Henri Cartan

Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 74-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__74_0>

THÉORIE DU POTENTIEL NEWTONIEN : ÉNERGIE, CAPACITÉ, SUITES DE POTENTIELS;

PAR M. HENRI CARTAN.

Le but de ce travail est essentiellement de développer les résultats annoncés dans une Note aux *Comptes rendus* (**214**, 1942, pp. 944-946). Nous avons adopté ici la forme d'un exposé qui, autant que possible, se suffise à lui-même, et avons tâché de dégager quelques faits essentiels et de les rattacher le plus directement possible aux fondements mêmes de la théorie.

Dans un tel exposé, il est fatal que les idées utilisées et les résultats obtenus ne soient pas tous nouveaux. Voici ce qui, à ma connaissance, est nouveau : l'idée de faire jouer au lemme 2 (§ 1) un rôle en théorie du potentiel newtonien; l'analyse, au paragraphe 5, des diverses topologies que l'on peut envisager sur l'espace des distributions d'énergie finie, et le théorème fondamental qui en découle (théorème 2), et qui joue, en théorie du potentiel, le rôle que joue en théorie de l'intégrale le théorème de Fischer-Riesz; la manière d'introduire la « distribution capacitaire intérieure » et la « distribution capacitaire extérieure » d'un ensemble quelconque (§ 6); les résultats du paragraphe 7 (identité des ensembles polaires et des ensembles de capacité extérieure nulle); enfin, les résultats des paragraphes 8, 9, 10 relatifs aux suites décroissantes de potentiels (ou de fonctions surharmoniques positives) sont nouveaux, en ce sens qu'il s'introduit dans ces questions un ensemble exceptionnel dont on savait déjà [Brelot (1)] qu'il est de capacité intérieure nulle, et dont je prouve ici qu'il est de capacité *extérieure* nulle; en outre, les théorèmes 4 et 7 sont démontrés ici non seulement pour les *suites* décroissantes de potentiels, mais pour des familles plus générales (familles « filtrantes décroissantes »).

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 207, 1938, p. 836.

Nous nous sommes limité au cas du potentiel newtonien, soit dans l'espace euclidien tout entier, soit à l'intérieur d'une boule de cet espace ([2]) (le potentiel étant alors pris par rapport à la « fonction de Green » de cette boule). La plupart des résultats subsisteraient sous des hypothèses plus générales : potentiel pris par rapport à la fonction de Green d'un ensemble ouvert quelconque, potentiel « d'ordre α » de M. Riesz et Frostman ([3]) (pour $\alpha < 2$). Mais les démonstrations devraient subir quelques modifications, et l'agencement de l'ensemble de la théorie s'en trouverait quelque peu compliqué. C'est pourquoi nous avons renoncé, dans un but de simplification, à exposer ici la théorie sous sa forme la plus générale.

1. Préliminaires sur les mesures de Radon. — On se place une fois pour toutes dans un espace topologique *localement compact* ([4]) E, dit « espace de base ». En fait, dans la suite de ce travail, l'espace de base sera soit l'espace euclidien, soit une boule ouverte ([2]) de l'espace euclidien.

On désignera une fois pour toutes par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions f définies sur E, *continues* et à valeurs réelles finies, telles que l'ensemble des points x de E où $f(x) \neq 0$ soit *relativement compact* (c'est-à-dire d'adhérence compacte); cette dernière condition exprime qu'il existe un ensemble compact (qui dépend de la fonction f envisagée) en dehors duquel f est identiquement

---

([2]) Nous appelons *boule* ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r le lieu des points de l'espace dont la distance euclidienne au point a est $< r$ (resp. $\leq r$). La *sphère* de centre a et de rayon r est le lieu des points dont la distance à a est *égale* à r.

([3]) O. FROSTMAN, *Thèse* (Lund, 1935); M. RIESZ, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (*Acta de Szeged*, 9, 1938, p. 1-42).

