  — Cas traité au chapitre I ( $l=4$ ).

$r=3$  — ( $l=8$ ). La représentation rationnelle de l'intersection de trois hyperquadriques d'un espace à huit dimensions au moins

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + a_i^3 X_3 + b_i = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

se fait dans  $E_p$  ( $p \geq 5$ ) par des variétés à  $p-1$  dimensions d'ordre 4 désignées par  $T_p^4$ , ayant en commun l'intersection résiduelle de l'une d'elles

$$T_p^4 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & b_1 \\ a_2^2 & a_2^3 & b_2 \\ a_3^2 & a_3^3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

avec la variété à  $p-1$  dimensions, d'ordre 3, d'équation

$$V_{p-1}^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

en dehors de la  $V_{p-2}^3$  définie par

$$L_p^3 \left\| \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} \right\| = 0.$$

(1) La configuration des  $E_{r-1}$  communs à  $r$  hyperquadriques pour  $n=l$ , ne généralise donc pas celle des droites communes à deux hyperquadriques de l'espace à quatre dimensions ( $r=2, p=2$ , Chap. I). Cependant j'ai montré précédemment (Chap. II, § 1-2 en note) comment les valeurs d'exception pour  $r$  comprennent aussi trois et quatre, pour un  $E_{r-1}$  double sur la  $B_r^1$ .

Cette variété, base du système linéaire, est à  $p-2$  dimensions et d'ordre  $g$ ; ses équations s'écrivent :

$$q_p^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les remarques suivantes permettent de mieux saisir les rapports mutuels de ces différentes variétés. Tout d'abord, il est clair que les deux variétés à  $p-2$  dimension  $q_p^3$  et  $L_p^3$  sont *complémentaires* <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire qu'elles forment l'intersection totale de deux variétés à  $p-1$  dimensions ( $T_p^4$  et  $V_{p-1}^3$ ). De plus  $L_p^3$  est complémentaire de l' $E_{p-2}$  d'équations

$$a_1^1 = 0, \quad a_1^2 = 0$$

(qui est un  $L_p^2$ ). Il en résulte que

La variété  $q_p^3$  se déduit <sup>(1)</sup> d'un  $E_{p-2}$ , et que la suite de variétés  $E_{p-2}$ ,  $L_p^3$ ,  $q_p^3$  forment une *chaîne* <sup>(1)</sup>.

Il en va de même pour  $r > 3$ , où la suite  $L_p^2$ ,  $L_p^3$ , ...,  $L_p^r$ ,  $q_p^r$  forment encore une chaîne.

La variété  $V_{p-1}^r$  d'équation (7) généralise la quadrique  $Q_p$  rencontrée pour  $r=2$ . C'est un lieu d' $E_{p-r}$  à  $r-1$  paramètres, d'équations

$$(8) \quad \lambda_1 a_1^i + \lambda_2 a_2^i + \dots + \lambda_r a_r^i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r).$$

Un tel  $E_{p-r}$ , par exemple  $a_i^1 = 0$ , rencontre  $q_p^r$  suivant la section par  $A_1 = 0$ , c'est-à-dire une  $T_{p-r}^r$ . Il joue le rôle d'une corde trisécante pour la quintique gauche de genre 2. Un  $E_{p-r}$  de l'autre système (tel que  $a_1^1 = 0$ ,  $a_1^2 = 0$ , ...,  $a_1^r = 0$ ) rencontre  $q_p^r$  suivant une quadrique  $Q_{p-r}$  (telle que la section par  $b_1 = 0$ ).

Toute  $V_{p-1}^r$  d'équation (7) est rationnelle pour  $p \geq r$  <sup>(2)</sup>.

En effet, si  $p=r$ , on peut dans les équations (8) qui définissent les coordonnées du point générique exprimer birationnellement les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$  en fonction des  $p$  paramètres homogènes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Quand  $p > r$  il suffit d'ajouter aux paramètres précédents  $p-r$  coordonnées  $x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{p+1}$  pour résoudre en  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ .

C'est ainsi qu'on obtient pour  $p=r=3$  la surface cubique de l'espace, qui ne se présente pas cette fois comme une cyclide cubique; c'est pour  $p=4$  une variété cubique à trois dimensions qui admet pour points doubles ceux qui annulent tous les mineurs du deuxième ordre tirés du déterminant qui est au premier membre de son équation <sup>(3)</sup>. A partir de  $p=9$ , l' $E_{p-6}$  défini par  $a_i^j = 0$

<sup>(1)</sup> Définition donnée par P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques (Actualités Scientifiques et Industrielles, 1935, p. 23)*.

<sup>(2)</sup> La définition, par leurs équations, des différentes variétés rencontrées :  $V_{p-1}^r$ ,  $T_p^r$ ,  $q_p^r$ ,  $L_p^r$ , est naturellement valable quel que soit  $p$ , qui peut être, comme dans cet énoncé, inférieur à  $l-r$ .

<sup>(3)</sup> Soit six points doubles, d'après un résultat de Segre (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. 9, 1900, série 2, p. 253).

a tous ses points multiples d'ordre 3 sur la  $V_{p-1}^3$  qui se réduit donc à un cône rationnel du troisième ordre de sommet  $E_{p-1}$ .

Il en est de même pour  $r$  quelconque; la variété  $V_{p-1}^r$  devient un cône rationnel d'ordre  $r$  lorsque  $p \geq (r)^2$ , qui a pour sommet l' $E_{p-(r)}$  défini par

$$a_j^i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

La propriété caractéristique d'une  $V_{p-1}^r$  d'équation (7) est de contenir une variété  $L_p^r$ . Nous allons dire maintenant quelques mots de cette dernière.

Rappelons qu'elle est définie par son équation de la forme (5), qu'elle est à  $p-2$  dimensions et que son ordre vaut  $\frac{r(r-1)}{2}$ . Luc Gauthier la rencontre pour  $p=r$  dans sa thèse (2) sur les congruences linéaires de droites d'un hyper-espace, comme focale propre  $\Omega_r$  d'une congruence linéaire de droites dans l'espace  $E_r$ . Il démontre sa rationalité en la transformant en un  $E_{r-2}$  par une transformation birationnelle de tout l'espace  $E_r$ . Je vais établir directement le théorème plus général :

*Toute  $L_p^r$ , d'équation (5), est rationnelle pour  $p \geq r$ .*

En effet  $L_p^r$  peut s'interpréter comme lieu dans  $E_p$  de l' $E_{p-r}$  commun aux  $r$  plans

$$\lambda_2 a_i^2 + \lambda_3 a_i^3 + \dots + \lambda_r a_i^r = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

quand  $p=r$  on peut exprimer birationnellement les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$  en fonction des  $p-1$  paramètres homogènes  $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Quand  $p > r$  il suffit d'ajouter aux paramètres précédents  $p-r$  coordonnées  $x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{p+1}$  pour avoir une expression birationnelle de toutes les coordonnées en fonction de  $p-1$  paramètres homogènes (1).

La représentation rationnelle pour  $p=r$  se fait comme celle de Luc Gauthier, par un système linéaire de  $V_{r-3}^r$  qui ont une variété  $L_{r-2}^r$  commune.

Poursuivant l'examen des variétés rencontrées dans la représentation rationnelle d'une  $B_n^r$  nous arrivons aux variétés  $T_p^r$  qui généralisent pour  $r$  quelconque les cyclides cubiques du cas  $r=2$ . Elles sont à  $p-1$  dimensions, et d'ordre  $r+1$ ; leur équation, par définition, peut se mettre sous la forme (6). J'indique d'abord quelques propriétés caractéristiques indépendantes de la dimension  $p$  de l'espace où elles se trouvent.

1° Une  $T_p^r$  est dans  $E_p$  une variété, à  $p-1$  dimensions, d'ordre  $r+1$ , qui contient une  $q_p^r$ .

(Cf. Une cyclide cubique  $T_p$  est une  $V_{p-1}^3$  qui passe par une quintique  $q_p$ .)

(2) Paris, 1944, Chapitre V, p. 94.

(1) Dans le cas  $p=r$  la rationalité de  $L_p^r$  entraîne celle de  $V_{p-1}^r$ , car un point de  $V_{p-1}^r$  est en correspondance birationnelle avec une droite de la congruence linéaire définie par  $L_p^r$ : une droite de cette congruence s'appuie sur  $L_p^r$  en  $r-1$  points (Gauthier) et ne coupe  $V_{p-1}^r$ , qui est d'ordre  $r$ , qu'en un point variable en dehors de  $L_p^r$ . Inversement par un point de  $V_{p-1}^r$  ne passe qu'une droite de la congruence puisque celle-ci est linéaire.

2° Une  $T_p^r$  est dans  $E_p$  une  $V_{p-1}^{r+1}$  qui contient une  $q_p^{r-1}$ . — Celle qui a pour équation (6) contient en effet la  $q_p^{r-1}$  définie par le tableau :

$$\| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r \quad b_i \| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

(Cf. Une cyclide cubique  $T_p$  est une  $V_{p-1}^3$  qui passe par une quadrique  $Q_{p-1}$ .)

3° Une  $T_p^r$  est dans  $E_p$  une  $V_{p-1}^{r+1}$  qui contient une  $L_p^r$ . — Celle qui a pour équation (6) contient en effet la variété  $L_p^r$  définie par le tableau :

$$\| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r \| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

(Cf. Une cyclide cubique  $T_p$  est une  $V_{p-1}^3$  qui passe par un  $E_{p-2}$ .)

Cette variété  $L_p^r$  constitue avec la variété  $q_p^{r-1}$  de la propriété précédente l'intersection complète de  $T_p^r$  avec la variété  $V_{p-1}^{r-1}$  d'équation  $| a_i^2 \quad a_i^3 \quad \dots \quad a_i^r | = 0$  où ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ), en accord avec le théorème de Bezout généralisé

$$(r-1)(r+1) = \frac{(r-1)(r+2)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Il s'agit pour  $r = 2$  de la section décomposée d'une cyclide cubique par l' $E_{p-1}$  de l'une de ses quadriques  $Q_{p-1}$ . Enfin toute  $V_{p-1}^{r-1}$  passant par  $L_p^r$  recoupe la variété  $T_p^r$  suivant une  $q_p^{r-1}$ , ces variétés  $V_{p-1}^{r-1}$  forment un système linéaire à  $r-1$  paramètres

$$| \lambda_i, a_i^2, a_i^3, \dots, a_i^r | = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

où les  $\lambda_i$  sont  $r$  constantes.

4° Une  $T_p^r$  est la projection sur un  $E_p$  d'une section hyperplane de l'intersection  $B_n^r$  de  $r$  hyperquadriques d'un espace à  $n = p + r$  dimensions, projection faite d'un  $E_{r-1}$  situé sur la  $B_n^r$ .

Associons à la  $T_p^r$  d'équation (6) la  $B_n^r$  d'équations (1) dans l' $E_{p+r}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, X_1, X_2, \dots, X_r)$ . La  $T_p^r$  se présente alors comme la projection dans  $E_p$  de la section par  $X_1 = 0$ , projection faite à partir de l' $E_{r-1}, x_1 = x_2 = \dots = x_{p+1} = 0$  situé sur  $B_n^r$ .

Inversement toute projection sur un  $E_p$  faite suivant les conditions de l'énoncé, donne une variété  $T_p^r$ , comme je l'ai montré dans la représentation rationnelle d'une  $B_n^r$  au paragraphe c.

5° Une  $T_p^r$  est la projection sur un  $E_p$  de l'intersection  $B_{n-1}^r$  de  $r$  hyperquadriques d'un espace à  $n-1 = p + r - 1$  dimensions, projection faite à partir d'un  $E_{r-2}$  situé sur la  $B_{n-1}^r$ .

(Cf. Une cyclide cubique  $T_p$  est la projection sur un  $E_p$  de l'intersection  $B_{p+1}$  de deux hyperquadriques de  $E_{p+4}$ , faite d'un point  $O$  appartenant à la  $B_{p+4}$ .)

L'équation (6) résulte en effet de l'élimination de  $X_2, X_3, \dots, X_r$  entre les  $r$  équations

$$a_i^2 X_2 + a_i^3 X_3 + \dots + a_i^r X_r + b_i = 0$$

qui sont celles de  $r$  quadriques de l'espace  $E_{p+r-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, X_2, X_3, \dots, X_r)$  ayant en commun l' $E_{r-2}, x_1 = x_2 = \dots = x_{p+1} = 0$ .

Inversement toute projection faite suivant les conditions de l'énoncé peut se traduire analytiquement par ce calcul.

On déduit de la propriété 5 ou 4 une conséquence intéressante, mais qui dépend cette fois de la valeur de  $p$  :

6° Toute hypersurface  $T_p^r$  est rationnelle pour  $p \geq \frac{r(r+1)}{2}$ .

(Cf. Une cyclide cubique  $T_p$  est rationnelle pour  $p \geq 3$ .)

D'après la propriété 4, une  $T_p^r$  se trouve en correspondance birationnelle avec la section hyperplane de l'intersection de  $r$  hyperquadriques de  $E_{p+r}$ , c'est-à-dire avec l'intersection de  $r$  hyperquadriques de  $E_{p+r-1}$ . Or, celle-ci est rationnelle puisque

$$p + r - 1 \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1 = l.$$

Cela résulte aussi de la propriété 5. La  $B_{n-1}^r$  peut être considérée comme l'intersection d'une quadrique avec une  $B_{n-1}^{r-1}$  passant par l' $E_{r-2}$ . La correspondance par projection de l' $E_{r-2}$  s'identifie avec une représentation rationnelle de  $B_{n-1}^{r-1}$ , elle établit donc une correspondance birationnelle entre  $B_{n-1}^r$  et  $T_p^r$ . Or  $B_{n-1}^r$  est rationnelle pour  $n-1 \geq l$  ou  $p+r-1 \geq l$ , ce qui est vérifié d'après l'hypothèse sur  $p$ .

On peut en déduire la représentation rationnelle d'une  $T_p^r$ , par l'intermédiaire de la représentation rationnelle de la  $B_{n-1}^r$  sur un  $E_{p-1}$ . Cette dernière s'effectue par projection faite d'un  $E_{r-1}$  de la  $B_{n-1}^r$ . Cherchons alors l'homologue d'une section de la  $T_p^r$  par un  $E_{p-1}$ , elle donne sur  $B_{n-1}^r$  une section par un hyperplan qui contient  $E_{r-2}$ , puis par projection faite de l' $E_{r-1}$  sur  $E_{p-1}$  une variété  $T_{p-1}^r$  qui contient un  $E_{r-2}$  fixe, ainsi qu'une variété  $q_{p-1}^r$ ; cet  $E_{r-2}$  coupe la  $q_{p-1}^r$  suivant une variété  $V_{r-3}^r$ , comme on va le voir au paragraphe II (c). Donc :

*La représentation rationnelle d'une  $T_p^r$  peut toujours s'effectuer dans  $E_{p-1}$  par  $p+1$  variétés  $T_{p-1}^r$  ayant en commun une variété  $q_{p-1}^r$  ainsi qu'un  $E_{r-2}$  qui s'appuie sur elle suivant une  $V_{r-3}^r$ .*

7° Une variété  $T_p^r$  admet des points multiples d'ordre  $r$  pour  $p \geq r^2$ .

Pour la  $T_p^r$  d'équation (6), ce sont ceux dont les coordonnées vérifient les  $r^2$  équations

$$a_i^2 = a_j^2 = \dots = a_r^2 = b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Les dérivées partielles d'ordre  $r-1$ , prises sous la forme d'une somme de déterminants, s'annulent en effet pour les coordonnées d'un de ces points, qui se trouvent répartis sur une  $B_{p-(r-1)r}^r$ .

L'existence d'un point multiple d'ordre  $r$  entraîne évidemment la rationalité de  $T_p^r$ , qui est d'ordre  $r+1$ , de sorte que la propriété 6 garde surtout son intérêt pour les valeurs de  $p$  comprises entre  $\frac{r(r+1)}{2}$  et  $r^2$ , limite inférieure incluse, soit  $p = 3$  pour  $r = 2$ , cas de la cyclide cubique;  $p = 6, 7, 8$  pour  $r = 3$ , cas de la  $T_p^3$  d'ordre 4.

On tire de  $\tau$  la propriété suivante, concernant la variété  $q_p^r$  :

8° La variété  $q_p^r$  admet des points multiples d'ordre  $\frac{r(r+1)}{2}$  pour  $p \geq r(r+1)$ .  
Ce sont ceux dont les coordonnées vérifient

$$a_j^i = 0, \quad b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Un  $E_2$  quelconque passant par l'un de ces points O, qui est multiple d'ordre  $r$  pour la  $V_{p-1}^r$  et pour la  $T_p^r$ , coupe la première variété suivant  $r$  droites issues de O et la deuxième suivant une courbe d'ordre  $r+1$  admettant O pour point  $r$ -uple, donc  $q^r$  en  $r$  points seulement différents de O. C'est donc que celui-ci en absorbe  $\frac{r(r+3)}{2} - r = \frac{r(r+1)}{2}$ . Ces points multiples O sont répartis sur une  $B_{p-r,2}^r$  située dans l'espace linéaire sommet de  $V_{p-1}^r$ ,

## II. — CAS $n < l$ .

Il n'y avait à signaler, pour  $r=2$  et  $n < 4$ , que la décomposition d'une biquadratique en une cubique gauche et l'une de ses cordes, au cas où l'on impose l'existence d'une droite sur la  $B_3$ . On pourrait ajouter, quand  $n=2$ , la décomposition mixte en une droite et un point.

Prenons maintenant trois hyperquadriques ( $r=3, l=8$ ) dans un espace à moins de huit dimensions. La présence d'un  $E_2$  sur l'intersection n'étant plus assurée, il nous faut la supposer, elle entraîne la rationalité; la variété correspondante est décomposée suivant  $E_2$  et :

1° Un point pour  $n=3$ ;

2° Une courbe rationnelle normale d'ordre 4 pour  $n=4$ , trisécante à  $E_2$ .

Coupons en effet la courbe, d'équation (1) par un  $E_3$  quelconque

$$X_3 = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + B_1,$$

où  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$  sont des constantes et  $B_1$  une forme linéaire en  $x_1$  et  $x_2$ . On obtient en portant dans (1)

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire quatre points dont les coordonnées  $x_1, x_2$  vérifient

$$\begin{vmatrix} a_i^1 & a_i^2 & b_i \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe est d'ordre 4, et trisécante à  $E_2$  puisqu'un  $E_3$  variable passant par  $E_2$  ne la coupe qu'en un point. On retrouve d'ailleurs la façon classique d'obtenir la représentation rationnelle de la courbe d'ordre 4 de  $E_3$ , à partir d'un  $E_3$  qui pivote autour d'un  $E_2$  quelconque joignant trois points de la courbe.

3° L'intersection  $V_2^3$  de trois quadriques de  $E_3$  ayant déjà  $E_2$  en commun, rationnelle, comme il se doit d'après le paragraphe I, et représentée sur le plan par des quartiques ayant neuf points communs. Cette variété n'est pas sans intérêt, puisque sa projection sur un  $E_1$ , faite d'un de ses points, constitue la

surface de Véronèse-Bordiga, représentée sur le plan par des quartiques ayant dix points communs, et surface focale propre de la congruence linéaire de ses triséchantes <sup>(1)</sup>.

Restent les cas de l'espace à six ou sept dimensions, pour lesquels l'intersection n'est plus décomposée, malgré la présence de l'E<sub>2</sub>.

Pour  $n = 6$ , on représente rationnellement sur l'espace ordinaire l'intersection de trois quadriques de E<sub>6</sub> ayant un E<sub>2</sub> commun. Cette représentation se fait par des T<sub>3</sub><sup>3</sup> ou surfaces du quatrième ordre qui passent par une q<sub>3</sub><sup>3</sup>, c'est-à-dire une courbe du neuvième ordre intersection résiduelle d'une surface du quatrième ordre et d'une surface cubique ayant déjà une cubique gauche commune <sup>(2)</sup>,

Pour  $n = 7$ , on représente rationnellement sur l'espace à quatre dimensions l'intersection de trois quadriques de E<sub>7</sub> ayant un E<sub>2</sub> commun, au moyen de T<sub>3</sub><sup>3</sup> = V<sub>3</sub><sup>4</sup> qui passent par une même q<sub>3</sub><sup>3</sup> = V<sub>3</sub><sup>2</sup>.

La diversité des cas augmente ainsi avec  $r$ . La représentation rationnelle du paragraphe I s'applique encore à l'intersection de  $r$  hyperquadriques de l'espace E <sub>$n$</sub> , quand  $n < l$ , et quand on suppose l'existence d'un E <sub>$r-1$</sub>  commun aux hyperquadriques. Il ne s'agit plus alors d'une B' <sub>$n$</sub>  générale dans son espace E <sub>$n$</sub> , mais d'une variété rationnelle d'ordre inférieur à  $2^r$  dans le cas  $n < 2r - 1$  : quand  $n = 2r - 1$ , l'intersection totale est décomposée suivant E <sub>$r-1$</sub>  et une variété rationnelle à  $r - 1$  dimensions d'ordre  $2^r - 1$ ; quand  $n < 2r - 1$ , l'intersection totale est mixte, décomposée suivant E <sub>$r-1$</sub>  et une variété rationnelle à moins de  $r - 1$  dimensions :  $n - r$ , dont il faut d'abord déterminer l'ordre; c'est l'objet du paragraphe a.

a.  $r \leq n < 2r$ .

$n = r$ . — L'intersection de  $r$  quadriques de E <sub>$r$</sub>  ayant un E <sub>$r-1$</sub>  commun, est constituée, puisque les quadriques sont alors décomposées, par cet E <sub>$r-1$</sub> , et l'intersection de  $r$  autres E <sub>$r-1$</sub> , c'est-à-dire un point unique. C'est d'ailleurs cette propriété qui permet d'établir la rationalité d'une B' <sub>$n$</sub>  quelconque ( $n \geq l$ ).

$n = r + 1$ . — L'intersection de  $r$  quadriques de E <sub>$r+1$</sub> , qui ont pour équations (1), et contiennent un même E <sub>$r-1$</sub> , comprend en dehors de E <sub>$r-1$</sub>  une courbe dont l'ordre s'obtient en coupant par un E <sub>$r$</sub>  quelconque :

$$X_r = \lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + \dots + \lambda^{r-1} X_{r-1} + B_1$$

B<sub>1</sub> étant une forme linéaire en  $x_1, x_2$  et les  $\lambda$  des constantes. Les coordonnées des points de section vérifient les équations obtenues en portant X <sub>$r$</sub>  dans (1)

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^{r-1} X_{r-1} + b_i = 0,$$

<sup>(1)</sup> GAUTHIER, *Thèse*, Chap. VI, p. 86.