([4]) Pour les notions de topologie générale et la terminologie, *voir* N. BOURBAKI, *Actualités scient. et ind.*, fasc. 858.

nulle. $\mathcal{C}^+$ désignera le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des fonctions qui ne prennent que des valeurs *positives* (conformément à la terminologie de N. Bourbaki, le nombre *zéro* est considéré comme positif).

Les principales notions relatives *aux mesures de Radon* sur un espace localement compact ont été exposées dans un mémoire antérieur [5] auquel nous renvoyons le lecteur. Rappelons ici la définition d'une mesure de Radon *positive*, ou *distribution de masses positives*, sur l'espace E : c'est une fonction μ définie sur l'ensemble $\mathcal{C}^+$, à valeurs réelles (finies) positives, et *additive* [c'est-à-dire telle que $\mu(f_1+f_2)=\mu(f_1)+\mu(f_2)$]; une telle fonction μ est nécessairement *linéaire* [c'est-à-dire qu'on a, outre l'additivité, $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$ pour toute constante α finie positive]. Une telle fonction μ se prolonge d'une manière évidente en une fonction linéaire définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$, car toute fonction de $\mathcal{C}$ est différence de deux fonctions de $\mathcal{C}^+$.

Une mesure de Radon positive étant donnée, on définit l'intégrale d'une fonction « sommable » à valeurs positives [*voir* le travail cité en [5]]; il s'agit de sommabilité par rapport à la mesure μ envisagée. Notons que les valeurs infinies ne sont pas exclues de celles que peut prendre une fonction sommable; mais la valeur de l'intégrale est supposée essentiellement *finie*. Une fonction f à valeurs réelles non nécessairement positives est sommable si elle est la différence de deux fonctions sommables positives [auquel cas $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$ sont sommables]; l'intégrale d'une telle fonction se définit d'une manière évidente; elle sera notée $\int f(x)\,d\mu(x)$, ou plus brièvement $\int f\,d\mu$. Si f appartient à $\mathcal{C}^+$, f est sommable pour toute mesure de Radon positive μ, et $\int f\,d\mu$ n'est autre que $\mu(f)$. Lorsque f est *semi-continue inférieurement*, à valeurs *positives* (finies ou non), f est sommable si la borne supérieure des intégrales $\int g\,d\mu$ relatives aux g de $\mathcal{C}^+$ telles que $g(x) \leqq f(x)$ pour tout x, est *finie;* cette borne supérieure n'est alors autre que l'intégrale $\int f\,d\mu$. Lorsque cette borne supé-

---

(5) *Bull. Soc. Math. France*, 69, 1941, p. 71-96.

rieure est infinie, nous la noterons encore $\int f(x)\,d\mu(x)$, par abus de langage.

Une mesure de Radon *réelle* μ est, par définition, la différence de deux mesures de Radon positives; on démontre l'existence de deux mesures positives μ^+ et μ^- telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et que, pour toute décomposition $\mu = \mu_1 - \mu_2$ (μ_1 et μ_2 positives), on ait nécessairement $\mu_1 \geqq \mu^+$ et $\mu_2 \geqq \mu^-$ (de deux mesures de Radon positives λ et ν, on dit que $\lambda \geqq \nu$ si l'on a $\int f\,d\lambda \geqq \int f\,d\nu$ pour toute f de $\mathcal{C}^+$). Une mesure μ est *nulle* si $\mu(f)$ est nul pour toute f de $\mathcal{C}^+$. Deux mesures sont identiques (ou égales) si leur différence est nulle.

Dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures de Radon réelles, on définit une topologie, que nous appellerons la *topologie vague* (par opposition à d'autres topologies qui seront définies au paragraphe 4) : considérons l'intégrale $\mu(f)$, pour chaque $f \in \mathcal{C}^+$, comme une fonction de μ définie sur $\mathcal{M}$; la topologie vague sera *la moins fine* ([4]) des topologies rendant continues toutes ces fonctions de μ. Autrement dit, un *filtre* ([4]) Φ sur $\mathcal{M}$ *converge vaguement* vers un élément μ_0 de $\mathcal{M}$ si, pour chaque f de $\mathcal{C}^+$, l'intégrale $\int f\,d\mu$, considérée comme fonction de μ, a pour limite $\int f\,d\mu_0$ suivant le filtre Φ.

Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathcal{C}^+$ sera dit *total* si, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^+$, pour tout ensemble compact K tel que f soit identiquement nulle en dehors de K, pour tout voisinage V de K, et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, existe une fonction φ, combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{O}$ à coefficients positifs, telle que : 1° φ soit identiquement nulle en dehors de V; 2° $|f(x) - \varphi(x)| \leqq \varepsilon$ en tout point x de l'espace de base.

On voit sans peine que deux mesures par rapport auxquelles ont même intégrale toutes les fonctions d'un sous-ensemble total de $\mathcal{C}^+$, sont *identiques*. En outre :

Lemme 1. — Pour qu'un filtre Φ sur l'ensemble $\mathcal{M}^+$ des mesures *positives* converge vaguement, il faut et il suffit que, pour toute fonction φ d'un sous-ensemble *total* de $\mathcal{C}^+$, $\int \varphi\,d\mu$ ait une limite finie (nécessairement positive) suivant Φ. Cette limite est alors égale à $\int \varphi \, d\mu_0$, μ_0 étant la limite du filtre convergent Φ.

Signalons enfin un résultat auquel nous aurons à faire appel à maintes reprises; il vaut lorsque E est un sous-ensemble *ouvert* de l'espace euclidien :

Lemme 2. — Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}^+$, jouissant des propriétés suivantes : 1° $\mathcal{D}$ contient des fonctions (autres que la constante 0) qui s'annulent en dehors d'un voisinage arbitrairement petit d'un point fixe de E; 2° si une fonction φ appartient à $\mathcal{D}$, toute *translatée* ψ de φ, telle que ψ s'annule identiquement en dehors du sous-ensemble ouvert E de l'espace euclidien, appartient encore à $\mathcal{D}$. Alors un tel ensemble $\mathcal{D}$ est *total* [6].

---

[6] Voici brièvement comment on peut démontrer le lemme 2, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du « théorème d'approximation » dont il est question dans ma Note sur la mesure de Haar (*C. R. Acad. Sc.*, 211, 1940, p. 759-762). Ici, dans l'espace euclidien où chaque point x sera identifié au vecteur d'origine O et d'extrémité x, et où la différence de deux vecteurs x et y sera notée $x-y$, nous nous servirons de la mesure *invariante par translation* (mesure de « volume » définie à un facteur constant près) que nous noterons dx. Soit alors une fonction $f \in \mathcal{C}^+$ qui s'annule en dehors d'un ensemble compact K; cherchons à l'approcher à ε près par des fonctions de $\mathcal{C}^+$ qui s'annulent en dehors d'un voisinage donné V de K. Il existe un voisinage W de l'origine, tel que tout ensemble translaté de W qui rencontre K soit contenu dans V. Alors, si une $\varphi \in \mathcal{C}^+$ est nulle en dehors de W et satisfait à

$$\int \varphi(x) \, dx = 1,$$

la fonction « composée »

$$h(x) = \int \varphi(x-y) f(y) \, dy = \int \varphi(y) f(x-y) \, dy$$

est nulle en dehors de W; en outre, si W est assez petit, on a

$$|f(x) - h(x)| \leqq \varepsilon$$

en tout point x. Ayant ainsi choisi φ, faisons une partition de K en un nombre fini d'ensembles A_i (mesurables pour la mesure dx) assez petits pour que, prenant arbitrairement un point y_i dans chaque A_i, la fonction de x

$$\sum_i \varphi(x-y_i) \int_{A_i} f(y) \, dy$$

diffère partout de $h(x)$ d'aussi peu qu'on veut (elle sera encore nulle en dehors de V). Or cette fonction de x est combinaison linéaire finie de « translatées » de la fonction $\varphi(x)$. Ceci établit le lemme 2.