<sup>(2)</sup> Cette courbe d'ordre 9, intersection partielle de deux surfaces, est aussi de genre 9. Elle coupe la cubique gauche  $\Gamma$  en onze points, et les surfaces cubiques contenant  $\Gamma$  découpent sur elle la série canonique complète. Trois surfaces du quatrième ordre qui la contiennent se coupent naturellement en huit points (ENRIQUES, *Courbes algébriques*, traduction Légaud, Paris, 1926, p. 535).



d'où en éliminant  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$

$$|a_i^1 \ a_i^2 \ a_i^{r-1} \ b_i| = 0.$$

Le premier nombre est un déterminant d'ordre  $r$ , et l'équation a  $r + 1$  racines. D'où :

*r* quadriques d'un espace  $E_{r+1}$  qui ont un  $E_{r-1}$  commun se recourent suivant une courbe rationnelle normale d'ordre  $r + 1$ , *r* fois sécante à  $E_{r-1}$ .

$n = r + 2$ . — Il faut pour déterminer l'ordre de la surface à deux dimensions suivant laquelle se recourent *r* quadriques de  $E_{r+2}$  passant par un  $E_{r-1}$ , ajouter aux équations (1) de ces quadriques les deux équations d'un  $E_r$ .

$$\begin{aligned} X_{r-1} &= \lambda_1^1 X_1 + \lambda_1^2 X_2 + \dots + \lambda_1^{r-2} X_{r-2} + B_1, \\ X_r &= \lambda_2^1 X_1 + \lambda_2^2 X_2 + \dots + \lambda_2^{r-2} X_{r-2} + B_2. \end{aligned}$$

On obtient alors en portant dans (1)

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^{r-2} X_{r-2} + b_i = 0.$$

L'élimination de  $X_1, X_2, \dots, X_{r-2}$  donne l'annulation d'une matrice à *r* lignes et  $r - 1$  colonnes dont la dernière est quadratique

$$\|a_i^1 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^{r-2} \ b_i\| = 0.$$

Son ordre (Salmon, p. 415) est

$$1 + C_r^1 + C_r^2 = \frac{r^2 + r + 2}{2}.$$

Donc : *r* quadriques d'un espace  $E_{r+2}$  qui ont un  $E_{r-1}$  commun se recourent suivant une surface rationnelle à deux dimensions d'ordre  $m = 1 + C_r^1 + C_r^2$ ,  $m - 1$  fois sécante à  $E_{r-1}$ .

$n = r + k$  ( $k < r$ ). — On obtiendra de même, en coupant par un  $E_r$  quelconque, l'ordre de l'intersection résiduelle à *k* dimensions, égal à celui d'une matrice à *r* lignes et  $r - k + 1$  colonnes

$$\|a_i^1 \ a_i^2 \ \dots \ a_i^{r-k} \ b_i\| = 0$$

qui vaut (Salmon, p. 415)

$$1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k.$$

Le théorème général s'énonce donc :

*r* quadriques d'un espace  $E_{r+k}$  se recourent en dehors d'un  $E_{r-1}$  commun suivant une variété à *k* dimensions d'ordre,

$$m = 1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k \quad (k < r)$$

$m - 1$  fois sécante à  $E_{r-1}$ .

Cette valeur de *m* vaut tant que  $k < r$ . Pour  $k = r - 1$ , *m* est la somme des coefficients du binôme diminuée du dernier, ou  $2^r - 1$ . La variété correspondante, de dimension  $r - 1$ , joue un rôle dans la théorie des congruences linéaires : sa

projection sur un  $E_{r+4}$ , à partir d'un  $E_{r-3}$  situé sur elle, constitue la focale propre  $\Omega_{r-1}$  d'une congruence linéaire dans  $E_{r+4}$  (1).

$2r \leq n < l$ . — L'intersection totale, qui comprend toujours un  $E_{r-1}$  par hypothèse, n'est plus alors décomposée. Elle reste rationnelle et la représentation rationnelle par variétés  $T_p^r$  à base  $q_p^r$  est toujours valable.

b. Les  $T_p^r$  dont il s'agit dans cette représentation sont générales dans l'espace  $E_p$ , mais nous savons (paragraphe I, d, propriété 5) qu'on rencontre aussi la variété  $T_p^r$  en projetant une  $B_{p-1}^r$  à partir d'un  $E_{r-2}$  qui lui appartient. Étudions, pour le cas  $n < l$ , les  $T_p^r$  obtenues de cette façon. Prenons, pour fixer les idées, le cas de trois hyperquadriques dans un espace à moins de huit dimensions, qui possèdent en commun par hypothèse, un plan  $E_2$  et une droite D.

Cette droite sert à faire la projection, nous la supposons complètement étrangère au plan. Les sommets  $A_1, A_2$  du repère projectif étant sur D, les trois quadriques auront pour équation

$$a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nous pouvons étudier la projection sur un  $E_p$  passant par  $E_2$ , le résultat sera valable à une homographie près dans  $E_p$ . Choisissons pour cela trois autres sommets du repère dans  $E_p$ , qui est alors défini par les trois variables  $x_1, x_2, x_3$ .

Si  $p = 3$  :  $E_p$  contient les coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,  $E_2$  a pour équations

$$X_1 = X_2 = x_4 = 0,$$

ce qui entraîne

$$b_i \equiv x_4 B_i,$$

où  $B_i$  est une forme linéaire en  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

La variété  $T_p^r$  correspondante se décompose en un plan  $x_4 = 0$  et une surface cubique d'équation

$$|a_i^1 \quad a_i^2 \quad B_i| = 0.$$

Cette décomposition est tout à fait normale puisque la  $B_3^3$  que l'on projette se trouve elle-même décomposée en un plan  $E_2$  et une  $V_2^3$ .

Si  $p = 4$  :  $E_p$  contient les coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ;  $E_2$  a pour équations  $X_1 = X_2 = x_4 = x_5 = 0$ , ce qui entraîne

$$b_i = x_4 B_i^1 + x_5 B_i^2,$$

de sorte que  $T_p^r$  a pour équation

$$|a_i^1 \quad a_i^2 \quad x_4 B_i^1 + x_5 B_i^2| = 0.$$

Elle contient évidemment dans  $E_4$ , l' $E_2 x_4 = x_5 = 0$ .

(1) GAUTHIER, Thèse. Cf. le cas  $r = 3$  signalé au début du paragraphe II.

C'est une  $T_4^3$  particulière dans  $E_1$ , rationnelle d'après le paragraphe I. d (raisonnement de la propriété 6), et représentée rationnellement sur l'espace ordinaire par des surfaces d'ordre 4 ayant en commun une courbe d'ordre 9 et de genre 9, accompagnée d'une trisécante.

Si  $p = 5$  : On obtient pour  $T_p^r$  particulière une variété d'ordre 4 projection de l'intersection de trois hyperquadriques de l'espace à sept dimensions passant par un même  $E_2$ , faite à partir d'une droite commune. On voit comme plus haut que son équation peut prendre la forme

$$|a_i^2 \quad a_i^2 \quad x_1 B_i^1 + x_3 B_i^2 + x_6 B_i^3| = 0.$$

Elle contient l' $E_2$   $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ , elle est représentée rationnellement sur l'espace à quatre dimensions par des  $T_3^3$  ayant une  $q_3^3$  commune ainsi qu'une corde trisécante.

Enfin pour  $p = 6$ , on obtient la  $T_p^r$  générale de  $E_6$  par projection d'une  $B_3^3$  faite de l'une de ses droites. Elle contient certainement un  $E_2$ .

Ce qui vient d'être dit pour  $r = 3$  peut se répéter quand  $r > 3$ ; le plan  $E_2$  est remplacé par un  $E_{r-1}$ , la droite  $D$  par un  $E_{r-2}$ ; les valeurs de  $p$  à envisager sont celles qui vont de la décomposition  $p = r$ , au cas général de la  $T_p^r$ ,  $p = \frac{r(r+1)}{2}$  qui devient rationnelle à coup sûr. La variété  $T_p^r$  particulière obtenue pour ces valeurs de  $p$  contient un  $E_{r-1}$ ; elle est rationnelle et son équation peut se mettre sous la forme (6).

$$|a_i^2 \quad a_i^2 \quad \dots \quad a_i^2 \quad b_i| = 0,$$

où les  $r$  quadriques  $b_i = 0$  ont un  $E_{r-1}$  commun.

REMARQUES. — I. Les valeurs de  $p$  inférieures à  $r$  n'ont pas d'intérêt ici, car la présence de l' $E_{r-2}$  sur les  $r$  quadriques ayant un  $E_{r-1}$  commun entraînerait une nouvelle décomposition de l'intersection résiduelle.

II. Les deux espaces  $E_{r-1}$  et  $E_{r-2}$  sont supposés quelconques. Sans entrer dans le détail des conséquences relatives à chaque cas particulier, je veux pourtant signaler le cas où  $E_{r-2}$  est tout entier dans  $E_{r-1}$ . En prenant  $r-1$  sommets du repère dans  $E_{r-2}$ , le suivant dans  $E_{r-1}$ , la projection s'obtient immédiatement sous la forme

$$|a_i^2 \quad a_i^2 \dots a_i^{r-1} \quad a_i^r X_r + b_i| = 0.$$

C'est dans  $E_p$ , défini par les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_p, X_r$  une variété  $T_p^r$  d'ordre  $r+1$ , admettant évidemment le point  $(x_1 = x_2, \dots, = x_p = 0, X_r = 1)$  comme point multiple d'ordre  $r$ . Elle est bien rationnelle.

Cette remarque vaut quel que soit  $p$ , sous réserve de l'existence des deux espaces  $E_{r-1}$  et  $E_{r-2}$ . Nous l'appliquons au paragraphe III b.

c. Nous avons eu à considérer dans le paragraphe b et dès le paragraphe I, d (propriété 5)  $r$  quadriques ayant en commun deux espaces linéaires, un  $E_{r-1}$  et un  $E_{r-2}$ . Examinons maintenant  $r$  quadriques passant par un  $E_{r-1}$  et un  $E_1$  quelconques, le résultat nous est utile pour la suite.

$E_{r-1}$  et  $E_s$  déterminent un  $E_{r+s}$  dans lequel nous nous plaçons d'abord. Les coordonnées dans  $E_{r-1}$  sont  $X_1, X_2, \dots, X_r$ ; dans  $E_s$   $x_1, x_2, \dots, x_{s+1}$ ; les  $r$  quadriques ont pour équation

$$\alpha_i^k X_k x_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s+1; i = 1, 2, \dots, r)$$

dans  $E_{r+s}$ . Si le point  $N(X_k = 0, x_j)$  de  $E_{s+1}$  est trace d'un  $E_r$  passant par  $E_{r-1}$  et rencontrant l'intersection, ses coordonnées doivent annuler le déterminant à  $r$  lignes et  $r$  colonnes

$$|\alpha_i^k x_j| = 0,$$

et cette intersection est une droite. Donc  $r$  quadriques de  $E_{r+s}$  qui ont en commun un  $E_{r-1}$  et un  $E_s$  se rencontrent en outre suivant une variété réglée dont la projection faite de  $E_{r-1}$  sur  $E_s$  est une  $V_{s-1}^r$ .

Lorsque  $s = r - 1$   $E_s$  et  $E_{r-1}$  jouent des rôles symétriques. C'est le cas de deux quadriques de l'espace ayant deux droites communes non coplanaires, de trois quadriques de  $E_3$  ayant deux plans  $E_2$  communs, la variété réglée rencontre alors chacun de  $E_2$  suivant une cubique. Plus généralement considérons  $r$  hyperquadriques de  $E_n$  ayant deux  $E_{r-1}$  communs; la projection sur un  $E_p$ , faite du premier  $E_{r-1}$ , des droites de  $B_n^r$  qui le rencontrent, est une variété  $q_p^r$  (paragraphe I) coupée par la projection du deuxième  $E_{r-1}$  suivant une variété  $V_{r-2}^r$ .

Quand  $s = r - 2$  la projection faite de  $E_{r-1}$  sur  $E_{r-2}$  est une  $V_{r-3}^r$ , d'après ce qui précède pour  $s$  quelconque. Considérons alors  $r$  quadriques de  $E_n$  qui ont en commun un  $E_{r-1}$  et un  $E_{r-2}$ ; la projection sur un  $E_p$ , faite de  $E_{r-1}$ , des droites de  $B_n^r$  qui rencontrent  $E_{r-1}$ , est une variété  $q_p^r$ , coupée par la projection de  $E_{r-2}$  suivant une variété  $V_{r-3}^r$ . On justifie le résultat énoncé à propos de la représentation d'une  $T_p^r$  rationnelle. La variété réglée commune aux  $r$  quadriques rencontre  $E_{r-1}$  suivant le lieu des points qui annulent la matrice à  $r$  lignes et  $r - 1$  colonnes

$$|\alpha_i^k X_k| = 0,$$

c'est-à-dire une  $L_{r-1}^r$ .

REMARQUE. — Il est facile de voir géométriquement que la variété commune à  $r$  hyperquadriques de  $E_{r+s}$  qui passent par  $E_{r-1}$  et  $E_s$  est réglée. Par un point  $M$  de cette variété on peut en effet tracer une droite qui s'appuie sur  $E_{s-1}$  et  $E_r$ ; elle rencontre alors chacune des quadriques en trois points et par suite leur appartient.

A chaque droite de cette variété correspond un point sur la variété de Segre <sup>(1)</sup> définie par  $E_{r-1}$  et  $E_s$ ; et les équations  $\alpha_i^k X_k x_j = 0$  montrent que l'intersection des  $r$  hyperquadriques a pour image la section de la variété de Segre par  $r$  hyperplans. Cette image n'est pas forcément rationnelle.

Nous possédons actuellement les notions nécessaires à l'étude des transformations du paragraphe III.

<sup>(1)</sup> SEGRE, *Coppie die punti di due piani o spazi* (Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 5, 1892).

III. — TRANSFORMATIONS RATIONNELLES ET BIRATIONNELLES (1).

*a. Les transformations birationnelles  $v$ .* — Deux représentations rationnelles connues, sur un  $E_p$ , de l'intersection de  $r$  quadriques de  $E_n$  ( $n = p + r$ ), définissent une transformation birationnelle dans  $E_p$ . Soient en effet deux  $E_{r-1}$ , P et Q, pris dans  $E_n$  sur  $B'_n$ ; le point  $m$  de  $E_p$  a pour homologue dans  $E_p$  le point  $m'$  obtenu en projetant de Q le point M de  $B'_n$  situé dans l' $E_r$  défini par P et  $m$ . Quand  $m$  décrit un  $E_{p-1}$ , M varie sur la section par un hyperplan  $E_{n-1}$ , contenant P, dont la projection faite de Q est, d'après le paragraphe I, une variété  $T'_p$ . Cette variété passe constamment par la  $q'_p$  relative à Q ainsi que par la projection de P; celle-ci est un  $E_{r-1}$  s'appuyant sur  $q'_p$  en tous les points d'une  $V'_{r-2}$  (paragraphe II, c). On en déduit :

*Les variétés  $T'_p$ , de dimension  $p - 1$  et d'ordre  $r + 1$ , passant dans  $E_p$  par une variété  $q'_p$  et par l' $E_{r-1}$  ( $\pi$ ) d'une variété  $V'_{r-2}$  située sur elle, définissent le réseau homaloïdal d'une transformation birationnelle  $t_r$ .*

*Exemple :  $r = 2$ .* — Transformations  $t_2$  étudiées au Chapitre I.

$r = 3$ . — La transformation  $t_3$  est définie par des variétés  $T'_p$ , à  $p - 1$  dimensions et du quatrième ordre, passant par une  $q'_p$ , à  $p - 2$  dimensions et du neuvième ordre, ainsi que par le plan  $\pi$  d'une cubique plane située sur elle.

Pour  $r = 2$ , le cas du plan ( $p = 2$ ) était particulier puisque  $t_3$  dégénérait en une transformation quadratique. J'étudie de même en premier lieu le cas  $p = r$ .

*Cas  $p = r$ , ou  $n = 2r$ .* L'hyperplan  $E_{2r-1}$  défini par P et Q, d'équation  $u = 0$ , coupe  $E_p$  suivant un  $E_{r-1}$ . Les quadriques dans  $E_{2r}$  ont pour équation

$$a_1^i X_1 + a_2^i X_2 + \dots + a_r^i X_r + u B_i = 0$$

de sorte que la  $q'_p$  relative à P se décompose en

$$u = 0 \quad |a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_r^i| = 0$$

qui est une  $V'_{r-2}$  et

$$|a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_r^i \quad B_i| = 0$$

qui est une  $L_r^{r+1}$ , c'est-à-dire une variété à  $r - 2$  dimensions d'ordre  $\frac{r(r+1)}{2}$ .

Aux  $E_{r-1}$  correspondent les sections hyperplanes passant par P, puis leurs projections faites de Q, qui sont des variétés d'ordre  $r$  à base  $L_r^{r+1}$ , c'est-à-dire des variétés  $V'_{r-1}$ . Cette transformation est classique dans  $E_r$ ; elle constitue la transformation définie par  $r$  réciprociétés. Donc, dans la famille des transformations  $t_r$  pour les différentes valeurs de  $p$ , le cas  $p = r$  correspond à la transformation définie par  $r$  réciprociétés.

---

(1) J'ai présenté le cas  $r = 3$  dans une Note aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (juin 1945, t. 220, p. 724-726).

Transformation quadratique plane pour  $r = 2$ , transformation d'indices (3,3) définie dans l'espace par un système linéaire de surfaces cubiques à base sextique de genre 3, pour  $r = 3$  <sup>(1)</sup>.

Cas  $p > r$ . — L'hyperplan défini par P et Q a pour trace dans  $E_p$  un  $E_{r-1}(\pi)$  s'appuyant sur chacune des variétés  $q_p^r$  relatives à P et à Q suivant une variété  $V_{r-2}^r$ .

Le système homaloïdal est, rappelons-le, formé par les variétés  $T_p^r$  qui passent par la  $q_p^r$  relative à Q ainsi que par l' $E_{r-1}(\pi)$ . Deux points homologues,  $m$  et  $m'$ , sont dans un même  $E_r$  passant par  $\pi$ , trace de l'hyperplan PQM.

La transformation  $t_r$  laisse donc invariant chaque  $E_r$  passant par  $\pi$ , et son empreinte dans  $E_r$  est la forme particulière prise par  $t_r$  pour  $p = r$ , la base du système homaloïdal de l'empreinte étant constituée par la section  $L_r^{r+1}$ , en dehors de la  $V_{r-2}^r$  contenue dans  $\pi$ , de  $q_p^r$  par  $E_r$ .

La transformation inverse est de même nature; ( $\pi$ ) reste le même et la  $q_p^r$  relative à P remplace la  $q_p^r$  relative à Q; la transformation est symétrique. Cherchons ses indices.

A une droite correspond dans  $E_n$  l'intersection de  $r$  quadriques de  $E_{r+1}$  ayant l' $E_{r-1}P$  en commun, c'est-à-dire (paragraphe II  $\alpha$ ) une courbe rationnelle normale d'ordre  $r + 1$  d'un  $E_{r+1}$ . Il en est de même en projection dans  $E_p$ .

A un  $E_2$  correspond dans  $E_n$  l'intersection de  $r$  quadriques de  $E_{r+2}$  qui ont l' $E_{r-1}P$  en commun, c'est-à-dire (paragraphe II  $\alpha$ ) une surface rationnelle d'ordre  $\frac{2+r+r^2}{2}$ .

Plus généralement à un  $E_k$  correspond dans  $E_n$  l'intersection de  $r$  quadriques de  $E_{r+k}$  qui ont l' $E_{r-1}P$  en commun, c'est-à-dire (paragraphe II  $\alpha$ ) une variété à  $k$  dimensions d'ordre  $1 + C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^k$ .

Lorsque  $k > r$  l'homologue est une  $B_{r+k}^r$  d'ordre  $2^r$  qui devient la  $B_n^r$  générale quand  $r + k \geq n$ .

Ainsi, en appelant  $S_k$  la somme des  $k + 1$  premiers coefficients du développement de  $(1+x)^r$

$$1, C_r^1, C_r^2, \dots, C_r^k, \dots, C_r^{r-1}, C_r^r,$$

la transformation  $t_r$  a pour indices

$$(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_r, 2^r, 2^r, \dots, S_r, \dots, S_k, \dots, S_2, \dots, S_1).$$

Les indices de la transformation inverse sont formés de la même suite <sup>(2)</sup>.

Nous avons constaté pour  $p = r$  l'identité de la transformation  $t_r$  avec la transformation classique définie par  $r$  réciprociétés dans  $E_r$ ; nous avons remarqué aussi (Chap. I, § II-d, en note) que dans le cas  $p = 3, r = 3$  la transformation  $t_2$  constitue un cas particulier de la transformation de l'espace définie par trois réciprociétés. Établissons que ce fait est général dans  $E_p$  :

*La transformation  $t_r$  dans  $E_p$  n'est qu'un cas particulier de la transformation birationnelle définie par  $p$  réciprociétés.*

(1) Étudiée par L. GODEAUX, *Cours de géométrie supérieure*.

(2) La transformation est symétrique.

Procédons analytiquement. L' $E_{r-1}P$  dans  $E_r$  est défini par les coordonnées  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , et l' $E_{r-1}Q$  par les coordonnées  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ . Le repère de coordonnées se trouve complété par  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1-r}$  dans un  $E_{p-r}$ . Nous allons considérer la transformation birationnelle suivante : au point  $m$  de l' $E_p$  défini par  $E_{p-r}$  et  $Q$  nous faisons correspondre le point  $M$  d'une  $B_r^n$  passant par  $P$  et  $Q$  situé dans l' $E_r(Pm)$ , puis sa projection  $m'$  faite de  $Q$  sur un deuxième  $E_p$  défini par  $E_{p-r}$  et  $P$ . La transformation birationnelle ainsi obtenue est à des homographies près une transformation  $t_r$  dont nous allons chercher les équations. Celles des quadriques sont  $r$  équations de la forme.

$$(9) \quad \lambda_k^i X_i Y_j + a_k^i X_i + b_k^j Y_j + c_k = 0,$$

$i, j, k$  prenant les valeurs  $1, 2, \dots, r$ , où les  $\lambda$  sont des constantes,  $a_k^i$  et  $b_k^j$  des formes linéaires en  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1-r}$ , et  $c_k$  une forme quadratique des mêmes variables. La correspondance entre le point  $m (y_1, y_2, \dots, y_{p-r}, y_{p+1-r} = 1, Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  et le point  $m' (x_1, x_2, \dots, x_{p-r}, x_{p+1-r} = 1, X_1, X_2, \dots, X_r)$  s'obtient en ajoutant aux  $r$  équations (9) les  $p - r$  équations

$$(10) \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_{p-r} = x_{p-r}.$$

Les équations (10) sont linéaires, les équations (9) peuvent être rendues bilinéaires par rapport aux deux groupes de variables

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{p-r}, \quad X_1, X_2, \dots, X_r, \\ y_1, y_2, \dots, y_{p-r}, \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_r. \end{aligned}$$

Il suffit en effet de remplacer  $a_k^i(x)$  par  $a_k^i(y)$  d'après (10) et  $c_k = x_k^i x_i x_j$  par

$$c_k = x_k^i x_i y_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+1-r).$$

Les équations (9) et (10) deviennent ainsi bilinéaires par rapport aux coordonnées absolues de  $m$  et  $m'$ . Elles définissent  $p$  réciprocités. Le théorème est démontré.