2. Fonction fondamentale; potentiel newtonien. — Dans l'espace euclidien de dimension k ($k \geqq 2$), considérons une fois pour toutes une origine O et une boule ouverte de centre O et de rayon R. Cette boule constituera l'*espace de base* E. Le rayon R pourra être infini si $k \geqq 3$; pour $k = 2$, R sera supposé essentiellement fini.

$x - y$ désignera le vecteur libre, différence des vecteurs d'origine O et d'extrémités respectives x et y; la longueur euclidienne de ce vecteur sera notée $|x - y|$.

Dans l'espace de base E, on considère une fois pour toutes une fonction $f(x, y)$ du couple de points x, y de l'espace E. Ce sera :

si E est l'espace euclidien de dimension $k \geqq 3$,

$$f(x, y) = |x - y|^{2-k};$$

si E est une boule ouverte (de centre O et de rayon R fini), $f(x, y)$ sera la « fonction de Green » de cette boule; précisons : pour $k = 2$,

$$f(x, y) = \log \left| \frac{R^2 - \bar{x} y}{R(x - y)} \right|,$$

x et y désignant aussi les nombres complexes, affixes des points du plan de mêmes noms, et $\bar{x}$ désignant le nombre complexe conjugué de x; pour $k \geqq 3$,

$$f(x, y) = |x - y|^{2-k} - \left(R^2 - 2|x|.|y|\cos\theta + \frac{|x|^2.|y|^2}{R^2} \right)^{1-\frac{k}{2}},$$

θ désignant l'angle des vecteurs d'origine O et d'extrémités respectives x et y.

Dans tous les cas, la « fonction fondamentale » f est *symétrique* $[f(x, y) = f(y, x)]$, à valeurs réelles positives (non nulles), finie pour $x \neq y$ et infinie pour $x = y$, continue par rapport à l'ensemble des variables x et y; et lorsque x reste dans un ensemble compact, $f(x, y)$ *tend vers zéro* lorsque $|y|$ tend vers R. Pour $k = 2$, la différence entre $f(x, y)$ et la fonction $\log \frac{1}{|x - y|}$ est, pour chaque $y \in E$, une fonction *harmonique* de $x \in E$; pour $k \geqq 3$, la différence entre $f(x, y)$ et la fonction $|x - y|^{2-k}$ est, pour chaque $y \in E$, une fonction harmonique de $x \in E$.

La fonction fondamentale $f(x, y)$ donne naissance à la théorie du *potentiel newtonien* (suivant la terminologie employée classiquement, au moins lorsque R est infini). On appelle *potentiel* d'une distribution *positive* μ la fonction

$$U^{\mu}(x) = \int f(x, y)\, d\mu(y).$$

Pour chaque x, sa valeur est un nombre positif bien déterminé, fini ou infini [noter que $f(x, y)$ est semi-continue inférieurement en y]. On montre facilement que $U^{\mu}(x)$ est une fonction *semi-continue inférieurement* de x. Si μ est portée par un ensemble *compact* K, $U^{\mu}(x)$ est une fonction *harmonique* (donc à valeurs finies) dans l'ensemble ouvert complémentaire de K. Cette circonstance permet d'étudier le cas où la distribution μ n'est pas portée par un ensemble compact : sur tout ensemble ouvert A relativement compact, le potentiel U^{μ} est la somme du potentiel U^{ν} de la restriction ν de μ à l'ensemble A, et de la limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques dans A. Or une telle limite est, on le sait, harmonique ou identique à $+\infty$. Ainsi : ou bien le potentiel U^{μ} est infini en tout point de l'espace (cas banal que nous exclurons désormais), ou bien il est, sur tout ensemble ouvert relativement compact, somme d'une fonction harmonique et du potentiel d'une distribution positive portée par un compact. En particulier, le potentiel U^{μ} est une fonction *harmonique* sur l'ensemble ouvert, complémentaire du noyau fermé de μ. Tous ces faits sont bien connus.