Les transformations  $t_r$  rentrent donc dans un type plus général. Elles n'en jouent pas moins un rôle intéressant qui leur est propre, elles dépendent des deux entiers  $r$  et  $p$ ; elles sont du même ordre  $r + 1$ , quel que soit  $p$ , pour une valeur donnée de  $r$ , tandis que pour le cas général de  $p$  réciprocités dans  $E_p$  la transformation est d'ordre  $p + 1$ .

*b. Quelques applications des transformations  $t_r$ .* — 1° Dans la transformation  $t_r$  de  $E_p$ , une variété  $T_p^r$  passant par la  $q_p^r$  relative à  $P$  correspond sur la  $B_r^n$  à une section hyperplane quelconque; elle a donc pour homologue dans la projection faite de  $Q$  une variété  $T_p^r$  passant par la variété  $q_p^r$  relative à  $Q$ . Nous exprimons cette propriété sous la forme suivante :

*Une transformation  $t_r$  permet de transformer dans  $E_p$  un système linéaire de variétés  $T_p^r$  ayant une variété  $q_p^r$  commune en un système linéaire de même nature algébrique, c'est-à-dire formé par de nouvelles variétés  $T_p^r$  ayant une nouvelle  $q_p^r$  commune.*

2° Comptons les paramètres des transformations  $t_r$  obtenues de cette façon. quand on se donne le premier système linéaire. Leur nombre est celui des paramètres d'un  $E_{r-1}$  variable sur une  $B_n^r$ , ou

$$r \left[ p - \frac{r(r+1)}{2} + 1 \right].$$

Le produit de  $t_r$  par une homographie  $h$  dépend donc de

$$\boxed{X = r \left[ p - \frac{r(r+1)}{2} + 1 \right] + p(p+2)} \quad \text{paramètres.}$$

Ainsi, la famille  $ht_r$  de transformations birationnelles à X paramètres, dans  $E_p$ , n'altère pas la nature algébrique d'un réseau donné de variétés  $T_p^r$  à base  $q_p^r$ .

On peut en déduire indirectement le nombre des paramètres de la base  $q_p^r$ , par une marche analogue à celle du chapitre I (§ II, c). Le choix des surfaces base du réseau équivaut à une projectivité pour la  $B_n^r$ , le nombre L des paramètres de  $q_p^r$  est donc lié au nombre M des invariants projectifs de  $B_n^r$ . D'une façon plus précise on a

$$L = M + X.$$

Calculons M. Une quadrique dans  $E_n$  ( $n = p + r$ ) dépend de  $\frac{1}{2}(p+r)(p+r+3)$  paramètres, desquels il faut retrancher les  $r-1$  paramètres qui la définissent dans le réseau à base  $B_n^r$ . Celle-ci a donc

$$\frac{r}{2}(p+r)(p+r+3) - r(r-1)$$

paramètres. Comme il en faut  $(p+r)(p+r+2)$  pour l'homographie dans  $E_n$ , il vient en définitive

$$M = r \left[ \frac{(p+r)(p+r+3)}{2} - r + 1 \right] - (p+r)(p+r+2).$$

En ajoutant la valeur de X trouvée plus haut, on obtient après développement

$$\boxed{L = \frac{p^2 r}{2} + pr \left( r + \frac{1}{2} \right) - r^2.}$$

On peut d'autre part comme vérification, calculer L directement, d'après l'équation (4) de  $q_p^r$  (cf. Chap. I, § II-b). Les éléments qui figurent dans cette équation sont :

$r$  quadriques  $b_i$  avec  $\frac{r}{2}(p+1)(p+2)$  paramètres,  $(r)^2$  hyperplans  $a_i^j$  avec  $(r)^2(p+1)$  paramètres, en tout  $\frac{r}{2}(p+1)(p+2) + (r)^2(p+1) - 1$  paramètres non homogènes. Il faut en retrancher le nombre des paramètres des combinaisons par colonnes; la dernière peut être remplacée par

$$\lambda b_i + B_k a_i^k,$$



$B_k$  étant une forme linéaire,  $\lambda$  une constante; la première par  $\lambda_j a_i^j$ , les  $\lambda_j$  étant constants. Cela fait donc pour la dernière colonne

$$r(p+1)+1$$

et pour les  $r$  premières :  $(r)^2$ , en tout  $(r)^2 + r(p+1) + 1 - 1$  paramètres non homogènes. On trouve de même pour les combinaisons par lignes

$$r^2 - 1 \text{ paramètres.}$$

Donc

$$L = \frac{r}{2}(p+1)(p+2) + (r)^2(p+1) - 1 - (r)^2 - r(p+1) - (r)^2 + 1.$$

$$L = \frac{p^2 r}{2} + p \left( r^2 + \frac{r}{2} \right) - r^2.$$

C'est bien la valeur trouvée précédemment Elle donne pour

$$r = 2, \quad L = p^2 + 5p - 4 \quad (\text{chap. I, § II}),$$

$$p = 2, \quad L = r(r+3).$$

ou nombre des paramètres des  $\frac{1}{2}r(r+3)$  points d'un plan qui forment une  $q_2^r$  plane

$$p = 3, \quad L = 2r(r+3).$$

nombre des paramètres d'une courbe  $q_3^r$  d'ordre  $\frac{r(r+3)}{2}$  de l'espace.<sup>(1)</sup>

3<sup>o</sup> On peut par une transformation  $t_r$  de l'espace  $E_n$  transformer une  $B_n$  de cet espace en un  $E_{n-r}$  ( $n \geq l$ ).

Employons une méthode suggérée par le chapitre I (§ II).

Nous pouvons, puisque  $n \geq l$ , prendre les équations de la  $B_n^r$  sous la forme (1)

$$(1) \quad a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + b_l = 0.$$

$r$  variables auxiliaires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  définissent un  $E_{n+r}$ . Prenons pour  $B_{n+r}^r$  la variété

$$a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + a_i^l Z_i + \dots + a_r^l X_r + b_i = 0,$$

obtenue en remplaçant  $X_i$  par  $Z_i$  dans la  $i^{\text{ème}}$  équation (1). Cette  $B_{n+r}^r$  contient les deux  $E_{r-1}$ .

$$P(x_k = 0, X_i = 0) \quad (k=1, 2, \dots, p+1, i=1, 2, \dots, r)$$

et

$$Q(x_k = 0, X_i = Z_i) \quad (k=1, 2, \dots, p+1, i=1, 2, \dots, r).$$

La transformation  $t_r$  définie dans  $E_n$  au moyen des éléments  $B_{n+r}^r$ , P et Q, de  $E_{n+r}$  a pour équations (on s'en rendra facilement compte)

$$y_k = x_k, \quad Y_i = \frac{a_1^l X_1 + a_2^l X_2 + \dots + a_i^l X_r + b_i}{a_i^l}.$$

(1) C'est ici l'ordre de la courbe multiplié par  $\frac{1}{2}$  (Cf. ENRIQUES, *Courbes algébriques*, p. 521).

Elle transforme évidemment la  $B_n^r$  en l' $E_{n-r}$   $Y_1 = Y_2 = \dots = Y_r = 0$  dans  $E_n$ , et cette transformation fait partie de la famille  $t_r$  (1).

Plus généralement :

*On peut par une transformation  $t_r$  de l'espace  $E_n$  transformer une  $B_n^r$  en une intersection  $B_{n-m}^{r-m}$  de  $r-m$  quadriques d'un espace à  $n-m$  dimensions ( $n \geq l$ ).*

Il suffit en effet, pour transformer par exemple la  $B_n^r$  en une  $B_{n+2-r}^2$  ou intersection de deux quadriques d'un espace à  $n+2-r$  dimensions, d'effectuer la transformation birationnelle d'équations

$$\begin{aligned} y_k &= x_k & (k=1, 2, \dots, p+1), \\ Y_i &= a_i^1 X_1 + \dots + a_i^r X_r + b_i & (i=1, 2, \dots, r-2), \\ a_{r-1}^1 Y_1 + a_{r-1}^2 Y_2 + \dots + a_{r-1}^r Y_r + b_{r-1} &= a_{r-1}^1 X_1 + \dots + a_{r-1}^r X_r + b_{r-1}, \\ a_r^1 Y_1 + a_r^2 Y_2 + \dots + a_r^r Y_r + b_r &= a_r^1 X_1 + \dots + a_r^r X_r + b_r. \end{aligned}$$

L'homologue de  $B_n^r$  est

$$\begin{aligned} Y_i &= 0 & (i=1, 2, \dots, r-2) \\ a_{r-1}^1 Y_{r-1} + a_{r-1}^r Y_r + b_{r-1} &= 0, & a_{r-1}^1 Y_{r-1} + a_{r-1}^r Y_r + b_r = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une  $B_{n+2-r}^2$ . La transformation employée peut s'interpréter comme une transformation  $t_r$ , celle qui est définie dans  $E_{n+r}$  par la  $B_{n+r}^r$

$$\begin{aligned} a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^l Z_l + \dots + a_i^r X_r + b_i &= 0 & (i=1, 2, \dots, r-2), \\ a_{r-1}^1 Z_1 + a_{r-1}^2 Z_2 + \dots + a_{r-1}^r Z_r &= 0, \\ a_r^1 Z_1 + a_r^2 Z_2 + \dots + a_r^r Z_r &= 0, \end{aligned}$$

et les deux  $E_{r-1}$  P et Q qui lui appartiennent, déjà employés un peu plus haut

$$\begin{aligned} P & (x_k = 0, \quad X_l = 0), \\ Q & (x_k = 0, \quad X_l - Z_l = 0). \end{aligned}$$

Le théorème général donne en particulier, pour  $m = r-1$ , le moyen de transformer directement une  $B_n^r$  en une quadrique  $Q_{n-r+1}$  par une transformation de Cremona  $t_r$ .

4° On peut par une transformation birationnelle  $t_r$  transformer une variété  $T_p^r$  en une  $T_p^r$  a point  $r$ -uple ( $p \geq \frac{r(r+1)}{2}$ ).

Il suffit pour le justifier d'appliquer le résultat de la remarque de la fin du paragraphe II b.

Cela démontre à nouveau la rationalité d'une  $T_p^r$  pour  $p \geq \frac{r(r+1)}{2}$ .

c. Les transformations simplement rationnelles  $t_r$ . — 1° Problème. — Transformer  $r$  quadriques d'un espace  $E_p$  en variétés doubles d'ordre  $r+1$ , au moyen d'une transformation simplement rationnelle de  $E_p$ .

(1) Elle en est un cas particulier car les deux  $E_{r-1}$  P et Q de  $B_{n+r}^r$  sont situés dans un même  $E_{2r-1}$ ,  $x_k = 0$ , qui appartient à  $B_{n+r}^r$ .



C'est dans  $E_p$  une variété  $V_{p-1}$  d'ordre  $(p+1)(m-1)$  pour une transformation  $\tau$  d'ordre  $m$ . Les transformées des quadriques  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$  sont en général des surfaces d'ordre  $2m$ ; puisqu'elles sont doubles dans la transformation  $\tau$ , chacune d'elles compte pour l'ordre  $m$  dans le degré de la Jacobienne. On doit donc avoir

$$(11) \quad (p+1)(m-1) \geq rm,$$

et de cette inégalité simple résulte certaines conséquences sur l'existence même des transformations  $\tau$ , équivalente à la représentation unicursale de la  $B_n^r$ , propre ou impropre.

Le cas  $r=2$  a été traité au chapitre I (§ III). Pour  $r$  quelconque (11) s'écrit

$$p+1 \geq \frac{rm}{m-1},$$

ou

$$p \geq r-1 + \frac{r}{m-1},$$

ou

$$n \geq 2r-1 + \frac{r}{m-1},$$

une condition nécessaire est donc, puisqu'il s'agit d'entiers

$$\boxed{n \geq 2r,}$$

alors que la condition suffisante de rationalité, rappelée au début de ce chapitre est

$$n \geq l = \frac{r(r+3)}{2} - 1.$$

Il n'y a égalité entre ces deux limites que pour  $r=2$ . Le cas  $r=3$  donne par exemple les distinctions suivantes provenant des limites précédentes  $2r=6$  et  $l=8$ .

$n < 6$ . — L'intersection de trois hyperquadriques est certainement irrationnelle en général, et non susceptible d'une représentation unicursale, même impropre. Cas de l'intersection de trois hyperquadriques de  $E_4$ , qui représente la courbe canonique de genre 5; cas de l'intersection  $V_3^2$  de 3 quadriques de  $E_5$ .

$n = 6$  ou  $n = 7$ . — Il n'est pas impossible que l'intersection  $B_6^3$  ou  $B_7^3$  de trois hyperquadriques d'un espace à 6 ou à 7 dimensions soit susceptible d'une représentation unicursale. La question de leur rationalité n'est pas résolue.

$n \geq 8$ . — La rationalité est assurée.

D'une façon générale, les limites  $l$  et  $2r$ , pour  $r$  quelconque, entraînent la classification suivante dans l'échelle des dimensions de l'espace.

*Dans l'intervalle  $n < 2r$  il n'y a pas en général de représentation unicursale possible, même impropre.*

*Dans l'intervalle  $2r \leq n < \frac{r(r+3)}{2} - 1$  la question n'est pas résolue.*

*Dans l'intervalle  $n \geq \frac{r(r+3)}{2} - 1$  la rationalité est assurée.*

CHAPITRE III.

Génération descriptive des cyclides de l'espace  $E_n$ .  
Applications.

La rationalité constitue un caractère important, commun aux hyperbiquadratiques  $B_n$  ( $n \geq 4$ ) et aux hypercyclides  $C_p$  et  $T_p$  ( $p \geq 3$ ) <sup>(1)</sup>. Il n'est malgré tout qu'un des aspects de la géométrie sur ces variétés; il classe à part les biquadratiques de l'espace ordinaire et les cycliques planes. L'étude géométrique qui nous occupe maintenant ne fait plus cette distinction systématique. Le point de départ a quelques rapports avec un travail de Segre [*Surfaces du quatrième ordre à conique double* (*Math. Annalen*, t. 24, 1884)] qui considère la projection de l'intersection de deux cônes du second ordre d'un espace à quatre dimensions, mais les conséquences que nous en tirons sont différentes; elles préparent les applications du paragraphe III, qui sont nouvelles, à ma connaissance. Le paragraphe I est consacré aux cyclides du 4<sup>e</sup> ordre  $C_n$ ; le paragraphe II traite plus spécialement des cyclides cubiques  $T_n$ .

I. — GÉNÉRATIONS DESCRIPTIVES D'UNE CYCLIDE  $C_n$ .

1. **Génération descriptive.** — On sait que toute cyclide  $C_n$  du 4<sup>e</sup> ordre, dans l'espace à  $n$  dimensions, peut être considérée comme la projection faite d'un point  $o$  extérieur, de l'intersection  $B_{n+1}$ , de deux quadriques  $Q_{n+1}$  de l'espace à  $n+1$  dimensions. En général existent  $n+2$  cônes distincts dans le faisceau de ces deux quadriques; soient  $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$  leurs sommets. Portons notre attention sur deux d'entre eux (1 et 2), ayant pour bases  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ ; la droite qui joint leurs sommets a pour trace  $i_{12} = i$ , et les projections de  $S_1, S_2$  sont  $s_1, s_2$  alignés avec  $i$ . En projetant la section par un  $E_2$  variable pivotant autour de  $S_1 S_2$ , on obtient la génération suivante de  $C_n$ , que nous appellerons *descriptive* (quand  $n = 2$  c'est l'épure d'intersection de 2 cônes du second ordre). *Dans le triangle  $m, m_1, m_2$ , dont les sommets  $m_1, m_2$  décrivent 2 quadriques  $Q_n^1, Q_n^2$  et dont les côtés passent par 3 points fixes alignés, le sommet  $m$  décrit une cyclide  $C_n$ , et les plans tangents  $E_{n-1}$  aux 3 surfaces en ces points concourent suivant un  $E_{n-2}$  (fig. 4, pour  $n = 2$ ).*

$C_n$  passe par la  $B_n(a)$  commune aux 2 quadriques <sup>(2)</sup>, le long de laquelle la construction précédente du plan tangent est en défaut, on y supplée facilement par une section auxiliaire, celle d'un  $E_{n-1}$  mené par  $i$ .

Quand le point  $m_1$  coïncide avec un point de contact d'une tangente à  $Q_n^1$  issue de  $s_1$ , la construction graphique donne 2 points de  $C_n$  sur  $s_1 m_1$ , pour lequel le plan tangent à  $C_n$  est celui de  $Q_n^1$  en  $m_1$ . Donc :

*Le cône circonscrit à  $Q_n^1$  de sommet  $s_1$  est doublement circonscrit à  $C_n$ .*

<sup>(1)</sup> La représentation rationnelle d'une cyclide  $C_p$  se fait dans  $E_{p+1}$  par  $p+1$  cyclides cubiques  $T_{p-1}$  ayant une quintique  $q_{p-1}$  commune (LESTEUR, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 1945).

<sup>(2)</sup> 4 points  $a, b, c, d$  pour  $n = 2$ .

Il s'agit d'un cône de Kummer <sup>(1)</sup> pour  $C_n$ . La courbe de contact est une  $B_n$  projection de la section de  $B_{n+1}$  par le plan de contour apparent du cône  $S_1$ .

Quand  $m_2$  vient au point de contact d'une tangente à  $Q_n^2$  passant par  $i$ , la droite  $s_1 m_1$  est tangente à  $C_n$  au point  $m$  correspondant.  $m_1$  décrit alors la  $B_n(\alpha_1)$  découpée sur  $Q_n^1$  par le cône circonscrit à  $Q_n^2$  de sommet  $i$ ; le lieu de  $m$  est une  $B_n(\alpha_1)$  déduite de  $(\alpha_1)$  par l'homologie de centre  $s_1$ , dont le plan double est l' $E_{n-1}$  polaire de  $i$  par rapport à  $Q_n^2$ , et tel que l'homologue de  $i$  soit  $s_2$ .  $(a_1)$  est

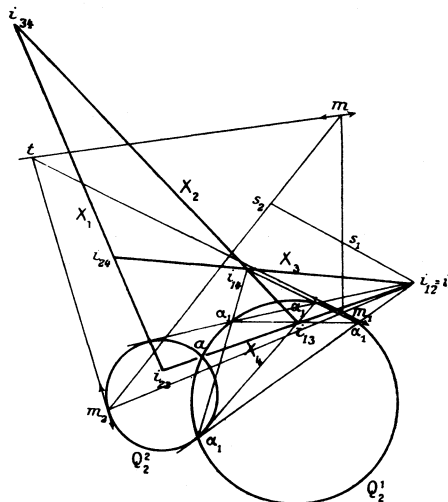


Fig. 4.

située sur le cône du second ordre de sommet  $s_2$ , qui a pour base la  $Q_{n-1}$  section de  $Q_n^2$  par ce plan double. Ainsi :

*Le cône de sommet  $s_1$  et de base  $(\alpha_1)$  est circonscrit à  $C_n$  le long de  $(a_1)$ , et l'un des cônes du faisceau  $(\alpha_1)$  a pour sommet  $s_2$ .*

Le cône circonscrit à  $C_n$  de sommet  $s_1$  se décompose en définitive suivant un cône du second ordre (double) et un cône du 4<sup>e</sup> ordre de directrice  $B_n(\alpha_1)$  et dont toute section plane est par suite une  $C_{n-1}$ . On en déduit, par récurrence, qu'il existe  $4n$  plans tangents  $E_{n-1}$  à une cyclide  $C_n$  menés par un  $E_{n-2}$  quelconque.

**2. Les générations descriptives d'un équipage.** — Il y a lieu d'adjoindre à la précédente les générations provenant de tous les cônes du faisceau  $B_{n+1}$ , pris deux à deux. Il y en a donc  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , dont nous allons construire graphique-

<sup>(1)</sup> SEGRE, *Mat. Annal.*, 1884, p. 326.

ment les éléments dans  $E_n$  à partir de  $s_1 s_2 i_{12}$ ,  $Q_n^1$ ,  $Q_n^2$  <sup>(1)</sup> (la figure 4 permet de suivre les constructions pour  $n = 2$ ).

*Points  $s_k$ .* — Dans la génération  $(1, \bar{2})$  les  $B_n(\alpha_1)$  et  $(\alpha_1)$  sont propres au cône  $S_1$ . Elles restent les mêmes pour les générations  $(1, k)$   $k = 3, \dots, n + 2$ . On en déduit,  $s_2$  étant sommet d'un cône du faisceau  $(\alpha_1)$ , que les points  $s_k$  sont les sommets des autres cônes du faisceau <sup>(2)</sup>.

*Quadriques  $Q_n^k$ .* — De même que  $Q_n^2$  est inscrite dans le cône de sommet  $i_{12}$  du faisceau  $(\alpha_1)$  les  $Q_n^k$  sont des quadriques passant par  $(\alpha)$  inscrites dans les autres cônes du faisceau  $(\alpha_1)$  dont les sommets fournissent les  $i_{1k}$ . Les  $Q_{n-1}$  de contact sont toutes dans le plan polaire  $X_1$  de  $i_{12}$  par rapport à  $Q_n^2$  (trace de l'hyperplan  $S_2, S_3, \dots, S_{n+2}$ ).

*Points  $i_{rs}$ .* — Nous venons de déterminer les  $i_{1k}$ ; ils forment avec  $i_{12}$  un repère conjugué commun au faisceau  $(\alpha_1)$  dont les arêtes sont coupées par  $X_1$  aux points  $i_{rs}$  manquants.

La configuration de tous ces points  $i_{rs}$  est celle d'une section par un  $E_n$ , des arêtes du repère  $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$ . Elle est à l'intersection de  $n + 2$  hyperplans  $X$  de  $E_n$ . Elle jouit des propriétés suivantes (fig. 5, pour  $n = 2$ ) : tous les points

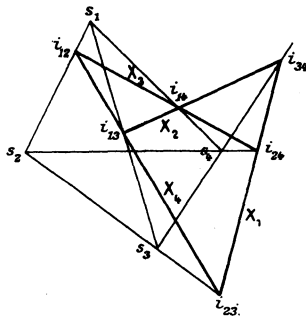


Fig. 5.

n'ayant pas l'indice  $j$  sont dans un  $E_{n-1} X_j$ ; plus généralement tous les points n'ayant pas  $p$  indices sont dans un  $E_{n-p}$ , par exemple ceux qui sont formés par 3 indices sont en ligne droite (comme  $i_{12}, i_{23}, i_{31}$ ). Enfin  $X_j$  est le plan double d'une homologie de pôle  $s_j$  dont les  $s_r$  ( $r \neq j$ ) ont pour homologues les  $i_{jr}$ .

Les points  $i_{rs}$ , les quadriques  $Q_n$ , et les points  $s$  forment les éléments d'un équipage de  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  générations descriptives d'une  $C_n$ , parfaitement déterminées par une seule d'entre elles. Appelons base de l'équipage l'ensemble

<sup>(1)</sup> De même un mode de génération anallagmatique d'une cyclique étant donné permet la construction des trois autres.

<sup>(2)</sup> Ils auraient pu tout aussi bien se déterminer à partir de  $(\alpha_2)$ .

des points  $i$  et des quadriques  $Q_n$ , tandis que les points  $s$  constituent ses *sommets*. De cette étude résulte :

1° La base de l'équipage est déterminée par la base  $i_{12}Q_n^1Q_n^2$  d'une seule génération. Elle ne dépend pas de ses sommets (1).

2° Tout  $i_{j_r}$  admet  $X_j$  comme plan polaire par rapport à la quadrique  $Q_n^r$ . Ces  $n + 1$   $i_{j_r}$  se trouvent donc, quand on fixe  $j$ , sur le lieu des pôles de  $X_j$  par rapport aux quadriques du faisceau dont les  $Q_n$  font toutes partie, c'est-à-dire sur une courbe rationnelle d'ordre  $n$  contenant les  $n + 1$  sommets du repère conjugué commun aux  $Q_n$  et les  $n$  sommets du repère conjugué aux sections par  $X_j$  (d'où 8 points sur une conique pour  $n = 2$ , 11 points sur une cubique gauche pour  $n = 3$ ) (2).

3° Un  $i_{j_r}$  et un  $i_{j_r'}$  d'indices différents sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du faisceau des  $Q_n$ ,  $Q_n^r$  est conjuguée par rapport au repère formé par les  $i_{j_r}$  ( $j$  fixe) et les arêtes de ce repère issues d'un sommet déterminé  $i_{j_s}$  sont conjuguées communes aux cônes de sommet  $i_{j_s}$  circonscrits à  $Q_n^r$  et  $Q_n^s$ , donc à tous les cônes circonscrits de même sommet aux quadriques du faisceau tangentiel qu'elles déterminent.

4° L'existence des  $Q_n^k$  ( $n > 2$ ) prouve le théorème suivant : quand l'un des cônes du faisceau d'une  $B_n(\alpha_1)$  située sur une quadrique  $Q_n^1$ , est circonscrit à une quadrique  $Q_n^2$ , il existe  $n$  quadriques  $Q_n^k$  du faisceau  $Q_n^1Q_n^2$  inscrites dans les autres cônes du faisceau ( $\alpha_1$ ); toutes leurs  $Q_{n-1}$  de contact sont dans le même  $E_{n-1}X_1$ . Pour  $n = 3$  (ou 2) ce théorème est corrélatif d'un théorème de Chasles sur les quadriques (ou coniques) homofocales.

5° Quand  $n = 2$  les 6 points  $i$  sont aux sommets d'un quadrilatère complet, et les 3 couples de sommets opposés sont formés de points conjugués dans le faisceau des 4 coniques  $Q$ . Or dans un quadrilatère, il suffit que deux des couples jouissent de cette propriété pour qu'il en soit de même du 3<sup>e</sup>, ce qui entraîne l'existence d'une conique inscrite dans le quadrilatère en même temps que dans le triangle conjugué commun au faisceau  $Q$  (3). Nous verrons au paragraphe 8 une interprétation de cette conique et de la courbe rationnelle d'ordre  $n$  qui la généralise pour  $n$  quelconque.

**3. Paramètres d'un équipage de générations.** — Dans une cyclique existe un système unique de 4 générations anallagmatiques; au contraire les équipages de générations descriptives d'une  $C_n$  sont en nombre infini. Le précédent a été obtenu par la trace sur le plan  $E_n$  de la figure des  $n + 1$  cônes du faisceau  $B_{n+1}$  et de leur repère conjugué commun. Il suffit pour avoir les autres de prendre la projection de la section par un plan  $E_n$  quelconque. Ainsi : les *équipages de générations descriptives dépendent des  $n + 1$  paramètres d'un hyperplan  $E_n$  de l'espace  $E_{n+1}$* . Ce qui varie quand on passe d'un équipage à l'autre c'est sa base. Les points  $i$  décrivent chacun l'une des droites qui joignent les points  $s_j$  et

---

(1) Cette propriété importante est le point de départ du paragraphe III.

(2) Nous verrons au paragraphe III-3, d'autres liens entre les éléments de la base d'un équipage.

(3) DUPONCO, *Géométrie moderne*, p. 60.



les quadriques  $Q_n^i$  restent inscrites dans le cône doublement circonscrit de sommet  $s_j$ . En se donnant  $n + 1$  points  $i'_j$  sur les droites qu'ils décrivent, les autres sont déterminés par l'homologie de centre  $s_j$  qui fait correspondre les  $i'_j$  aux  $i_j$ ; cette homologie détermine aussi les  $Q_n^{i'j}$  à partir des  $Q_n^i$ . Les  $n + 2$  homologies analogues de centres  $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$  admettent le même  $E_{n-1}$  axial (1), et deux quelconques d'entre elles ont pour couple commun celui des points  $i$  et  $i'$  situés sur la droite qui joint leurs centres. Chacune d'elles détermine donc les  $n + 1$  autres. D'où : *les  $n + 1$  paramètres d'un équipage de générations descriptives sont ceux d'une homologie de pôle fixe.* Toute quadrique  $Q_n^{i'j}$  provenant ainsi de  $Q_n^i$  est inscrite dans le cône de sommet  $s_j$  circonscrit à  $Q_n^i$ , et c'est là sa seule particularité. En effet, donnons-nous l'une d'elles :  $Q_n^{i'j}$ ; on peut la considérer comme projection de 2 quadriques  $Q_n$  du cône de sommet  $S_1$  et de base  $Q_n^i$  (2); leurs hyperplans  $E_n$  donnent naissance à deux équipages de générations descriptives comprenant  $Q_n^{i'j}$ . On détermine chacun d'eux par les deux homologies qui transforment  $Q_n^i$  en  $Q_n^{i'j}$ , quand on prend comme centre le sommet  $s_j$  de leur cône circonscrit commun; les  $E_{n-1}$  axiaux de chaque homologie sont ceux des  $Q_{n-1}$  d'intersection des deux quadriques (3). Donc : *Les quadriques intervenant dans les générations descriptives de  $C_n$  sont celles qui sont inscrites dans les cônes de Kummer. A chacune d'elles correspondent  $(n + 1)(n + 2)$  générations réparties dans 2 équipages.*

Les  $n$  paramètres des  $Q_n^{i'j}$  d'une même série sont ceux qui fixent une quadrique inscrite dans un cône. Nous allons voir que les  $n$  paramètres d'un équipage sont encore ceux qui fixent une quadrique  $Q_n$  passant par une  $Q_{n-1}$  donnée. Cette  $Q_{n-1}$  est double pour  $C_n$ . Nous nous proposons d'abord de la déterminer dans la génération descriptive pour revenir ensuite sur les  $Q_n^{i'j}$ .

4. La  $Q_{n-1}$  double pour  $C_n$ . — Jusqu'à présent nous n'avons fait intervenir que les cônes du faisceau  $B_{n+1}$ . Soit ( $Q_{n+1}$ ) la quadrique de ce faisceau qui passe par le point de vue  $O$ , la trace dans  $E_n$  de sa section par l'hyperplan tangent en  $O$  est la  $Q_{n-1}$  ( $\sigma$ ) double pour  $C_n$ . Elle se réduit à 2 points pour  $n = 2$ .

Les  $E_n$  polaires de  $O$  par rapport aux quadriques de faisceau  $B_{n+1}$  concourent suivant un  $E_{n-1}$  ( $\Delta$ ) situé dans le plan tangent en  $O$  à  $Q_{n+1}$ , il se projette par conséquent suivant l' $E_{n-1}$  ( $\delta$ ) de ( $\sigma$ ). Les deux plans polaires de  $O$  par rapport aux cônes  $S_1$  et  $S_2$  se coupent suivant  $\Delta$ ; le premier est défini par  $S_1$  et l' $E_{n-1}$  polaire de  $s_1$  par rapport à la quadrique de base  $Q_n^1$ ; on connaît donc un  $E_{n-2}$  de ( $\delta$ ) par l'intersection ( $r$ ) des deux  $E_{n-1}$  polaires (4) de  $s_1$  et  $s_2$  par rapport à  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  respectivement; l'emploi, dans  $E_n$ , d'une droite de section auxiliaire donne un autre point de ( $\delta$ ), qui se trouve ainsi déterminé (5).

(1) Les quadriques homologues  $Q_n^i$  et  $Q_n^{i'j}$  rencontrent donc cet  $E_{n-1}$  suivant la même  $Q_{n-1}$ .

(2) La justification analytique est immédiate.

(3) Deux quadriques  $Q_n : f + P^2 = 0$  et  $f + Q^2 = 0$  inscrites dans la même quadrique  $f = 0$  ont leur intersection décomposée suivant les sections  $Q_{n-1}$  par les deux plans  $P \pm Q = 0$ .

(4) S'ils sont confondus ils constituent ( $\delta$ ), lui-même: On en a un exemple au paragraphe 6.

(5) Cf. droite ( $\delta$ ) des points doubles apparents de l'intersection de 2 cônes du second ordre, pour  $n = 2$ .

Reste à construire  $(\sigma)$  dans  $(\delta)$ . Les faisceaux de  $Q_{n-1}$  découpés par les quadriques  $Q_{n+1}$  sur un  $E_{n-1}$  quelconque du plan  $(O, \Delta)$ , se projettent suivant des faisceaux de  $Q_{n-1}$  situés dans  $(\delta)$  et comprenant  $\delta$ . L'un de ces faisceaux, découpé par  $(\delta)$  lui-même, est défini par  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ ; un autre, provenant de  $\Delta$ , est déterminé par les cônes circonscrits à  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  de sommets respectifs  $S_1$  et  $S_2$ . Donc  $\sigma$  est commune aux deux faisceaux découpés sur  $(\delta)$  par les quadriques  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ , et par leurs cônes circonscrits de sommets respectifs  $s_1, s_2$  <sup>(1)</sup>.

La quadrique du premier faisceau contenant  $(\sigma)$  n'est autre que la section  $A_n$  de  $(Q_{n+1})$  par l' $E_n$  de figure. La section par un  $E_n$  quelconque donne une quadrique se projetant suivant une quadrique  $A'_n$ , du faisceau de l'équipage correspondant, et qui passe par  $(\sigma)$ . Inversement une  $A'_n$  quelconque passant par  $(\sigma)$  est la projection d'une  $Q_n$  de  $(Q_{n+1})$  dont l' $E_n$  fournit un équipage. Ainsi :

*Les  $n + 1$  paramètres d'un équipage sont encore ceux d'une quadrique  $A'_n$  passant par la  $Q_{n-1}$  double  $\sigma$ .  $A'_n$  recoupe  $C_n$  suivant la  $B_n$  commune aux quadriques  $Q_n^j$  de l'équipage correspondant <sup>(2)</sup>.*

Pour  $n = 2$  l'énoncé de la construction de  $\sigma$  devient : les deux points doubles sont communs aux deux involutions découpées sur  $(\delta)$  par les coniques  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$ , et par les deux couples de tangentes à ces coniques tracées par  $s_1, s_2$  respectivement.

C'est ainsi que les particularités de la mise en place de l'épure d'une cyclique (anallagmatique) sont les suivantes :

1° Les polaires de  $s_1 s_2$  par rapport à  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$  se déduisent l'une de l'autre par l'homothétie de centre  $i$  qui transforme  $s_1$  en  $s_2$  (c'est la condition pour que la droite  $\delta$  des points doubles soit à l'infini); 2° les deux coniques ont leurs axes parallèles et les couples de tangentes menées par  $s_1 s_2$ , qui sont tangentes doubles de la cyclique, ont leurs directions antiparallèles (condition pour que les deux involutions sur la droite de l'infini admettent les points cycliques comme points homologues <sup>(3)</sup>).

**§. Cas d'exception. Lien avec les générations anallagmatiques.** — Il va sans dire que la façon d'obtenir les générations descriptives de  $C_n$  par des hyperplans  $E_n$  de  $E_{n+1}$  souffre des cas d'exception que nous allons préciser en les rattachant aux générations anallagmatiques d'une  $C_n$  ayant l'ombilicale comme  $Q_{n-1}$  double  $\sigma$ .

Les plans d'exception sont, avec le cas banal de ceux qui passent par  $O$ , les plans particuliers qui contiennent  $r$  des sommets  $S_1, S_2, \dots, S_{n+2}$ .

Employons le langage des sphères. La perspective, faite de  $O$ , des points de la sphère  $(Q_{n+1})$ , est une inversion. La section de  $(Q_{n+1})$  par l' $E_n$ ,  $(S_2, S_3, \dots, S_{n+2})$

<sup>(1)</sup> Voir au paragraphe 6 le cas particulier où ces deux faisceaux coïncident.

<sup>(2)</sup> Nous indiquons au paragraphe 5 comment les points  $i$  sont liés à cette  $A'_n$ .

<sup>(3)</sup> On peut vérifier que les 4 couples de tangentes doubles d'une cyclique  $C_2$  déterminent une même involution sur  $\delta$  ayant les points doubles de  $C_2$  comme points homologues : les tangentes doubles issues d'un pôle principal  $s$ , sont, comme on sait, perpendiculaires aux asymptotes de la déférente correspondante; les directions de leurs bissectrices sont celles des axes de la déférente; elles sont les mêmes pour les 4 couples puisque les 4 déférentes sont homofocales.

se projette suivant la sphère directrice de centre  $S_1$ , tandis que la section du cône ( $S_1$ ) se projette suivant la polaire réciproque de la déférente par rapport à la sphère directrice (<sup>1</sup>). Les sections des autres cônes viennent sur les cônes du second ordre contenant la  $B_n(a_1)$ . La génération descriptive n'existe plus, mais ce cas particulier met en évidence les éléments suivants de la génération anallagmatique :

« La sphère directrice de centre  $s_1$  est celle qui passe par la  $B_n(a_1)$ . La quadrique déférente correspondante est la réciproque par rapport à cette sphère, de la quadrique  $Q_n^{-1}$  contenant ( $a_1$ ) et inscrite dans le cône circonscrit de sommet  $s_1$ . »

Avec les notations du paragraphe 3 la sphère directrice est la quadrique  $A'_n$  de l'équipage dégénéré, les points  $s_r$  représentant les  $i'_{1,r}$ , et l'homologie entre deux quadriques  $Q_n^i$  et  $Q_n^j$  donne le moyen suivant de déterminer la déférente, à partir d'une génération descriptive de  $C_n$  :

*Le plan polaire  $X_1$  de  $i_{1,2}$  par rapport à  $Q_n^2$  est l' $E_{n-1}$  axial d'une homologie qui fait correspondre la quadrique  $Q_n^{-1}$  à  $Q_n^1$ . Le centre en est  $s_1$  et les homologues des  $i'_{1,r}$  sont les  $s_r$ .*

Inversement, dégageons les relations d'un équipage quelconque avec les éléments d'une génération anallagmatique. Les deux points de  $C_n$  obtenus dans la génération descriptive, à partir de  $m_1$ , sur la droite  $s_1 m_1$ , se correspondent dans l'inversion de pôle  $s_1$ ; par ces deux points passe donc une sphère orthogonale à la sphère directrice et bitangente à  $C_n$ . Une quadrique d'un équipage quelconque se trouve alors déterminée comme enveloppe du  $E_{n-1}$  radical d'une sphère quelconque  $A'_1$  fixe et d'une famille de sphères bitangentes à  $C_n$ ; les points  $i$  associés sont les centres radicaux de  $A'_n$  et de  $n$  sphères directrices prises parmi les  $n + 2$ .

Expliquons, pour  $n = 2$ , cette génération tangentielle des quatre coniques  $Q_2$  d'un équipage construit avec un cercle quelconque  $A'$ ; le plan de l'équipage qui lui correspond est coupé par un plan tangent au cône  $S_1$  suivant une droite qui a pour projection une tangente à  $Q_2^1$ ; cette droite coupe la sphère ( $Q_3$ ) en deux points dont les perspectives appartiennent à la fois au cercle  $A'$  et au cercle bitangent. Ainsi : *L'enveloppe de l'axe radical d'un cercle fixe quelconque  $A'$  et d'un cercle variable dans les quatre familles de cercles bitangents à une cyclique est formée par les quatre coniques d'un équipage.*

Le point  $i_{1,2}$  coïncide avec le centre radical du cercle  $A'$  et des deux cercles directeurs de centres  $s_3$  et  $s_4$ . *Le quadrilatère complet associé à l'équipage a donc pour sommets les centres radicaux du cercle  $A'$  et de deux cercles directeurs pris parmi les quatre.*

Le raisonnement s'étend pour  $n$  quelconque, il conduit à l'énoncé donné plus haut.

Mentionnons encore que  $n + 1$  générations d'un équipage s'évanouissent quand l'hyperplan qui lui donne naissance contient un sommet  $S_1$ , la sphère  $A'_n$  étant

---

(<sup>1</sup>) Voir pour  $n = 2$ , DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques* et pour  $n = 3$ , SEGRE, déjà cité, p. 343.

alors orthogonale à la sphère directrice de centre  $S_1$ . Parmi les sphères de cette catégorie se trouvent les sphères bitangentes à la cyclide  $C_n$ , qui proviennent des hyperplans tangents aux cônes  $S$ .

Plus généralement, quand l'hyperplan contient  $p$  sommets  $S$ , c'est-à-dire quand la sphère  $A'_n$  est orthogonale à  $p$  sphères directrices il ne reste que  $\frac{1}{2}(n - p + 1)$  ( $n - p + 2$ ) générations descriptives dans l'équipage. Quand  $p = n + 1$ , il n'en reste aucune, et nous retrouvons le cas de la génération anallagmatique.

**6. Équipages particuliers ( $e$ ).** — Certains équipages méritent une attention spéciale, tels ceux qui proviennent d'un hyperplan passant par l' $E_{n-1}(\Delta)$  défini au paragraphe 4. Le pôle par rapport à  $(Q_{n+1})$  de cet hyperplan variable autour de  $(\Delta)$  décrit une droite qui contient  $O$ , sa trace  $\omega$  est le pôle de  $(\delta)$  par rapport à la quadrique  $A_n''$  qui détermine l'équipage. *Celui-ci provient donc d'une quadrique  $A_n''$  inscrite le long de  $\sigma$  dans un cône fixe de sommet  $\omega$ .* De plus :

*Les quadriques d'une même série des équipages déterminés par les  $A_n''$  sont inscrites dans le cône  $s_j$  de cette série le long de sa section par le plan  $(\delta)$  de  $(\sigma)$ .*

Indiquons une propriété intéressante de la  $B_n$  de base du faisceau des quadriques d'un équipage de cette nature. Cette  $B_n$  est la projection de la  $B_n$  de section par un hyperplan  $\pi$  qui contient  $\Delta$ .  $\pi$  se présente comme plan polaire de  $O$  par rapport à une quadrique du faisceau  $B_{n+1}$ , et cette quadrique est coupée par  $(\pi)$  suivant une  $Q_n$  dont la perspective est tangente à  $C_n$  en chacun de ses points de rencontre avec  $A_n''$ . Ainsi :

La  $B_n$  de base du faisceau des quadriques d'un équipage déterminé par une quadrique  $A_n''$  est la  $B_n$  de contact d'une quadrique inscrite dans  $C_n$  <sup>(1)</sup>.

Lorsque  $\sigma$  est l'ombilicale, on en déduit (pour  $n = 3$ ) : *une sphère de centre  $\omega$  coupe une cyclide suivant une biquadratique par laquelle passent : 1° une quadrique inscrite dans la cyclide <sup>(2)</sup>; 2° 4 quadriques dont chacune admet comme cône asymptote l'un des cônes doublement circonscrits à la cyclide.*

Il nous faut revenir, dans le cas de ces équipages particuliers, sur la construction de  $\sigma$ , pour laquelle la méthode du paragraphe 4 est en défaut. Prenons pour  $E_{n-1}(\delta)$  l'hyperplan de l'infini;  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  sont alors deux quadriques de centres respectifs  $s_1$  et  $s_2$ . L'homothétie de centre  $i_{1,2}$  qui amène  $s_2$  en  $s_1$  transforme  $Q_n^2$  en une quadrique  $Q_n^2$  de centre  $s_1$  qui coupe  $Q_n^1$  suivant une  $B_n$  située sur un cône du second ordre de sommet  $s_1$ . *La trace de ce cône sur  $(\delta)$  détermine  $\sigma$ .* On énoncera sans peine la forme projective de cette construction.

Par exemple, la génération descriptive d'une cyclique plane peut s'effectuer dans les conditions particulières de ce paragraphe, plus simplement qu'au paragraphe 4 : il suffit de prendre deux coniques d'axes parallèles, de centres  $s_1, s_2$ ,

(1) Cf. pour  $n = 3$  SERRE, déjà cité, p. 337.

(2) Pour  $n = 2$  il s'agit d'une conique quadrilatère à une cyclique. Cf. DARBOUX, déjà cité. Le point  $\omega$  est le centre commun des déférentes.

$i_{12}$  étant alors déterminé sur la droite  $s_1 s_2$  par les constructions effectuées sur la figure 6, où les points  $C_1, C_2$  sont homothétiques dans l'homothétie de centre  $i_{12}$  qui a  $s_1$  et  $s_2$  pour points homologues.

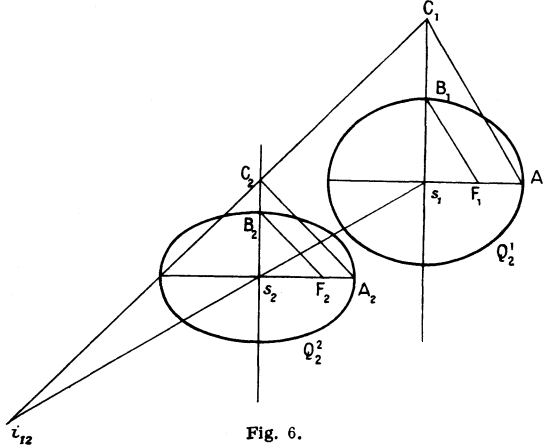


Fig. 6.

7. La courbe normale  $r_n$  de  $C_n$ . — Le cas particulier des équipages ( $e$ ) du paragraphe précédent est celui où les plans polaires des points  $s_j$  par rapport aux quadriques  $Q_n^j$  correspondantes sont confondus avec le plan ( $\delta$ ). Dans le cas général, comme il a été vu au paragraphe 4, ces plans concourent suivant un  $E_{n-2}(r)$  de ( $\delta$ ). Quand  $n = 2$ ,  $r$  est un point quelconque de la droite des points doubles, pour  $n = 3$ ,  $r$  est une droite quelconque du plan de la conique double, enfin pour  $n$  quelconque l' $E_{n-2}(r)$  varie également d'une façon arbitraire dans ( $\delta$ ) : les équipages associés à un ( $r$ ) donné proviennent en effet des  $\infty^2$  sections planes qui contiennent un  $E_{n-2}$  de ( $\Delta$ ).

Soit  $m$  un point de ( $\delta$ ), projection de  $M$  situé dans ( $\Delta$ ).  $M$  étant conjugué de  $O$  dans le faisceau  $B_{n+1}$ , ses plans polaires par rapport aux  $(n + 2)$  cônes  $S$  concourent suivant un  $E_{n-1}(M)$  passant par  $O$ , ( $M$ ) engendre, lorsque  $M$  décrit ( $\Delta$ ), le cône de sommet  $O$  du complexe polaire relatif au faisceau  $B_{n+1}$ , et sa trace constitue la congruence des  $E_{n-1}(m)$  s'appuyant en  $n - 1$  points sur la courbe rationnelle  $r_n$ , d'ordre  $n$ , lieu des pôles de ( $\delta$ ) par rapport aux quadriques du faisceau d'un équipage ( $e$ ).

*Le lieu des pôles de ( $\delta$ ) par rapport aux quadriques du faisceau d'un équipage ( $e$ ) quelconque est une courbe normale fixe ( $r_n$ ).*

Elle coïncide avec la courbe rationnelle relative à ( $\delta$ ) et au faisceau de deux quelconques des cônes  $s$  doublement circonscrits. Elle passe par les pôles  $s_1 s_2 \dots s_{n+2}$  et  $\omega$  de ( $\delta$ ) dans les quadriques  $Q_n^1, Q_n^2, \dots, Q_n^{n+2}$  et  $A_n^n$  d'un équipage ( $e$ ), par les  $n$  sommets du repère conjugué commun dans ( $\delta$ ), par les  $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$  sommets, autres que  $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$ , des repères conjugués aux

faisceaux qu'on peut former avec les cônes de Kummer. C'est ainsi qu'on obtient pour  $n = 2$ , 13 points sur une conique, et pour  $n = 3$ , 23 points particuliers situés sur une cubique gauche (<sup>1</sup>).

**8. Invariants projectifs d'un équipage.** — Les invariants projectifs de la  $B_{n+1}$  sont les rapports anharmoniques mutuels des paramètres des cônes du faisceau qu'elle détermine (cf. Chap. I, § 2), ou encore ceux de leurs sections par un  $E_n$  quelconque, puis de leurs projections, c'est-à-dire des quadriques d'un équipage. Donc :

*Les rapports anharmoniques mutuels des quadriques d'un équipage sont invariants.*

Ces invariants apparaissent aussi sur la configuration des points  $i$ . En effet la courbe du complexe polaire relative au plan  $\pi$  d'un équipage est osculatrice aux  $(n + 2)$  hyperplans  $X$  ainsi qu'à ceux du repère conjugué commun dans  $\pi$ . D'où, par projection faite de  $O$  :

Les  $n + 2$  plans  $X_j$  d'un équipage, ainsi que les  $n + 1$  plans du repère conjugué commun aux quadriques de l'équipage sont osculateurs à une même courbe rationnelle d'ordre  $n$ , sur laquelle les paramètres des plans  $X_j$  ont pour rapports anharmoniques mutuels ceux des quadriques de l'équipage.

Pour  $n = 2$  nous retrouvons la conique déjà rencontrée à la fin du paragraphe 4; le rapport anharmonique des 4 droites  $X$  sur cette conique égale celui des quatre coniques du faisceau de l'équipage; il représente le module de la quartique  $C_2$ .

Le paramètre de la quadrique  $A'_n$  qui fait partie du faisceau de l'équipage et passe par  $\sigma$ , se trouve lié d'une façon projective aux précédents, puisqu'il représente celui de la quadrique ( $Q_{n+1}$ ). Quand  $A'_n$  est une  $A''_n$  les paramètres sont ceux des points  $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$  et  $\omega$  sur la courbe  $r_n$ , ou encore ceux de l'ensemble des déférentes et de l'ombilicale pris dans leur faisceau tangentiel. Enfin, se rappelant l'origine des sphères bitangentes à une cyclide, les invariants projectifs d'un équipage apparaissent aussi comme ceux des  $n + 2$  sphères bitangentes passant par un point  $m$  quelconque sur  $C_n$ .

**9. Propriétés diverses.** — Revenons sur les 4 points obtenus par une sécante  $im_1m_2$  dans l'opération courante de la génération descriptive, soient  $m, m'$  et  $n, n'$  (fig. 7). Ce sont deux couples de points homologues pour l'inversion généralisée qui a pour centre  $s_1$ , tandis que  $m, n$  et  $m'n'$  se correspondent dans celle qui a pour centre  $s_2$ . Nous dirons que ces 4 points forment un quadrangle de points inverses. Le conjugué harmonique de  $s_1$  par rapport à  $m, m'$  décrit la projection de la section du cône  $S_1$  par le plan  $S_2S_3 \dots S_{n+2}$ , c'est-à-dire la quadrique  $Q'_n$  déjà rencontrée au paragraphe 5 à propos de la déférente. Les

---

(<sup>1</sup>) Cf. DARBOUX, *Sur une classe remarquable*, p. 169 et SEGRE, déjà cité, paragraphe 2.

droites  $mn'$  et  $m'n$  se coupent au point  $u$  qui est la projection d'un point conjugué de  $S_1$  et de  $S_2$  dans le faisceau  $B_{n+1}$ ; donc :

*Les droites qui joignent en croix les points d'un quadrangle, de points inverses, relatif à  $s_1, s_2$ , se coupent dans l' $E_{n-2}s_3s_4 \dots s_{n+2}$ .*

$s_1u$  et  $s_2u$  rencontrent  $im_1m_2$  aux points  $u_1$  et  $u_2$  situés respectivement sur  $X_2$  et sur  $X_1$ ;  $mn'$  et  $m'n$  coupent  $im_1m_2$  aux points  $v_1, v_2$ , conjugués par rapport à  $u_1, u_2$ , et homologues dans l'involution déterminée par  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$  sur la droite  $u_1u_2$ .

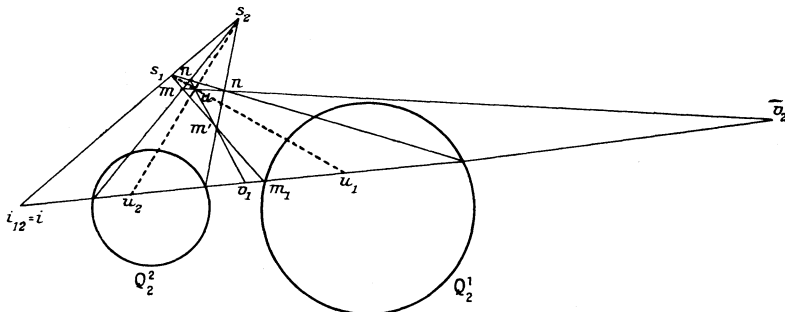


Fig. 7.

Notons encore, pour un équipage donné, une relation importante <sup>(1)</sup> entre sa  $B_n$  de base  $(\alpha)$  et la  $B_n(\alpha_1)$ . Une  $Q_{n+1}$  quelconque du faisceau  $B_{n+1}$  a pour contour apparent sur le plan de l'équipage, le point de vue étant  $S_1$ , une quadrique  $B$  passant par  $(\alpha_1)$ , tandis que sa section est une quadrique  $A$  du faisceau  $(\alpha)$ , inscrite à la précédente le long d'une  $Q_{n-1}$  dont l' $E_{n-1}$  est  $X_1$ . D'où :

Les deux  $B_n(\alpha)$  et  $(\alpha_1)$  provenant d'un même équipage sont les  $B_n$  de base de deux faisceaux de quadriques qui se correspondent homographiquement par quadriques inscrites le long d'une  $Q_{n-1}$  située dans  $X_1$ . Aux quadriques particulières  $Q_n^i$  du 1<sup>er</sup> faisceau correspondent les cônes du 2<sup>e</sup> faisceau, tandis que  $Q_n^i$  se correspond à lui-même dans les deux faisceaux.

## II. — GÉNÉRATIONS DESCRIPTIVES D'UNE CYCLIDE CUBIQUE $T_n$ .

Dans la génération descriptive d'une cyclide  $C_n$ , les cas particuliers sont si nombreux qu'une étude complète est impossible. SEGRE [cité p. 351 à 444] ne distingue pas moins de 72 espèces de cyclides, et il s'agit de l'espace à 3 dimensions seulement. Nous allons donc nous borner, dans ce chapitre, à signaler les particularités de la génération descriptive d'une cyclide cubique  $T_n$ .

(1) Elle est reprise plus loin (Chap. IV, § 7).

1° Toute cyclide cubique  $T_n$  peut s'obtenir dans  $E_n$  par projection d'une  $B_{n+1}$  de  $E_{n+1}$ , faite d'un de ses points  $O$ . Les droites  $S_1O$  et  $S_2O$  recouperont  $B_{n+1}$  en  $O_1$  et  $O_2$ , dont les perspectives  $s_1$  et  $s_2$  appartiennent aux quadriques  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ . Inversement, s'il en est ainsi,  $O$  se trouve sur  $B_{n+1}$ . Donc :

*Dans la génération descriptive d'une cyclide cubique  $T_n$  les points  $s_1, s_2$  sont situés sur  $Q_n^1, Q_n^2$  respectivement, et cette particularité est caractéristique (fig. 8).*

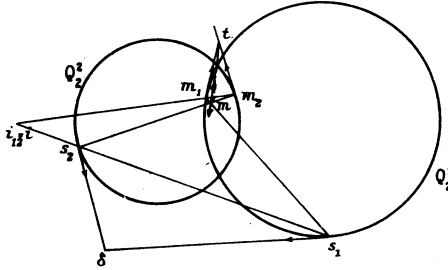


Fig. 8.

Ajoutons :

*Les deux  $E_{n-1}$  tangents à  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  en  $s_1$  et  $s_2$  se coupent suivant un  $E_{n-2}(\delta)$  appartenant à  $T_n$ .*

( $\delta$ ) est en effet la trace de l' $E_{n-1}(\Delta)$  tangent à  $B_{n+1}$  en  $O$ . Il s'obtient dans la génération descriptive par la position  $i s_1 s_2$  de la sécante  $i m_1 m_2$ ; en prenant pour  $s_1 m_1$  une droite de  $Q_n^1$ , c'est-à-dire une génératrice du cône de section par l' $E_{n-1}$  tangent en  $s_1$ , on voit que la droite  $s_1 m_1$  appartient à  $T_n$ . D'où :

*$T_n$ , qui touche  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  en  $s_1$  et  $s_2$ , possède aussi les cônes de section de ces quadriques par leurs plans tangents en ces points.*

Cette génération fait partie d'un équipage dont les sommets sont les  $n + 2$  points de contact des  $E_{n-1}$  tangents à  $T_n$  menés par son  $E_{n-2}(\delta)$ ; ceux-ci recouperont  $T_n$  suivant des cônes  $Q_{n-1}$  : les quadriques de base de l'équipage en contiennent une chacune et leur  $B_n$  commune ( $\alpha$ ) est sur  $T_n$ . Telle est la structure d'un équipage.

A chaque quadrique  $Q_n^i$  contenant le cône  $Q_{n-1}^i$  correspond un seul équipage, car  $Q_n^i$  est la projection d'une section plane du cône  $S_i$  (et non de 2 comme au paragraphe I, 3). En faisant varier  $Q_n^i$  on obtient les  $\infty^{n+1}$  équipages de générations descriptives de  $T_n$ .]

2° On peut établir les distinctions suivantes :

*Quand  $n > 4$ , les  $n + 2$  cônes  $Q_{n-1}$  rencontrent ( $\delta$ ) suivant des  $Q_{n-2}$  d'un faisceau dont la base est la  $B_{n-2}$  des points doubles de  $T_n$  (cf. Chap. I, § 1).*

*Pour  $n = 3$ ,  $\delta$  est une droite de  $T_3$ , surface cubique générale de l'espace. Le plan  $\delta s_1$  la recoupe suivant deux droites qui se croisent en  $s_1$ , et les 5 couples*



de droites de  $T_3$ , obtenues de cette manière, déterminent sur  $\delta$  une même involution.

Pour  $n = 2$ ,  $\delta$  est un point ordinaire d'une cubique plane, les 4 points  $s_1, s_2, s_3, s_4$  se trouvent aux points de contact des tangentes à la cubique menée par  $\delta$ . La configuration des coniques d'un équipage est celle de 4 coniques tangentes à la cubique  $T_2$  en  $s_1, s_2, s_3, s_4$  et se recoupant en 4 points ( $\alpha$ ) de  $T_2$ . Ces 4 points ( $\alpha$ ) n'ont aucune particularité sur la cubique, leur donnée détermine  $\delta$ . Remarquons aussi que les points de contact des tangentes à la cubique menées par  $s_1$  sont les 4 points  $\alpha_1$ .

3° Parmi les quadriques  $Q'_n$  fournissant des équipages, la projection de la section du cône  $S_1$  par l'hyperplan  $S_2, S_3, \dots, S_{n+2}$  fait exception. Elle passe par la  $B_n(\alpha_1)$  et contient le cône  $Q'_{n-1}$  précédemment défini. Elle constitue (§ 1, 9) le lieu des conjugués harmoniques de  $s_1$  par rapport aux 2 points de  $T_n$  situés sur une sécante passant par  $s_1$ .

Soit maintenant une quadrique quelconque  $k$  passant par ( $\alpha_1$ ). Elle est la projection de la section  $K$  par l'hyperplan  $S_2 S_3 \dots S_{n+2}$  d'une certaine quadrique  $Q_{n+1}$  du faisceau  $B_{n+1}$ ; les génératrices de  $Q_{n+1}$  menées par  $O$  rencontrent  $K$ , ainsi que  $T_n$ ; leurs traces décrivent donc une  $Q_{n-1}$  commune à  $k$  et  $T_n$ ; son plan  $E_{n-1}$  passe par ( $\delta$ ) puisque c'est la trace du plan tangent en  $O$  à  $Q_{n+1}$ ; c'est aussi le plan polaire de  $s_1$  par rapport à  $k$ , puisque  $K$  est la quadrique de contact du cône circonscrit à  $Q_{n+1}$  de sommet  $S_1$ . On en déduit pour la  $T_n$ , la génération de Mac-Laurin :

Le lieu des points de contact des tangentes menées par  $s_1$  aux quadriques  $k$  du faisceau ponctuel qui a pour base la  $B_n(\alpha_1)$  est une cyclide cubique  $T_n$ ; les plans polaires de  $s_1$  par rapport aux quadriques  $k$  concourent suivant l' $E_{n-2}(\delta)$  de  $T_n$ , et les sommets du repère conjugué commun sont  $n + 1$  points de la  $T_n$  où le plan tangent passe par ( $\delta$ ).

Les points de  $T_n$  situés sur une sécante passant par  $s_1$  sont les deux points de contact des quadriques du faisceau tangentes à cette droite : ils sont conjugués par rapport à toutes les quadriques  $k$ .

4° Les inversions généralisées qui conservent une  $T_n$  ont pour pôles l'un des  $n + 2$  points  $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$  et pour sphère directrice l'une quelconque des quadriques  $k$  du faisceau associé ( $n \geq 4$ ). Quand  $n = 3$  il y a 5 pôles possibles attachés à l'une des 27 droites ( $\delta$ ) d'une surface cubique, soit en tout 135 pôles d'inversions : chaque droite en contient 10 mais il passe deux droites par chacun d'eux. Quand  $n = 2$  tout point de la cubique peut être pris pour pôle. Il en résulte en particulier :

Si 3 points d'une cubique sont alignés, 2 quelconques d'entre eux sont conjugués communs par rapport aux coniques passant par les points de contact des tangentes à la cubique issues du 3° point.

5° Remarquons en terminant que les rapports anharmoniques mutuels des quadriques d'un équipage sont ceux des plans tangents à  $T_n$  menés par ( $\delta$ )

(c'est-à-dire des plans tangents en  $O$  aux cônes du faisceau  $B_{n+1}$ , donc de ces cônes eux-mêmes). En particulier pour  $n = 2$  le rapport anharmonique d'un équipage est celui des 4 tangentes à la cubique menées par l'un quelconque de ses points : il représente son module.

### III. — APPLICATIONS.

**1. Introduction.** — Raisonçons d'abord, pour plus de clarté, en géométrie plane.

La structure de la base d'un équipage, étudiée au paragraphe I, 2 et constituée par 4 coniques  $Q$  d'un faisceau et 6 points  $i$  aux sommets d'un quadrilatère complet, nous a montré qu'il existe entre ces éléments géométriques des relations indépendantes du choix des points  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (*fig. 4*). Elle invite donc à traiter le problème suivant :

*Déterminer le quadrilatère à partir des 4 coniques.* — Rappelons à cet effet leurs liens; d'après la construction même de l'équipage, la droite  $X_1$  qui joint  $i_{23}, i_{24}, i_{34}$  coupe  $Q^2, Q^3, Q^4$  en des points tels que les tangentes se rencontrent aux 4 points  $\alpha_1$  sur  $Q^1$ . De même la droite  $X_3$  coupe  $Q^1, Q^2$  en des points tels que les tangentes se coupent sur  $Q^3$ , tandis que  $X^4$  coupe  $Q^1$  et  $Q^2$  en des points où les tangentes se croisent sur  $Q^3$ . Nous sommes ainsi amenés à traiter le problème auxiliaire :

Étudier l'intersection des tangentes à  $Q^1$  et  $Q^2$  en leurs points de rencontre avec une droite  $X$ .

Soit maintenant  $n$  quelconque. La base de l'équipage est formée de  $n + 2$  quadriques  $Q_n$  d'un même faisceau et d'un ensemble de points  $i$  à l'intersection de  $n + 2$  hyperplans  $X$  (§ I, 2). D'après la détermination même de l'équipage, l'un des plans tels que  $X_1$  est coupé par les  $n + 1$  quadriques associées suivant des  $Q_{n-1}$  telles que les hypercônes circonscrits se rencontrent sur la quadrique  $Q_n^1$  suivant la  $B_n(\alpha_1)$ . De même, les  $n$  plans  $X_2, X_3, \dots, X_{n+2}$ , qui passent par  $i_{12}$ , coupent les quadriques  $Q_n^1, Q_n^2$  suivant des  $Q_{n-1}$  telles que les hypercônes circonscrits se rencontrent sur les quadriques  $Q_n^3, \dots, Q_n^{n+2}$  respectivement suivant les  $B_n(\alpha_3), \dots, (\alpha_{n+2})$ .

Nous allons donc préciser le problème préliminaire :

**PROBLÈME 1.** — Étudier la  $B_n$  commune aux hypercônes circonscrits à deux quadriques  $Q_n^1, Q_n^2$  le long des quadriques de section par un hyperplan  $X$ .

Nous appliquerons ensuite le résultat à la solution du problème suivant :

**PROBLÈME 2.** — Déterminer les points  $i$  de la base d'un équipage à partir des  $n + 2$  quadriques du faisceau de cet équipage.

**2. Solution du problème préliminaire.** — Procédons analytiquement, indépendamment du nombre des dimensions. Les équations des 2 quadriques, rapportées

à un repère conjugué commun, sont

$$f \equiv \sum a_k(x_k)^2 = 0, \quad g \equiv \sum b_k(x_k)^2 = 0$$

et celle du plan X

$$X \equiv \sum u_k x_k = 0.$$

Les cônes circonscrits le long des sections de  $f$  et  $g$  par X ont pour équations

$$(X)^2 - f \sum \frac{(u_k)^2}{a_k} = 0, \quad (X)^2 - g \sum \frac{(u_k)^2}{b_k} = 0.$$

Leur  $B_n$  commune est donc située sur la quadrique  $\Gamma$  d'équation

$$(1) \quad f \sum \frac{(u_k)^2}{a_k} - g \times \sum \frac{(u_k)^2}{b_k} = 0;$$

$\Gamma$  fait partie du faisceau  $f, g$ , C'est un premier résultat. Précisons, en introduisant les points transformés de X dans les réciprociétés qui échangent  $f$  et  $g$ . Leurs coordonnées, données par  $(x_k)^2 = \frac{(u_k)^2}{a_k b_k}$ , vérifient (1). On en déduit :

**THÉORÈME 1.** — *Les hypercônes circonscrits à 2 quadriques  $Q_n^1, Q_n^2$  le long des quadriques de section par un hyperplan quelconque X se coupent suivant une hyperbiquadratique  $B_n$  appartenant à une quadrique  $\Gamma$  du faisceau ponctuel défini par  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ .  $\Gamma$  est transformée de la quadrique  $\Gamma'$  du faisceau tangentiel  $Q_n^1, Q_n^2$ , tangente à X, dans l'une quelconque des  $2^n$  réciprociétés qui échangent  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ .*

L'énoncé prend, pour  $n = 2$ , la forme suivante :

**THÉORÈME 2.** — *Les tangentes aux 4 points communs à une droite X quelconque et 2 coniques  $Q^1, Q^2$  se coupent en 4 points d'une conique  $\Gamma$  du faisceau ponctuel  $Q^1, Q^2$ ;  $\Gamma$  est transformée de la conique  $\Gamma'$  du faisceau tangentiel  $Q^1, Q^2$ , tangente à X, dans l'une quelconque des 4 réciprociétés qui échangent,  $Q^2$ .*

La 1<sup>re</sup> partie de ce résultat de géométrie plane se trouve dans CHASLES (*Sections coniques*, p. 300), qui signale même une corrélation entre  $\Gamma$  et une conique  $\Gamma'$ . J'ai donc seulement précisé cette corrélation, par une méthode s'appliquant aux hyperespaces, en vue de la résolution générale du problème 2. Notons un cas particulier du théorème général, pour  $n = 3$  :

Les cônes circonscrits à 2 quadriques le long des sections par un plan tangent à une conique du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, se rencontrent suivant une biquadratique située sur le cône corrélatif faisant partie de leur faisceau ponctuel (1).

*Exemple.* — Sections de 2 quadriques homofocales par un plan isotrope.

(1) On énoncera sans peine les résultats corrélatifs du théorème général et de ses cas particuliers.

Il est également possible de donner une solution géométrique du théorème 1 valable quel que soit le nombre des dimensions de l'espace.

Considérons  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  dans  $E_n$  comme les contours apparents vus d'un même point  $O$  de deux quadriques  $Q_{n+1}^1$  et  $Q_{n+1}^2$  de  $E_{n+1}$ . Le cône de sommet  $O$  dans le faisceau qu'elles déterminent a pour trace dans  $E_n$  une quadrique  $\Gamma$  du faisceau ponctuel  $Q_n^1, Q_n^2$ . Un hyperplan tangent commun à  $Q_{n+1}^1$  et  $Q_{n+1}^2$ , de trace  $X$  dans  $E_n$ , coupe chacune des quadriques suivant un cône dont la projection faite de  $O$  coïncide avec chacun des cônes circonscrits à  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  le long de leurs sections par  $X$ ; l'intersection de ces deux cônes appartient donc à la projection de la  $B_{n+1}$  commune aux deux quadriques  $Q_{n+1}$ , c'est-à-dire à  $\Gamma$ .

Échangeons  $Q_{n+1}^1$  et  $Q_{n+1}^2$  par une réciprocity. Le cône du faisceau ponctuel, de sommet  $O$  et de base  $\Gamma$ , a pour homologue une quadrique  $\Gamma'$  située dans  $E_n$ , tangente à  $X$ , réciproque de  $\Gamma$  dans une réciprocity qui échange  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ .

La figure précédente, dans  $E_{n+1}$ , pouvant être construite à partir des éléments arbitraires  $Q_n^1, Q_n^2$  et  $X$  de  $E_n$ , le théorème 1 est démontré.

**3. Détermination de la base d'un équipage à partir de  $n + 2$  quadriques  $Q_n$  d'un faisceau ponctuel.** —  $n = 2$  (fig. 4). — Nous nous donnons 4 coniques  $Q^1, Q^2, Q^3, Q^4$ , d'un faisceau. L'étude faite au paragraphe 1 et le résultat obtenu au paragraphe 2 (th. 2) montrent que la conique  $Q^3$  est corrélative de la conique  $Q^4$  tangente à  $X_3$  et faisant partie du faisceau tangentiel  $Q^1, Q^2$ .  $Q^3$  est donc connu. De plus (§ I-2)  $X_3$  est un rayon double de l'involution des tangentes issues de  $i_{12}$  aux coniques du faisceau tangentiel  $Q^1, Q^2$ .  $Q^3$  passe donc par  $i_{12}$ . On voit de même que  $Q^4$  passe par  $i_{12}$ . La détermination du point  $i_{12}$  est ainsi résolue par la propriété suivante :

*Le point  $i_{12}$  est l'un des 4 points d'intersection des transformées de  $Q^3$  et  $Q^4$  dans une réciprocity qui échange  $Q^1, Q^2$ .*

$i_{12}$  étant ainsi choisi,  $X_3$  et  $X_4$  sont les tangentes en ce point à  $Q^3$  et  $Q^4$ ,  $X_1$  et  $X_2$  les polaires de  $i_{12}$  par rapport à  $Q^2$  et  $Q^1$ . Le quadrilatère  $X_1, X_2, X_3, X_4$  est donc déterminé. Les 4 points  $i_{12}$  obtenus étant deux à deux symétriques <sup>(1)</sup> par rapport aux côtés du triangle conjugué commun il en est de même des 4 quadrilatères qu'ils déterminent. Ainsi :

*La base d'un équipage de générations descriptives est entièrement déterminée par 4 coniques d'un faisceau, aux symétries près par rapport aux côtés du triangle conjugué commun, qui donnent en tout 4 solutions.*

**REMARQUE.** — Les 4 coniques déterminent le quadrilatère. Inversement donnons-nous les 4 droites  $X$ . On peut prendre  $Q^1$  arbitrairement conjuguée au triangle  $i_{12}i_{13}i_{14}$  et  $Q^2$  conjuguée au triangle  $i_{12}i_{23}i_{24}$ ; alors la construction du quadrilatère à partir de la génération descriptive  $i_{12}Q_1Q_2$  donne précisément les

---

<sup>(1)</sup> Il s'agit de la symétrie généralisée définie en géométrie projective par le changement de signe d'une coordonnée dans ce repère.

4 droites X. La base de l'équipage n'est donc pas déterminée par ces droites; elle dépend de 4 paramètres (1).

*n quelconque.* — La méthode employée pour  $n=2$  s'étend facilement à l'espace et aux hyperespaces. Soient  $n+2$  quadriques  $Q_n^1, \dots, Q_n^{n+2}$  d'un faisceau. L'étude faite au paragraphe 1 et le résultat obtenu au paragraphe 2 (th. 1) montrent que la quadrique  $Q_n^3$  est corrélative de la quadrique  $Q_n^2$ , tangente à  $X_3$ , du faisceau tangentiel  $Q_n^1, Q_n^2$ , dans une réciprocity qui échange  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ ;  $Q_n^3$  est donc connu. De plus  $X_3$  est une des faces du repère conjugué aux cônes de sommet  $i_{12}$  circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel  $Q_n^1, Q_n^2$  (Chap. III, § I-2),  $Q_n^3$  passe donc par  $i_{12}$ ; il en est de même pour  $Q_n^4, \dots, Q_n^{n+2}$ . La détermination du point  $i_{12}$  est ainsi résolue par la propriété suivante :

*Le point  $i_{12}$  est l'un des  $2^n$  points d'intersection des transformées de  $Q_n^3, \dots, Q_n^{n+2}$  dans une réciprocity qui échange  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$ .*

$i_{12}$  étant ainsi choisi,  $X_3, X_4, \dots, X_{n+2}$  sont les plans tangents en ce point à  $Q_n^3, Q_n^4, Q_n^{n+2}, X_1$  et  $X_2$  les plans polaires de  $i_{12}$  par rapport à  $Q_n^2$  et  $Q_n^1$ . Les  $2^n$  points  $i_{12}$  obtenus sont deux à deux symétriques par rapport aux faces du repère conjugué commun aux quadriques du faisceau donné. Ainsi :

*La base d'un équipage de générations descriptives est entièrement déterminée dans  $E_n$  par  $n+2$  quadriques  $Q_n$  d'un faisceau ponctuel, aux symétries près par rapport aux faces du repère conjugué commun qui donnent en tout  $2^n$  solutions.*

Soit 8 dans l'espace à 3 dimensions.

REMARQUE. — Les  $n+2$  plans X ne suffisent pas à eux seuls pour déterminer la base d'un équipage.  $Q_n^1$  pouvant être arbitrairement choisie conjuguée par rapport au repère formé par  $X_2, X_3, \dots, X_{n+2}$  et  $Q_n^2$  conjuguée par rapport au repère formé par  $X_1, X_3, \dots, X_{n+2}$ , celle-ci dépend de  $2n$  paramètres.

4. **Conséquences.** — Les cubiques planes admettant pour base d'un équipage les 4 coniques  $Q^1, Q^2, Q^3, Q^4$  sont celles qui touchent ces 4 coniques, et qui passent par leurs 4 points communs, les points de contact étant  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (§ I-1<sup>o</sup>). L'existence de 4 quadrilatères fixes associés aux 4 coniques pour former la base d'un équipage, justifie donc le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Il y a 4 familles  $\infty^1$  de cubiques tangentes à 4 coniques d'un faisceau et passant par leurs points de base. Les droites qui joignent les points de contact sur 2 coniques forment pour chaque famille 6 faisceaux linéaires fixes.*

Les 4 familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport aux côtés du triangle conjugué commun (2).

---

(1) La question est de même nature qualitative que la suivante : un faisceau de coniques détermine son triangle conjugué commun, mais inversement, celui-ci étant fixé, le faisceau n'est pas déterminé.

(2) Voir au paragraphe 5 l'enveloppe de chaque famille.

Pour une cyclique (quartique à 2 points doubles) le problème traité donne directement :

L'existence de 4 familles  $\infty^3$  de cycliques passant par les points de base de 4 coniques données d'un faisceau, et dont les 4 couples de tangentes doubles soient respectivement tangents à ces 4 coniques. Les droites joignant les pôles principaux <sup>(1)</sup> passent par les sommets d'un quadrilatère complet attaché à chaque famille.

C'est aussi, envisagé sous un autre aspect, le problème de la détermination du quadrangle des 4 points  $\alpha_1$  sur  $Q_1$ , quand on se donne  $Q^1, Q^2, Q^3, Q^4$  <sup>(2)</sup>, donc encore celui de la détermination du quadrilatère corrélatif concernant 4 coniques homofocales. Or c'est sa construction qui permet de déterminer les éléments d'une cyclique (anallagmatique) admettant 4 déférentes homofocales données <sup>(3)</sup>. On en déduit :

L'existence et la détermination de 4 cycliques admettant 4 déférentes (homofocales) données. On passe de l'une d'elles aux autres par symétries par rapport aux axes des déférentes.

En suivant la même voie pour l'espace, on trouve :

**THÉORÈME 3'.** — Il y a 8 familles  $\infty^2$  de surfaces cubiques tangentes à 5 quadriques données d'un faisceau et passant par leur biquadrique commune <sup>(4)</sup>. Les 10 droites qui joignent les points de contact sur deux d'entre elles passent, pour chaque famille, par 10 points fixes.

Ces familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie généralisée par rapport aux faces du tétraèdre conjugué commun <sup>(5)</sup>.

L'existence de 8 systèmes de 5 plans pouvant être associés à 5 quadriques données d'un faisceau pour constituer la base d'un équipage entraîne encore :

L'existence de 8 familles  $\infty^1$  de cyclides passant par la biquadratique commune à 5 quadriques et dont les cônes de Kummer sont respectivement circonscrits à ces 5 quadriques. Les 10 droites joignant les pôles principaux passent pour chaque famille par 10 points fixes à l'intersection de 5 plans pris 3 à 3.

C'est encore le problème de la détermination de la biquadratique ( $\alpha_1$ ) qui se trouve résolu, les données étant  $Q_3^1, Q_3^2, Q_3^3, Q_3^4, Q_3^5$ . C'est aussi celui de la recherche de la développable corrélatrice concernant 5 quadriques homofocales. Énonçons-le :

Trouver une développable circonscrite à  $Q_3^1$  et dont les coniques doubles appar-

---

<sup>(1)</sup> Points tels que  $s_1, s_2$ .

<sup>(2)</sup> Quand on se donne seulement  $Q^1$  et le faisceau ponctuel, sans préciser  $Q^2, Q^3, Q^4$ , il existe une infinité de tels quadrangles  $\alpha_1$ , comme cela résulte d'un lemme exposé par LEBESGUE dans son traité sur les coniques (Chapitre IV sur les *Polygones de Poncelet*).

<sup>(3)</sup> DARBOUX, *Sur une classe remarquable*, p. 36.

<sup>(4)</sup> La surface cubique recoupe alors la quadrique tangente suivant les deux génératrices du point de contact.

<sup>(5)</sup> Voir au Chapitre IV l'enveloppe de chaque famille.

tiennent à  $Q_3^2, \dots, Q_3^5$ , homofocales à  $Q_3^1$ . Or c'est cette recherche qui permet la détermination des éléments d'une cyclide (anallagmatique) admettant 5 déférentes homofocales données.

Il y a donc 8 cyclides admettant 5 déférentes homofocales données. Elles se déduisent les unes des autres par symétrie par rapport aux plans principaux des déférentes.

Les résultats se présentent maintenant d'eux-mêmes pour  $n$  quelconque. Il est inutile de répéter : ils concernent  $2^n$  familles de cyclides cubiques  $T_n$ , ou de cyclides du 4<sup>e</sup> ordre  $C_n$ , ou  $2^n$  cyclides (anallagmatiques) dont les  $n + 2$  déférentes sont données.

5. **Courbe E de la base d'un équipage.** — *Cas du plan.* — Dans la génération descriptive de la quartique  $C_2$ , le point  $t$  de la tangente  $mt$  en  $m$  se construit avec les éléments  $i_{12}, Q_2^1, Q_2^2$  de la base d'un équipage comme intersection de 2 tangentes à  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$  en 2 points  $m_1, m_2$  alignés avec  $i$  (fig. 4).

Son lieu est une courbe E liée à la base de l'équipage, qui se présente comme une section plane de la développable engendrée par les tangentes à une biquadratique. Donc :

*Le point t commun aux tangentes à  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$  en deux points variables  $m_1, m_2$  alignés avec le point fixe  $i$ , décrit une courbe E du 8<sup>e</sup> ordre, admettant les 4 points  $\alpha$  pour points de rebroussement.*

Nous appellerons descriptive une telle génération de E. D'où : *Il existe 6 générations descriptives d'une courbe E.*

La courbe E passe par les 4 points  $\alpha$ , où elle est tangente à la conique  $Q_2^1$ .

*La courbe E est ainsi quadritangente à chacune des coniques  $Q_2^1, Q_2^2, Q_2^3, Q_2^4$ .*

Elle admet, en plus des quatre points de rebroussement, seize points doubles répartis quatre par quatre sur les côtés du quadrilatère de l'équipage. Ils proviennent des courbes doubles de la développable, situées dans les faces du tétraèdre conjugué commun à la biquadratique. Ceux qui appartiennent à  $X_1$  s'obtiennent par intersection de  $X_1$  avec la transformée quadratique de  $Q_2^1$  dans le faisceau qui a les quatre points  $\alpha$  pour base. E a le genre 1, comme la  $C_2$ , lieu de  $m$ , avec laquelle elle est en correspondance birationnelle. Enfin l'existence de quatre bases d'équipages possibles associés à quatre coniques d'un faisceau entraîne la détermination de quatre courbes E quadritangentes à chacune d'elles, qui admettent leurs points communs comme rebroussements.

A chaque base d'équipage on peut faire correspondre une famille  $\infty^4$  de cubiques, passant par les quatre points  $\alpha$  communs à ces quatre coniques et tangentes à chacune d'elles. Les points de contact avec  $Q_2^1$  et  $Q_2^2$  sont  $s_1, s_2$  alignés avec  $i$ ; le point  $\delta$  d'intersection des tangentes en  $s_1$  et  $s_2$  appartient à la cubique et à E, et il y a contact des deux courbes en ce point. Par conséquent *chacune des quatre familles de cubiques T tangentes aux quatre coniques  $Q_2^1, Q_2^2, Q_2^3, Q_2^4$  et passant par leurs quatre points communs enveloppe en outre une courbe E.*

Si du point de contact avec E on mène les quatre tangentes à la cubique T, les points de contact  $s_1, s_2, s_3, s_4$  sont les points où T touche  $Q_2^1, Q_2^2, Q_2^3, Q_2^4$ .

Notons encore que les tangentes d'inflexion d'une cubique T sont des tangentes à E, qu'elles admettent donc pour enveloppe (4).

CHAPITRE IV.

La développée définie par une hyperbiquadratique (2).

I. — TANGENTES PRINCIPALES D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE.

Il faut, en vue d'étendre à l'espace et aux hyperespaces les résultats qui concernent la courbe E, préciser la définition et les propriétés d'un lieu de tangentes particulières à une  $B_n$ , qui généralise, pour notre but, le lieu des tangentes à une biquadratique ordinaire,

Nous désignons par  $V_p$  une variété à  $p$  dimensions dans  $E_n$ , par  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  l'étendue du  $n$  — vecteur de l'espace linéaire  $E_n$ , défini par les vecteurs  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

1. Tangentes principales d'une  $V_{n-2}$  de  $E_n$ . — Nous allons montrer l'existence en chaque point M de la  $V_{n-2}$ , de  $n - 2$  tangentes, appelées principales, qui engendrent une  $V_{n-1}$  dont l'hyperplan tangent, le même tout le long de l'une d'elles, généralise ainsi le plan osculateur à une courbe gauche. L'hyper-surface  $V_{n-1}$  est donc, suivant l'expression de L. Gauthier (Thèse, Paris, 1944, p. 10) une variété  $n - 2$  développée.

Soit  $M(u_i)$ , où  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , le point qui décrit la  $V_{n-2}$  dans  $E_n$ . Nous supposons l'existence du  $E_{n-2}$  tangent défini par les vecteurs  $\frac{\partial M}{\partial u_i}$ ; le point P qui décrit l'une de ses droites D est tel que  $\vec{OP} = \vec{OM} + t \sum_i (x_i \frac{\partial M}{\partial u_i})$  ( $t$  variant seul).

Lorsque les  $2n - 4$  vecteurs  $\frac{\partial M}{\partial u_i}$  et  $\sum_i (\frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} x_i)$ , dont nous supposons l'existence, sont dans un même  $E_{n-1}$ , celui-ci est tangent à la variété  $V_{n-1}$ , lieu de la droite D, tout le long de D. Il faut donc, et il suffit pour cela, que les  $x_i$  soient déterminés en chaque point par les  $n - 3$  relations suivantes, où  $j = 2, 3, \dots, n - 2$

$$(1) \quad \left[ \frac{\partial M}{\partial u_1}, \frac{\partial M}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_i \left( \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_i} x_i \right), \sum_k \left( \frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_k \right) \right] = 0.$$

(1) La tangente à E au point courant  $t$  est la trace du plan osculateur au point M correspondant de la biquadratique, c'est-à-dire celle du plan tangent à la quadrique du faisceau qui contient la tangente en M. Or  $t$  détermine sa conique A de section, du faisceau ( $a$ ), d'où la conique B du faisceau ( $\alpha$ ) (§ I, 9), et la 2<sup>e</sup> tangente menée de  $t$  à cette conique donne la construction de la tangente à E en  $t$ .

(2) Certains résultats de ce Chapitre figurent dans une Note aux Comptes rendus (Lesieur, mai 1945, t. 220, pp. 724-726).



Donnons une interprétation géométrique du système (1) qui en fournit aussi la solution. Faisons passer par la  $V_{n-2}$  une  $V_{n-1}$  quelconque; nous pouvons la définir par  $M(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, \lambda)$  où  $\lambda = 0$  caractérise la  $V_{n-2}$ . Le cône des tangentes de la section de  $V_{n-1}$  par l' $E_{n-2}$  tangent à la  $V_{n-2}$  en  $M$ , a pour équation dans le repère  $\frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}$

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial M}{\partial \lambda}, \frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_{jk} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_j x_k \right) \right] = 0.$$

Il varie,  $M$  étant fixé, dans un faisceau linéaire. Le paramètre est celui de l'hyperplan tangent en  $M$  à la  $V_{n-1}$ , constitué par  $E_{n-2}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ . Le plan polaire du point  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$  a pour équation

$$(3) \quad \sum_j X_j \left[ \frac{\partial M}{\partial \lambda}, \frac{\partial M}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u_{n-2}}, \sum_k \left( \frac{\partial^2 M}{\partial u_j \partial u_k} x_k \right) \right] = 0.$$

Pour une solution  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$  de (1) et le cône particulier défini par  $\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \sum \left( \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_i} x_i \right)$ , ce plan polaire s'évanouit. Le point considéré est alors point double du cône correspondant qui admet une droite double, arête par conséquent, du repère conjugué commun de sommet  $M$  aux cônes du faisceau (2). La réciproque est vraie. Donc

**THÉORÈME 4.** — *Les tangentes principales sont les  $(n - 2)$  arêtes du repère conjugué commun au faisceau des cônes des tangentes pour les sections par  $E_{n-2}$  des variétés  $V_{n-1}$  passant par la  $V_{n-2}$ .*

Il est aisé de montrer que

**THÉORÈME 4'.** — *L'hyperplan osculateur correspondant à la tangente principale  $MP$  est la limite de l'hyperplan défini par l' $E_{n-2}$  tangent en  $M$  et le point  $N$  de la  $V_{n-2}$  quand  $MN$  tend vers  $MP$ .*

**2. Tangentes principales d'une  $B_n$ .** — Dans le cas particulier d'une hyper-biquadratique, les tangentes principales en  $M$  sont les arêtes du repère conjugué commun aux cônes de section des quadriques du faisceau  $B_n$ , par l' $E_{n-2}$  tangent en  $M$  à la  $B_n$ .

Dans l'espace à quatre dimensions la  $B_4$  est une  $V_2$ ; son  $E_2$  tangent en  $M$  coupe les quadriques du faisceau suivant deux génératrices qui restent conjuguées par rapport aux deux tangentes principales  $D_1 D_2$ . *Celles-ci sont les droites de contact avec  $E_2$  de deux quadriques particulières du faisceau dont les hyperplans tangents en  $M$  constituent les deux hyperplans osculateurs à la  $B_4$  en  $M$ .*

Plus généralement, pour une  $V_2$  quelconque située dans  $E_4$ , les deux tangentes principales en  $M$  sont les rayons doubles de l'involution signalée par Kommerel qui les appelle *asymptoten richtungen* (1). Dans la projection de la  $V_2$  faite

(1) KOMMEREL, *Flächen in ebenen Raum von vier dimensionen* (Math. Annalen, 1905). Voir aussi FORSYTH, *Geometry of four dimensions*, Cambridge 1930, vol. II, p. 246, où il est question de cette

d'un point quelconque suivant une surface de l'espace ordinaire, ces droites ne se projettent pas suivant des tangentes asymptotiques, comme nous allons le voir sur l'exemple de la  $B_n$ , où elles donnent par contre des directions principales. Ce dernier nom paraît donc mieux justifié.

**3. Projection des tangentes principales d'une  $B_n$ .** — La projection d'une  $B_n$ , faite d'un point  $O$ , est une cyclide  $C_{n-1}$ . Utilisons pour la détermination des tangentes principales la propriété du théorème 4, en coupant les quadriques du faisceau  $B_n$  par l' $E_{n-2}$  tangent en  $M$ . Celle qui passe par  $O$ , ou *sphère*, est coupée suivant un cône isotrope, qui se projette suivant un cône isotrope de sommet  $m$ ; celle qui est tangente à  $MO$  en  $M$  est coupée suivant un cône qui se projette suivant le cône des tangentes asymptotiques en  $m$ , à la cyclide; il est en effet formé par des droites qui la coupent en trois points confondus en  $m$ . Les tangentes principales se projettent donc suivant les arêtes du repère conjugué commun au cône isotrope et au cône asymptotique en  $m$ , c'est-à-dire suivant les axes de ce dernier, suivant les tangentes principales.

*Les tangentes principales d'une hyperbiquadratique  $B_n$  se projettent sur un  $E_{n-1}$  suivant les directions principales d'une cyclide (1).*

*Remarque.* — Cette propriété subsiste pour la cyclide cubique  $T_{n-1}$  obtenue en projetant la  $B_n$  d'un de ses points  $O$ , sauf pour les tangentes principales de  $O$ , qui donnent chacune un point; soit  $P$  l'un d'eux. Le plan tangent en  $P$  à la cyclide est la trace de l'hyperplan osculateur en  $O$  à la  $B_n$ , le long de  $OP$ : c'est en effet la limite de la trace de l'hyperplan défini par l' $E_{n-2}$  tangent et  $ON$  quand  $ON$  tend vers  $OP$ , donc d'après 4' (§ 1), de l'hyperplan osculateur lui-même.

**4. Ordre de  $F$ .** — Soit  $F$  la variété algébrique lieu des tangentes principales d'une  $B_n$ . Indiquons une méthode permettant d'obtenir son équation, et par suite son ordre. Un point  $P$  de  $F$  est situé sur une tangente principale  $MP$ . Les hyperplans polaires de  $P$  par rapport aux  $Q_n$  du faisceau  $B_n$  concourent suivant un  $E_{n-2}\pi$ ; celui-ci contient évidemment les  $n - 3$  tangentes principales associées à  $MP$  dans l' $E_{n-2}$  tangent en  $M$ . Par suite, la section de  $B_n$  par  $\pi$  est une  $B_{n-2}$  admettant un point double en  $M$ , puisque les tangentes  $y$  sont réparties dans un  $E_{n-3}$  formé par les  $n - 3$  droites précédentes.

Il suffit donc d'écrire que dans le faisceau  $B_{n-2}$  deux cônes sont confondus, c'est-à-dire que l'équation aux paramètres  $\lambda$  de ces cônes admet une racine double. La condition obtenue donne l'équation de  $F$ .

Prenons les équations de la  $B_n$  sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} (X_n)^2 = a^{ij} X_i X_j \\ (X_{n+1})^2 = b^{ij} X_i X_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

involution, définie à l'aide d'éléments géodésiques de la  $V_2$ . Il y a lieu de remarquer que la définition et la propriété des tangentes principales données au paragraphe 1 ont un caractère projectif dans  $E_n$ .

(1) Voir au paragraphe 7 la projection faite d'un sommet  $S_1$  d'un cône du faisceau  $B_n$ .

L' $E_{n-2}\pi$  commun aux  $E_n$  polaires du point  $M(x_i)$  est défini par

$$(5) \quad \begin{cases} X_n = \frac{(a^{ij}x_i)}{x_n} X_j = p^j X_j, \\ X_{n+1} = \frac{(b^{ij}x_i)}{x_{n+1}} X_j = q^j X_j, \end{cases}$$

avec

$$(6) \quad p^j = \frac{(a^{ij}X_i)}{x_n}, \quad q^j = \frac{(b^{ij}x_i)}{x_{n+1}}.$$

La section  $B_{n-2}$ , définie par (4) et (5) de  $B_n$  par  $\pi$ , a pour projection dans l'espace  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  ou  $X_i$

$$(7) \quad \begin{cases} (p^j X_j)^2 = a^{ij} X_i X_j, \\ (q^j X_j)^2 = b^{ij} X_i X_j, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} (p^i p^j - a^{ij}) X_i X_j = 0, \\ (q^i q^j - b^{ij}) X_i X_j = 0. \end{cases}$$

L'équation aux  $\lambda$  des cônes du faisceau (7) se présente sous la forme d'un déterminant d'ordre  $n-1$

$$(8) \quad |p^i p^j - a^{ij} - \lambda(q^i q^j - b^{ij})| = 0,$$

ou, en développant

$$(9) \quad A_0 \lambda^{n-1} + A_1 \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-2} \lambda + A_{n-1} = 0.$$

$A_0$  est un polynome du 2° degré en  $q$  seul,  $A_{n-1}$  un polynome du 2° degré en  $p$  seul, tandis que les autres coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}$  sont à la fois du 2° degré en  $p$  et en  $q$ . Pour avoir une racine double en  $\lambda$  il faut annuler le discriminant de (9) soit

$$(10) \quad R(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = 0,$$

de degré  $2n-4$  par rapport aux  $A$ , et de poids  $(n-1)(n-2)$ . Il se compose de monomes

$$(11) \quad A_0^{\alpha_0}, A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} &= 2n-4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} &= (n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Le degré du terme (11) est

$$\begin{aligned} \text{en } p \quad 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) &= 2(2n-4-\alpha_0), \\ \text{en } q \quad 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}) &= 2(2n-4-\alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

La valeur maximum du degré, aussi bien pour  $p$  que pour  $q$ , est donc  $2(2n-4) = 4(n-2)$ , atteinte effectivement, par exemple dans le terme en

$$A_1^{n-2}, A_{n-2}^{n-2}$$

qui est bien de degré  $2n-4$  par rapport aux  $A$ , et de poids  $(n-1)(n-2)$ .

En remplaçant dans (10) les  $p^j$  et  $q^j$  par leurs expressions (6), puis en chassant les dénominateurs qui sont  $(x_n)^{4(n-2)}$  et  $(x_{n-1})^{4(n-2)}$ , on obtient F sous la forme d'une variété d'ordre  $8(n-2)$ , d'où :

*L'ordre de la surface  $F_n$  lieu des tangentes principales d'une  $B_n$  est en général  $8(n-2)$ .*

Ce résultat est confirmé au paragraphe 7.

*Exemples :  $n = 3$ .* — La méthode précédente permet en particulier d'obtenir l'équation de la développable du 8° ordre engendrée par les tangentes à une biquadratique. Il n'est même pas nécessaire dans la pratique de partir de quadriques mises sous la forme (4). C'est ainsi qu'on trouve à partir de la biquadratique commune à une sphère et un paraboloidé

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 &= 0, \\ XY - Z &= 0, \end{aligned}$$

la surface F sous la forme

$$4[xyz^2 + z(x^2 + y^2) - xy]^2 + [(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + 4(z^2 - x^2y^2)][(1 + z^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 - 8xyz] = 0.$$

$n = 4$ . — Les tangentes principales d'une  $B_4$  décrivent une variété du 16° ordre à trois dimensions, une  $V_3^{16}$ . Nous allons préciser sa section dite principale, par un hyperplan du repère conjugué commun.

**5. Sections principales de F.** — Les deux tangentes principales au point M d'une  $B_4$  coupent l'hyperplan  $S_2S_3S_4S_5$  aux points A et B, qui sont aussi les traces des deux tangentes principales au point M' aligné avec  $S_1$  et M. Les points A et B décrivent donc une surface double  $V_3$  pour la section principale de F par l' $E_3$  polaire de  $S_1$ .

Quand M et M' sont confondus ils coïncident avec un point M de la biquadratique  $(A_1)$ , intersection de  $B_4$  par  $E_3$ ; la tangente MP à  $(A_1)$  en M est une tangente principale pour  $B_4$  : en effet, l' $E_3$  tangent en M est déterminé par MP et  $S_1M$  qui sont conjuguées par rapport à toutes les quadratiques du faisceau. Ainsi

*La section de F par  $E_3$  est décomposée suivant le lieu des tangentes à la biquadratique  $(A_1)$ , et la variété  $V_3$  double. Comme F est du 16° ordre,  $V_3$  est d'ordre 4.*

Indiquons une génération de  $V_3^4$  dans  $E_3$ .  $S_1M$  a pour trace  $m_1$  et la droite AB est commune aux plans polaires de  $m_1$  dans le faisceau défini par  $(A_1)$ ; d'autre part AB touche  $V_1^2$  en A et B d'après la définition des tangentes principales.

$V_3^4$  constitue donc la surface focale de la congruence des droites d'un complexe polaire associées aux points  $m_1$  d'une quadrique  $Q_1^2$  du faisceau  $(A_1)$  qui définit ce complexe.

On obtient de même pour  $n$  quelconque :

Une section principale de  $F_n$  par l' $E_{n-1}$  polaire de  $S_1$  se trouve décomposée suivant la variété  $F_{n-1}$ , d'ordre  $8(n-3)$  de la  $B_{n-1}(A_1)$  correspondante, et une variété double  $V_{n-2}^1$ . Celle-ci est touchée en  $n-2$  points par l' $E_{n-3}$  conjugué commun du point  $m_1$  par rapport aux quadriques du faisceau  $(A_1)$ ,  $m_1$  étant un point quelconque d'une quadrique  $Q_n^1$  de ce faisceau.

**6. Surface E de la base d'un équipage.** — Dans la génération descriptive de la surface  $C_3$ , la droite  $(t)$  du plan tangent  $mt$  en  $m$  se construit avec les éléments  $i_{12}$ ,  $Q_3^1$ ,  $Q_3^2$  de la base d'un équipage, comme intersection des plans tangents à  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  en deux points  $m_1m_2$  alignés avec  $i_{12}$ ;  $(t)$  se présente comme trabe du plan  $E_2$  tangent en  $M$  à la  $B_1$ , et les traces des deux tangentes principales sont les deux points  $t_1t_2$  de  $(t)$  conjugués communs par rapport aux quadriques  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ . Leur lieu, surface E liée à la base de l'équipage, apparaît donc comme une section hyperplane de la variété F relative à la  $B_1$ . D'après la définition des tangentes principales  $(t)$  est tangente à E aux points  $t_1, t_2$ . Donc :

La surface focale de la congruence des droites  $(t)$  d'intersection des plans tangents à deux quadriques  $Q_3^1, Q_3^2$  en deux points  $m_1m_2$  alignés avec un point fixe  $i$ , est une surface E du 16<sup>e</sup> ordre (1).

Nous appellerons descriptive une telle génération de E. D'où :

*Il y a dix générations descriptives de la surface E.*

La surface E touche la quadrique  $Q_3^1$  tout le long de la biquadratique  $(\alpha_1)$ . Elle est donc circonscrite aux quadriques  $Q_3^1Q_3^2Q_3^3Q_3^4Q_3^5$  les biquadratiques de contact étant  $(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_5)$ .

Les  $V_2^1$  doubles situées dans les plans principaux de F sont coupées par l'hyperplan de l'équipage suivant des courbes doubles du 4<sup>e</sup> ordre. On en déduit que la section de la surface E par un plan de son équipage, tel  $X_1$ , est formée d'une courbe double du 4<sup>e</sup> ordre et d'une courbe E du 8<sup>e</sup> ordre. L'interprétation de la  $V_2^1$  donnée au paragraphe 5 montre aussi que cette courbe double est à l'intersection de  $X_1$  avec la surface transformée de  $Q_3^1$  dans le complexe polaire défini par le faisceau de l'équipage.

Enfin l'existence de huit bases d'équipages associées à cinq quadriques d'un faisceau (Chap. III, § III-3), entraîne la détermination de huit surfaces E correspondantes.

Chacune de ces bases permet la construction d'une famille de  $\infty^3$  surfaces cubiques passant par la biquadratique  $(a)$  commune aux cinq quadriques  $Q_3^1, \dots, Q_3^5$  et tangentes à ces quadriques; les points de contact avec  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  sont  $s_1$  et  $s_2$ , variables mais alignés avec  $i_{12}$ ; la droite  $(\delta)$  d'intersection des plans tangents à  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  en  $s_1$  et  $s_2$  appartient à la surface cubique; elle touche E en A et B et il y a contact, en ces points de la surface cubique avec E (remarque du § 3).

(1) Nous verrons au paragraphe 7 qu'elle admet la biquadratique  $(a)$  commune à  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  comme courbe multiple d'ordre 4 et au paragraphe 11, qu'elle admet une courbe double d'ordre douze.

On peut donc compléter comme suit le théorème 3' du chapitre III, paragraphe III-4 :

Chacune des 8 familles de surfaces cubiques T passant par une biquadratique ( $\alpha$ ) et tangentes à 5 quadriques  $Q_3^1, \dots, Q_3^5$  du faisceau ( $\alpha$ ), enveloppe en outre une surface E. Les deux points de contact de T avec E sont situés sur une droite ( $\delta$ ) de T, et les 5 plans tangents à T menés par ( $\delta$ ) ont pour points de contact les 5 points  $s_1, \dots, s_5$  où T touche  $Q_3^1, \dots, Q_3^5$ .

On étendra sans mal, pour  $n > 4$ , les résultats de ce paragraphe.

**7. Intersection de  $F_n$  avec une quadrique  $Q_n$  du faisceau  $B_n$ .** — Par un point P de cette intersection passe une génératrice principale MP, qui coupe, quand M et P sont distincts, la quadrique Q en 3 points : 2 en M et 1 en P; elle lui appartient donc, et *l'intersection de la quadrique  $Q_n$  avec la variété  $F_n$  est formée, en dehors de la  $B_n$ , par des génératrices communes à  $Q_n$  et à  $F_n$ .*

Son étude, pour laquelle nous allons utiliser une projection de centre  $S_1$ , va nous donner quelques précisions supplémentaires sur F, et nous conduire à de nouvelles applications.

Nous n'insistons pas sur le cas connu  $n = 3$ , où les génératrices communes à F et Q se projettent de  $S_1$  suivant les tangentes communes à  $Q_2^1$  et au contour apparent B de Q, qui passe par les 4 points ( $\alpha_1$ ) (Chap. III, § I-9). Il y a donc dans l'intersection, en dehors de la biquadratique double, 4 génératrices d'un système et 4 de l'autre.

Le rapport anharmonique commun de ces deux groupes est celui des 4 tangentes, pris sur B, égal à celui des 4 points  $\alpha_1$  pris sur  $Q_2^1$ , c'est-à-dire à celui des 4 cônes du faisceau, à l'invariant d'un équipage.

a. Plaçons-nous maintenant dans l'espace à 4 dimensions. Une génératrice MP, principale pour la  $B_3$ , et appartenant à une quadrique Q du faisceau  $B_3$ , est une droite de contact avec Q du plan tangent à la  $B_3$  en M. Ce plan se projette donc de  $S_1$  suivant un plan tangent commun à  $Q_2^1$  et au contour apparent de Q, qui est une quadrique B passant par ( $\alpha_1$ ) (Chap. III, § I-9). La perspective de MP joint les points de contact; *c'est une génératrice de la développable circonscrite à  $Q_2^1$  et B.* L'intersection résiduelle de F et Q se projette donc de  $S_1$  suivant une surface d'ordre 8. C'est alors elle-même une surface d'ordre 16. L'intersection totale ayant l'ordre 32, la  $B_3$  doit y compter pour l'ordre 16. Cette propriété reste vraie quelle que soit la quadrique Q du faisceau. Il en résulte :

*L'hyperbiquadratique  $B_3$  est multiple d'ordre 4 pour le lieu F de ses tangentes principales.*

Ce résultat peut être obtenu directement; il confirme alors l'ordre trouvé précédemment pour F. Coupons l'hypersurface F par une droite D passant au voisinage d'un point M de la  $B_3$ . Projetons sur un  $E_3$  à partir d'un point O de D : on est ramené à trouver les directions principales d'une cyclide qui passent par la trace  $\omega$  de B; comme  $\omega$  est infiniment voisin de la cyclide il y a 4 directions prin-

cipales, parmi celles qu'on cherche, dont les points de contact sont infiniment voisins de  $\omega$ . Il en résulte 4 points sur D infiniment voisins de M. L'hyperbiquadratique est bien multiple d'ordre 4 sur F. Il passe en M 4 nappes de l'hyper-surface F qui viennent se raccorder deux à deux tangentiellement aux 2 hyperplans osculateurs en M.

CONSEQUENCE. — La biquadratique ( $\alpha$ ) est multiple d'ordre 4 pour la surface E.

b. Une autre conséquence concerne la variété  $V_2^4$  du paragraphe 5, double pour une section principale de F, l'intersection résiduelle étant formée par le lieu des tangentes à la biquadratique ( $A_1$ ). La section principale de Q est une quadrique du faisceau ( $A_1$ ). ( $A_1$ ) doit figurer pour l'ordre 16 dans l'intersection de cette quadrique avec la section principale de F, intersection qui comprend :

( $A_1$ ) (double, comptant donc pour l'ordre 8);  
8 tangentes à ( $A_1$ );

et la courbe d'intersection avec la  $V_4^2$  (double, ordre 16). ( $A_1$ ) doit donc figurer pour l'ordre 8 dans cette dernière partie de l'intersection, c'est-à-dire qu'elle est située sur la  $V_2^4$ .

La  $V_2^4$  faisant partie d'une section principale de F passe simplement par la biquadratique ( $A_1$ ).

C'est ce qu'on peut vérifier directement sur l'exemple de la  $B_4$ .

$$\begin{aligned}x^2 &= x^2 + y^2 + 1, \\t^2 &= 2x^2 + y^2 + 3,\end{aligned}$$

où la surface  $V_2^4$  située dans  $t = 0$  a pour équation

$$15y^2z^2 + 28x^2z^2 + x^2y^2 - 7x^2 - 12y^2 + 63z^2 = 0.$$

Elle passe bien par la biquadratique ( $A_1$ )

$$\begin{aligned}f &= z^2 + x^2 + 2 = 0, \\g &= y^2 + 2x^2 + 3 = 0,\end{aligned}$$

car son équation s'écrit encore

$$15fg + 2(9 - x^2)f - 14(x^2 + 3)g = 0.$$

c. Revenons maintenant sur les points M de la  $B_4$  où une tangente principale est génératrice de la quadrique Q du faisceau  $B_4$ .

Leur lieu L se projette à partir de  $S_1$ , comme on a vu ( $\alpha$ ), suivant la biquadratique ( $p_1$ ) de contact avec  $Q_3^1$ , de la développable circonscrite à  $Q_3^1$  et B. ( $p_1$ ) est conjuguée au tétraèdre  $i_2i_3i_4i_5$  car elle se déduit de ( $\alpha_1$ ) par le produit de 2 réciprocitys : l'une échange B et  $Q_3^1$ , l'autre conserve  $Q_3^1$ , toutes deux laissent le tétraèdre invariant. On définit de même les biquadratiques  $p_2, p_3$ .

$p_1, p_2$  par projections de  $S_2, S_3, S_1, S_5$ . Deux quelconques,  $p_1$  et  $p_2$  par exemple, sont sur un même cône  $C$  du second ordre, de sommet  $i_{12}$ . On en déduit :

*Le lieu  $L$  est une courbe du 8° ordre, intersection de la  $B_3$  et d'un hypercône à droite double  $S_1S_2$ , de base  $C$ . Par cette courbe  $L$ , passent 10 autres hypercônes du second ordre à droite double (1).*

*d. Précisons ce cône  $C$ ; soit  $im_1m_2$  l'une de ses génératrices,  $m_1, m_2$  étant les projections de  $M$  faites de  $S_1S_2$  respectivement. Celles de la tangente principale  $MP$  sont  $m_1A$  et  $m_2A$ , en désignant par  $A$  la trace de  $MP$ ;  $A$  se trouve donc sur la trace de la quadrique  $Q$ . (Il appartient aussi, d'ailleurs, à la surface  $E$ .) Le plan  $X$  tangent au cône  $C$  le long de  $im_1m_2$  coupe  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  suivant 2 coniques bitangentes à  $(p_1)$  et  $(p_2)$ , et les génératrices de  $m_1$  et  $m_2$  pour les cônes circonscrits à  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  le long de ces coniques sont précisément  $m_1A$  et  $m_2A$  (propriété de l'enveloppe d'un plan tangent à une surface : la droite caractéristique est conjuguée de la tangente à la courbe décrite par le point de contact). Dès lors, la biquadratique commune à ces deux cônes passe par  $A$ ; elle est donc tout entière sur la quadrique  $\Gamma$  du faisceau  $(a)$ , et le plan  $X$  est tangent à la réciproque  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  dans une réciprocity qui échange  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  (Th. 1, Chap. III). Par conséquent :*

*Le cône  $C$  de sommet  $i_{12}$  est circonscrit à la quadrique  $\Gamma'$  transformée de la trace  $\Gamma$  de  $Q$  dans l'une quelconque des réciprocitys qui échangent  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ .*

Les cônes  $C$  sont donc, lorsque  $Q$  varie, circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel défini par  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ .

Ils restent tangents aux 4 plans tangents communs à  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$  passant par  $i_{12}$  (2).

En remarquant que  $(p_1)$  se trouve à l'intersection de  $Q_3^1$  avec la réciproque de  $B$  par rapport à  $Q_3^1$ , l'énoncé suivant se trouve justifié :

Quand des quadriques  $B$  varient dans un faisceau ponctuel, leurs réciproques par rapport à une quadrique fixe  $Q_3^1$  du faisceau coupent cette quadrique suivant des biquadratiques  $(p_1)$ , telles que les cônes du second ordre de même sommet fixe  $i_{12}$  qui les contiennent varient dans un faisceau tangentiel (3).

Détachons encore la conséquence suivante :

Un cône circonscrit à une quadrique  $\Gamma'$  du faisceau tangentiel défini par deux quadriques  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ , les coupe suivant 2 biquadratiques  $p_1, p_2$  telles que les développables circonscrites correspondantes ont une courbe commune du 16° ordre, située sur une quadrique  $\Gamma$  du faisceau ponctuel défini par  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ .

(1) Pour  $n = 3$ .  $L$  se réduit aux 8 points de contact des génératrices, situés dans 6 couples de plans.

(2) Ces plans sont à l'origine de la génération descriptive des 16 droites de la  $B_3$ .

(3) La vérification analytique est facile.



$\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont réciproques dans l'une quelconque des réciprociétés qui échan- gent  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ .

Cette propriété généralise le théorème I (Chap. III, § III-2) qu'on obtient quand le cône circonscrit à  $\Gamma'$  se réduit à un plan tangent  $\Gamma'$ .

II. — LIGNES PRINCIPALES D'UNE HYPERBIQUADRATIQUE.

1. La courbe L, que nous venons de rencontrer (§ I-7, c) fait partie comme nous allons voir, du système de courbes associées sur  $B_4$ , c'est-à-dire du réseau des courbes intégrales du champ des tangentes principales, courbes que nous appellerons *lignes principales*.

En effet, la tangente principale MP (§ I-7, a) a pour conjuguée la tangente en M à L, dans l' $E_2$  tangent en M à la  $B_4$ , car il en est ainsi en  $m_1$  pour la projection faite de  $S_1$  où L donne la biquadratique  $p_1$ . C'est dire que la tangente à L en M est principale, donc que L fait partie des lignes principales. Quand M décrit L, MP qui est tangente à la courbe associée qui passe en M, engendre une développable appartenant à la développôide  $F_4$  <sup>(1)</sup>.

On en déduit le théorème suivant :

*Le faisceau ponctuel des hyperquadriques passant par une  $B_4$  découpe une famille de développables sur la 2-développôide  $F_4$ .*

La section particulière par un cône du faisceau  $B_4$  est elle-même un cône, par exemple le cône de sommet  $S_1$  et de base  $(A_1)$  ou  $(\alpha_1)$ .

La section par une quadrique quelconque Q du faisceau est une développable dont la projection faite de  $S_1$  coïncide avec la développable circonscrite à B et  $Q_3^1$  (§ I-7, a). L'ordre de son arête égale la classe de la développable, lieu des tangentes à une biquadratique, c'est-à-dire  $12$  <sup>(2)</sup>; l'arête de la développable de l'espace à 4 dimensions est donc du  $24^\circ$  ordre, elle constitue la section par Q de la deuxième arête de la 2-développôide  $F_4$  <sup>(3)</sup>. On en déduit.

*La 2-développôide  $F_4$  admet pour deuxième arête une variété  $V_2^{12}$  à deux dimensions, du  $12^\circ$  ordre.*

Nous l'appellerons arête secondaire; elle est double sur  $F_4$  <sup>(4)</sup>, l'arête principale  $B_4$  étant quadruple.

Revenons sur les lignes principales de  $B_4$  pour en donner une détermination géométrique globale, par la propriété suivante :

*Les lignes principales s'obtiennent comme trace sur la  $B_n$  du faisceau linéaire tangentiel de quadriques, défini par deux quadriques fixes, mais quelconques, passant par  $B_4$ .*

---

<sup>(1)</sup> Une 2-développôide de  $E_4$  est un lieu de développables, c'est-à-dire de tangentes à 1 courbe de  $E_4$ , obtenues de cette façon (GAUTHIER, *Thèse* Chap. I).

<sup>(2)</sup> On l'obtient en calculant le nombre des points d'inflexion d'une cyclique, donné par la troisième formule de Plücker.

<sup>(3)</sup> Une  $h$ -développôide admet  $h$  arêtes (GAUTHIER, *Thèse*).

<sup>(4)</sup> Sa section par un  $E_3$  est donc une courbe du  $12^\circ$  ordre double pour la surface E (§ I, 6).

Soient  $Q_1^1$  et  $Q_2^2$  ces deux quadriques fixes; par un point  $M$  de  $B_4$  passent deux autres quadriques du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, et les tangentes en  $M$  aux deux lignes d'intersection avec  $B_4$  sont conjuguées par rapport à  $Q_1^1$  et  $Q_2^2$ ; ces tangentes sont donc principales et le théorème en résulte.

Une ligne principale de  $B_4$  est donc une courbe d'ordre 8 intersection de trois quadriques. Elle se projette sur un  $E_3$  suivant une ligne de courbure d'une cyclide, courbe algébrique d'ordre 8, intersection de la cyclide avec une cyclide homofocale (1).

On en déduit aussi l'indépendance du résultat vis-à-vis du choix des quadriques de départ dans le faisceau linéaire ponctuel de base  $B_4$ . Nous allons vérifier analytiquement cette conséquence, puis retrouver sur les équations paramétriques de la développée  $F_4$  le premier théorème établi dans ce paragraphe.

2. Prenons les équations de la  $B_4$  sous la forme

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b^i(x_i)^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Une quadrique variable dans le faisceau linéaire tangentiel défini par ces deux quadriques a pour équation ponctuelle

$$c^i(x_i)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c^i = \frac{1}{\frac{1}{a^i} + \frac{\lambda}{b^i}} = \frac{a^i b^i}{b^i + \lambda a^i}.$$

Remplaçons maintenant la quadrique base  $b^i(x_i)^2 = 0$  par la nouvelle quadrique

$$b'^i(x_i)^2 = (b^i + \lambda a^i)(x_i)^2.$$

L'équation ponctuelle du nouveau faisceau linéaire tangentiel peut s'écrire

$$c'^i(x_i)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c'^i = \frac{a^i b^i + \lambda (a^i)^2}{b^i + \lambda a^i}.$$

Comme

$$\lambda c'^i = (\lambda - l)c^i + \lambda a^i,$$

le système des lignes principales

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b^i(x_i)^2 = 0, \quad c^i(x_i)^2 = 0$$

est également représenté par

$$a^i(x_i)^2 = 0, \quad b'^i(x_i)^2 = 0, \quad c'^i(x_i)^2 = 0.$$

*Il reste inchangé quand une quadrique, et par suite les deux, varient dans le faisceau ponctuel de base  $B_4$ .*

En particulier prenons pour définir la  $B_4$  les deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ . On aura

$$\begin{aligned} a^1 = 0, \quad b^2 = 0, \\ d'où \quad c^1 = c^2 = 0. \end{aligned}$$

(1) DARBOUX, *Principes de géométrie analytique.*

Les projections  $c^j(x_j)^2 = 0$  ( $j \neq 1$  et 2) des lignes principales, faites de la droite  $S_1, S_2$ , sont des coniques variant dans un faisceau linéaire tangentiel déterminé par  $a^j(x_j)^2 = 0$  et  $b^j(x_j)^2 = 0$ .

Cela revient à dire que :

*Les lignes principales se projettent de  $S_1$  suivant les biquadratiques ( $p_1$ ) découpées sur  $Q_3^1$  par les cônes de sommet  $i_{12}$  circonscrits aux quadriques du faisceau tangentiel défini par  $Q_3^1$  et  $Q_3^2$ .*

Résultat déjà obtenu au paragraphe I-7, d, à propos de la projection  $p_1$  de la courbe L.

En langage métrique, les projections des lignes principales à partir de  $S_1$  se font suivant les lignes de courbure de la quadrique  $Q_3^1$ .

Nous allons mettre à profit ces résultats pour trouver des équations paramétriques commodes de la  $B_1$  rapportée à ses lignes principales, d'où nous déduirons celles de la développée  $F_1$ , et celles de sa deuxième arête.

Les lignes principales, d'après leur détermination géométrique, sont à l'intersection  $B_1$  de deux quadriques avec la famille des quadriques « homofocales ». Les équations des deux quadriques étant

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{t^2}{D} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{A+l} + \frac{y^2}{B+l} + \frac{z^2}{C+l} + \frac{t^2}{D+\lambda} - 1 = 0,$$

celles des quadriques homofocales sont

$$(12) \quad \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} + \frac{t^2}{D+\lambda} - 1 = 0.$$

Par un point  $M(x, y, z, t)$  de  $B_1$  passent 4 quadriques de ce faisceau tangentiel, de paramètres  $o, l, u$  et  $v$ , racines de l'équation (12) en  $\lambda$ .

On en tire les équations paramétriques de  $B_1$ , les paramètres étant  $u$  et  $v$  (\*)

$$(13) \quad B_1 \begin{cases} x^2 = \alpha(A+u)(A+v), \\ y^2 = \beta(B+u)(B+v), \\ z^2 = \gamma(C+u)(C+v), \\ t^2 = \delta(D+u)(D+v), \end{cases}$$

avec

$$\alpha = \frac{A(A+l)}{(A-B)(A-C)(A-D)},$$

les valeurs de  $\beta, \gamma, \delta$  s'obtiennent par permutation circulaire sur les lettres A, B, C, D.

Dans les équations (13) de la  $B_1$  (qui ne sont pas unicursales), les lignes  $u$  variable, ou  $v$  variable, sont les lignes principales. Une tangente principale MP

(\*) Méthode utilisée par Darboux pour la détermination des lignes de courbure d'une cyclide (Principes de géométrie analytique).

porte donc le vecteur  $M'_u$  de composantes

$$x'_u = \frac{x}{2(A+u)}, \quad y'_u = \frac{y}{2(B+u)}, \quad z'_u = \frac{z}{2(C+u)}, \quad t'_u = \frac{t}{2(D+u)}.$$

En écrivant

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \omega M'_u.$$

On obtient les équations de la développoïde en fonction des paramètres  $u, \nu, \omega$  sous la forme

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\omega x}{2(A+u)}, & Y &= y + \frac{\omega y}{2(B+u)}, \\ Z &= z + \frac{\omega z}{2(C+u)}, & T &= t + \frac{\omega t}{2(D+u)}. \end{aligned}$$

Soit

$$(14) \quad F_4 \begin{cases} X^2 = \alpha(A+u)(A+\nu) \left[ 1 + \frac{\omega}{2(A+u)} \right]^2, \\ Y^2 = \beta(B+u)(B+\nu) \left[ 1 + \frac{\omega}{2(B+u)} \right]^2, \\ Z^2 = \gamma(C+u)(C+\nu) \left[ 1 + \frac{\omega}{2(C+u)} \right]^2, \\ T^2 = \delta(D+u)(D+\nu) \left[ 1 + \frac{\omega}{2(D+u)} \right]^2. \end{cases}$$

Quand on fixe  $u$ , la surface obtenue est le lieu des tangentes à la courbe  $u$  variable lorsque le point  $M$  décrit une courbe  $\nu$  variable. Elle doit donc constituer une développable de la développoïde. Effectivement, il est facile de constater que la droite  $MP$  admet alors pour enveloppe la courbe lieu du point  $M_1$  de coordonnées

$$X_1 = x \frac{A+\nu}{A+u}, \quad y_1 = y \frac{B+\nu}{B+u}, \quad z_1 = z \frac{C+\nu}{C+u}, \quad t_1 = t \frac{D+\nu}{D+u},$$

où  $u$  est constant <sup>(1)</sup>. Les équations de la deuxième arête  $B_1$  pour la développable  $F_4$  sont donc ( $u$  et  $\nu$  variable)

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 &= \alpha \frac{(A+\nu)^2}{A+u} \\ y_1^2 &= \beta \frac{(B+\nu)^2}{B+u} \\ z_1^2 &= \gamma \frac{(C+\nu)^2}{C+u} \\ t_1^2 &= \delta \frac{(D+\nu)^2}{D+u} \end{aligned} \right\} \text{arête secondaire } B_1.$$

Enfin il reste à vérifier qu'une développable de  $F_4$  [ $u$  fixe dans (14)] appartient à une quadrique  $Q$  du faisceau ponctuel  $B_4$ ,

$$\sum \frac{X^2}{A} - 1 + \mu \left( \sum \frac{X^2}{A+l} - 1 \right) = 0.$$

(1) Ce fait provient de la relation entre les vecteurs  $M'_u, M'_\nu, M''_{u\nu}$

$$M'_\nu - M'_u + 2(\nu - u)M''_{u\nu} = 0$$

En remplaçant X, Y, Z, T par leurs valeurs (14), on obtient après simplification pour équation aux paramètres  $\nu, \omega$  des points communs

$$\sum \left[ \frac{\Lambda + \nu}{(\Lambda - B)(\Lambda - C)(\Lambda - D)} \times \frac{\Lambda + l + \mu \Lambda}{\Lambda + u} \right] = 0.$$

En choisissant

$$\mu + 1 = \frac{l}{u} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mu = \frac{l}{u} - 1,}$$

$\frac{l}{u}$  est un facteur dans chaque terme de la somme  $\Sigma$ .

L'équation se réduit à

$$\sum \frac{\Lambda + \nu}{(\Lambda - B)(\Lambda - C)(\Lambda - D)} = 0.$$

Elle est identiquement vérifiée quel que soit  $\nu$ . Nous retrouvons le premier théorème du paragraphe II.

3. Il est inutile d'entrer dans le détail des démonstrations nécessaires à la généralisation, pour  $n$  quelconque, des résultats précédents qui concernent l'espace à quatre dimensions. Il suffit la plupart du temps de transposer les raisonnements.

*L'arête  $B_n$  présente pour l'hypersurface  $n - 2$  — développoïde  $F_n$ , lieu de ses tangentes principales, un ordre de multiplicité  $2(n - 2)$ .*

*Le système des courbes associées sur  $B_n$ , ou lignes principales, s'obtient comme trace sur  $B_n$  de l'intersection de  $n - 3$  quadriques variables dans le faisceau tangentiel défini par deux quadriques fixes, mais quelconques, passant par  $B_n$ .*

*Une quadrique quelconque du faisceau ponctuel défini par  $B_n$  coupe la  $n - 2$ -développoïde  $F_n$  suivant une variété réglée  $V_{n-2}^{8(n-2)}$  qui est  $n - 3$ -développoïde. Elle se projette à partir du sommet  $S_1$  d'un cône du second ordre contenant  $B_n$ , suivant une développoïde, réciproque d'une  $n - 3$ -développoïde  $F_{n-1}$ .*

*Outre l'arête  $B_n$  apparaissent, pour  $n > 3$ ,  $n - 3$  arêtes secondaires de la  $n - 2$ -développoïde  $F_n$ , constituées par une même variété algébrique  $V_{n-2}$ , double pour  $F_n$ , dont l'ordre égale la classe d'une développoïde  $F_{n-1}$ , soit  $12(n - 3)$ .*

*La  $n - 2$ -développoïde  $F_n$  est en effet de classe  $12(n - 2)$ .*

Éclairons cependant quelques difficultés. Elles commencent quand on considère l'intersection avec  $F_n$  d'une quadrique Q du faisceau  $B_n$ . Cette intersection se projette de  $S_1$  sur un  $E_{n-1}$  suivant le lieu des droites qui joignent les points de contact des hyperplans tangents communs aux deux quadriques  $Q_{n-1}^1$  et B. Pour  $n = 4$  ou  $n - 1 = 3$ , c'était simplement la développable circonscrite à deux quadriques. Pour  $n - 1 > 3$ , c'est une variété  $V_{n-2}$  réglée, corrélative de l'hyperbiquadratique  $B_{n-1}$ , commune à deux hyperquadriques de  $E_{n-1}$ ; les hyperplans osculateurs à  $B_{n-1}$ , c'est-à-dire tangents à la développoïde  $F_{n-1}$  cor-

respondante, ont pour homologues les points de contact des droites de  $V_{n-2}$  avec une variété  $V_{n-3}$  qui constitue son arête. Comme il y a  $n-3$  plans osculateurs qui contiennent un  $E_{n-3}$  déterminé tangent à  $B_{n-1}$ , il existe  $n-3$  points de contact d'une droite de  $V_{n-2}$  avec son arête.  $V_{n-2}$ , qui admet  $n-3$  arêtes, est donc  $n-3$ -développôide. Pour calculer l'ordre de l'arête il faut la couper par un hyperplan quelconque, ce qui revient dans la figure primitive à chercher le nombre des hyperplans tangents à  $F_{n-1}$  passant par un point donné. Appelons ce nombre classe de la développôide  $F_{n-1}$ . Cherchons d'une manière générale la classe de la développôide  $F_n$  de  $E_n$ .

L'hyperplan P

$$u^i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

est osculateur à la  $B_n$

$$a^i (x_i)^2 = 0,$$

$$b^i (x_i)^2 = 0,$$

lorsque l'équation aux paramètres  $\lambda$  des quadriques du faisceau  $B_n$  tangentes à P admet une racine triple. Cette équation est

$$(15) \quad \sum \frac{(u^i)^2}{a^i + \lambda b^i} = 0,$$

obtenue à partir de l'équation tangentielle d'une quadrique  $(a^i + \lambda b^i)(x_i)^2 = 0$  du faisceau ponctuel  $B_n$ . L'équation (15), d'ordre  $n$ , a pour coefficients des formes quadratiques en  $u^i$ . L'ordre du système obtenu en écrivant les conditions d'une racine triple <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire la classe de la développôide  $F_n$ , est donc

$$12(n-2).$$

### III. — APERÇU SUR LES CONGRUENCES D'ESPACES LINÉAIRES.

1. L'étude de la développôide  $F_3$  a trouvé son application dans la recherche de la surface focale E de la congruence des droites liées à la base d'un équipage de l'espace ordinaire (§ I-6). Elle a même été suggérée par cette application. Le pas franchi pour passer du plan à l'espace permet aussi d'accéder aux hyperespaces.

Considérons la famille d'espaces linéaires  $E_{n-2}$  obtenus par intersection des hyperplans tangents à deux quadriques  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  de l'espace  $E_n$  en deux points  $m_1, m_2$  alignés avec un point fixe  $i_{12}$ . Elle généralise la congruence des droites ( $\ell$ ) de l'espace ordinaire; cette « congruence » d' $E_{n-2}$  admet comme variété focale une section hyperplane E d'une développôide  $F_{n+1}$ , c'est-à-dire qu'un  $E_{n-2}$  quelconque de la famille, touche E en  $n-1$  points qui sont les traces des  $n-1$  tangentes principales au point M correspondant de la  $B_{n+1}$  associée. Donc :

*Dans  $E_n$ , la variété focale des  $E_{n-2}$  d'intersection de deux hyperplans tangents à deux hyperquadriques  $Q_n^1$  et  $Q_n^2$  en deux points variables  $m_1$  et  $m_2$  alignés avec un point fixe  $i$ , est une hypersurface E, à  $n-1$  dimensions, d'ordre  $8(n-1)$ , touchée en  $n-1$  points par chaque  $E_{n-2}$  de la famille.*

(1) SALMON, Algèbre supérieure, p. 422.

Je n'insiste pas sur les développements relatifs à la surface E du paragraphe I-6, applicables ici. Je relève plutôt un deuxième exemple de variété focale d'une famille d' $E_{n-2}$  dans  $E_n$ , rencontré à la fin du paragraphe I-5. Il s'agit de la « congruence » des  $E_{n-2}$  associés à un point  $m$  dans deux réciprociétés, lorsque  $m$  décrit une quadrique  $Q'_n$  particulière, variable dans un faisceau, congruence dont la variété focale est une  $V_{n-1}^4$ .

Dans ces deux exemples se présente une congruence algébrique d' $E_{n-2}$  de l'espace  $E_n$ , qui dépendent de  $n - 1$  paramètres, et restent tangents à une variété algébrique  $V_{n-1}$  que chacun d'eux touche en  $n - 1$  points. C'est là un fait général :

*Une famille ou congruence d' $E_{n-2}$  à  $n - 1$  paramètres dans l'espace  $E_n$  admet pour variété focale propre une variété à  $n - 1$  dimensions touchée en  $n - 1$  points par chacun d'eux.*

Définissons  $E_{n-2}$  par un point M et  $n - 2$  vecteurs  $A_i (i = 1, 2, \dots, n - 2)$ . Point et vecteurs sont fonctions des  $n - 1$  paramètres  $u_k$ . Dans  $E_{n-2}$  un point P quelconque a pour coordonnées  $x_i$  dans le repère  $A_i$ . O étant l'origine dans  $E_n$ , on a

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \sum (x_i \vec{A}_i).$$

Peut-on déterminer les  $x_i (u_k)$  pour que le lieu de P soit une variété  $V_{n-1}$  tangente à  $E_{n-2}$ ? Il faut et il suffit pour cela que les  $n - 2$  vecteurs  $A_i$  et les  $n - 1$  vecteurs  $\frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k})$  soient dans un même  $E_{n-1}$ . Les  $x_i$  doivent donc vérifier les  $n - 2$  conditions

$$\left[ A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}, \frac{\partial M}{\partial u_1} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_1}), \frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k}) \right] = 0.$$

Dans l'espace  $E_{n-2}$  le point P( $x_i$ ) est ainsi à l'intersection de  $n - 2$  quadriques ayant en commun la matrice à  $n$  lignes et  $n - 1$  colonnes

$$\left| A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, \frac{\partial M}{\partial u_1} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_1}) \right| = 0,$$

qui représente un  $E_{n-1}$ . Changeons de repère dans  $E_{n-2}$  de façon que cet  $E_{n-1}$  soit défini par les coordonnées  $X_1, X_2, \dots, X_{n-3}$ . Les équations des quadriques deviennent alors

$$a_1^i X_1 + a_2^i X_2 + \dots + a_{n-3}^i X_{n-3} + b_i = 0,$$

et leurs points communs, en dehors de  $E_{n-1}$ , vérifient

$$| a_1^i \ a_2^i \ \dots \ a_{n-3}^i \ b_i | = 0,$$

équation de degré  $n - 1$ , homogène par rapport aux deux coordonnées dont dépendent les  $a_i$  et  $b_i$ . Elle admet donc  $n - 1$  racines, et les quadriques  $n - 1$  points communs, qui sont  $n - 1$  points de contact de l'espace  $E_{n-2}$  avec sa variété focale.

2. Il est intéressant de se demander ce qu'il advient d'un  $E_p$  à  $q$  paramètres dans l'espace à  $n$  dimensions.

$p$  est bien entendu inférieur à  $n$ .

Si  $p + q < n$   $E_p$  décrit une variété à  $p + q$  dimensions.

Supposons  $p + q \geq n$  et cherchons, si elle existe, la variété focale de la famille  $E_p$ . Nous procédons comme plus haut; les coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_p$  de  $P$  dans le repère  $A_i (i = 1, 2, \dots, p)$  doivent vérifier les conditions pour que les  $p + q$  vecteurs

$$A_i, \frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k}) \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

appartiennent à un même  $E_{n-1}$ . Ces conditions sont en nombre  $p + q - n + 1$ .

Lorsque  $q \leq n - 1$  elles déterminent donc dans  $E_p$  une variété à  $n - 1 - q$  dimensions, que nous allons préciser. Son équation peut s'exprimer schématiquement par la matrice

$$\left\| A_i, \frac{\partial M}{\partial u_k} + \sum (x_i \frac{\partial A_i}{\partial u_k}) \right\| = 0$$

formée de  $p + q$  colonnes dont les éléments sont les  $n$  coordonnées des  $p + q$  vecteurs. Les  $p$  premières colonnes ont des éléments constants, tandis que les  $q$  dernières sont linéaires par rapport aux inconnues  $x_i$ . On peut la remplacer par une autre dont tous les éléments sont linéaires et qui est formée par  $n - p$  lignes et  $q$  colonnes. Donc :

Pour  $n - p \leq q \leq n - 1$  une famille ou congruence d' $E_p$  à  $q$  paramètres dans l'espace à  $n$  dimensions, admet pour variété focale propre une variété à  $n - 1$  dimensions touchée par chaque  $E_p$  suivant une variété algébrique à  $n - 1 - q$  dimensions d'ordre  $C_q^{n-p-1}$  (1).

Exemple ( $p = 2, q = 3, n = 5$ ). — Un  $E_2$  à 3 paramètres dans l'espace à 5 dimensions reste en contact avec une variété fixe à 4 dimensions tout le long d'une cubique plane.

Enfin pour  $q > n - 1$  la famille  $E_p$  n'admet plus de variété focale, elle sort de la famille des « congruences » pour rentrer dans celle des « complexes ». Lorsque  $q$  atteint la valeur  $(p + 1)(n - p)$ , on arrive à l' $E_p$  le plus général de l'espace  $E_n$ .

3. Certaines congruences dans  $E_n$  peuvent être obtenues, comme celles du début, à partir de développoides définies dans un espace à  $n + 1$  dimensions. Présentons à cette occasion la théorie générale des tangentes principales d'une variété  $V_p$  à  $p$  dimensions ( $p \leq n - 2$ ). Nous reprenons l'exposé du paragraphe 1 pour le cas  $p = n - 2$ , cette fois pour  $p$  quelconque; les notations sont les mêmes,  $i$  valant  $1, 2, \dots, p$ . Il faut distinguer deux cas :

(1)  $C_q^{n-p-1}$  représente le nombre des combinaisons de  $q$  objets pris  $n - p - 1$  à  $n - p - 1$  ou  $(n - p - 1)$ .



a.  $\boxed{2p < n.}$  Le lieu des  $E_p$  tangents en un point variable  $M$  d'une  $V_p$  située dans  $E_n$  est une variété  $V_{2p}$ . Les  $2p$  vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial u_i} \text{ et } \sum_i \left( x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

définissent un  $E_{2p}$  qui reste tangent à  $V_{2p}$  tout le long de la génératrice  $(x_i)$ . La variété  $V_{2p}$  est donc  $2p - 1$ -développée;  $c'$  est en ce sens que toute tangente à  $V_p$  peut être considérée comme principale.

Pour  $2p < n$  toute tangente à  $V_p$  est principale.

Exemple. —  $V_p$  est l'intersection  $V_2^8$  de trois hyperquadriques de l'espace à 5 dimensions.

b.  $\boxed{2p \geq n.}$  Pour déterminer des tangentes situées dans  $E_p$  dont le lieu soit une variété  $V_{n-1} n - 2$ -développée, il faut écrire que les  $2p$  vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial u_i} \text{ et } \sum_i \left( x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

appartiennent à un même  $E_{n-1}$ . Cette condition s'exprime par l'annulation d'une matrice

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial u_i}, \sum_i \left( x_i \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j} \right) \right\| = 0,$$

formée de  $2p$  colonnes dont les éléments sont les  $n$  coordonnées de chaque vecteur. Les  $p$  dernières colonnes sont linéaires par rapport aux inconnues  $x_i$ , les  $p$  premières n'en dépendent pas. On peut donc remplacer cette matrice par une autre formée par  $n - p$  lignes et  $p$  colonnes dont tous les éléments sont linéaires. Les tangentes correspondantes décrivent alors dans  $E_p$  un cône de sommet  $M$ , de dimension  $n - p - 1$ , d'ordre  $C_p^{n-p-1}$ . Donc :

*La  $n - 2$ -développée  $V_{n-1}$  lieu des tangentes principales d'une  $V_p$  dans  $E_n$ , est un lieu de cônes algébriques dont les sommets décrivent  $V_p$ . Chaque cône a pour dimension  $n - p - 1$  et pour ordre  $C_p^{n-p-1}$ .*

On établira, comme pour le cas  $p = n - 2$  du paragraphe I-1 :

*Le cône générique de sommet  $M$  est défini dans  $E_p$  comme lieu des droites doubles d'un réseau linéaire de dimension  $n - p - 1$  de cônes du second ordre de sommet  $M$ , formés par les cônes des tangentes pour les sections par  $E_p$  des variétés de  $E_n$  qui contiennent  $V_p$ .*

Dans une section hyperplane par un  $E_{n-1}$ , la congruence formée par les traces des  $E_p$  tangentes à  $V_p$  admet pour variété focale la trace de la développée  $V_{n-1}$ .

Nous arrêterons là ces considérations sur les congruences d'espaces linéaires, dont le développement, qui ne semble pas sans intérêt, sortirait de notre sujet.