Pour toute boule fermée de centre a et de rayon r, contenue dans l'espace de base E, nous désignerons par $\varepsilon_{a,r}$ la distribution positive, de masse totale 1, répartie uniformément sur la *sphère* de centre a et de rayon r. Soit ε_a la distribution formée d'une masse 1 placée au point a. Considérons la différence des potentiels de ε_a et de $\varepsilon_{a,r}$; comme il est bien connu, cette différence est *nulle* à l'extérieur de la boule de centre a et de rayon r, et, à l'intérieur, elle est égale à

$$\log \frac{r}{|x-a|} \qquad \text{si } k = 2,$$

$$|x-a|^{2-k} - r^{2-k} \qquad \text{si } k \geqq 3.$$

Il résulte de là que les fonctions $U^{\varepsilon_{a,\frac{r}{2}}} - U^{\varepsilon_{a,r}}$ (où a et r varient de manière que la boule fermée de centre a et de rayon r reste contenue dans l'espace de base E) forment un ensemble de fonctions de $\mathcal{C}^+$ qui est *total* (*cf.* § 1, lemme 2).

Soient maintenant deux distributions positives quelconques μ et ν. Les deux intégrales $\int U^\mu \, d\nu$ et $\int U^\nu \, d\mu$ ont un sens, puisque U^μ et U^ν sont des fonctions positives semi-continues inférieurement. En vertu d'un théorème classique de Lebesgue-Fubini, ces deux intégrales sont égales entre elles et à l'intégrale « double » $\iint f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ (leur valeur commune est finie ou infinie). Telle est la classique « *loi de réciprocité* » ([7]).

Pour toute distribution positive μ de potentiel non identiquement infini, et toute distribution λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, l'intégrale $\int U^\mu \, d\lambda$ est *finie*. En effet, sur la boule de centre a et de rayon r, U^μ est la somme d'une fonction harmonique et du potentiel d'une distribution portée par un compact; il suffit donc de faire la démonstration lorsque μ est portée par un compact. Or, dans ce cas, $\int U^\mu \, d\lambda = \int U^\lambda \, d\mu$ est égale à l'intégrale, par rapport à μ, d'une fonction continue; c'est donc une quantité finie.

Le résultat précédent s'énonce encore ainsi : tout potentiel $U^\lambda (\lambda = \varepsilon_{a,r})$ est sommable pour toute distribution positive μ de potentiel non identiquement infini.

Lemme 3. — Soient μ et ν deux distributions positives de potentiels non identiquement infinis; si l'on a $\int U^\lambda \, d\mu = \int U^\lambda \, d\nu$ pour toute distribution λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, on a $\mu = \nu$. En outre, soit Φ un filtre sur l'ensemble des distributions positives de potentiel non identiquement infini; si $\int U^\lambda \, d\mu$, considéré comme fonction de μ, a une limite suivant Φ, et cela pour chaque λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, alors la distribution μ converge vaguement, suivant Φ, vers une distribution positive μ_0 telle que $\int U^\lambda \, d\mu_0 = \lim_{\Phi} \int U^\lambda \, d\mu$.

([7]) De La Vallée Poussin, *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel*, etc. (*Actualités scient. et ind.*, fasc. 578); *voir* p. 15.

Ce lemme résulte immédiatement du lemme 1 (§ 1) et du fait que les différences $U^{\varepsilon_{a,\frac{r}{2}}} - U^{\varepsilon_{a,r}}$ forment un sous-ensemble total de $\mathcal{C}^+$.

3. **Potentiels et fonctions surharmoniques; familles croissantes de potentiels.** — Rappelons la notion maintenant classique de *fonction surharmonique* dans un sous-ensemble ouvert A de l'espace euclidien : c'est une fonction semi-continue inférieurement, pouvant prendre la valeur $+\infty$, et telle que sa valeur en un point quelconque a de A soit au moins égale à sa moyenne sur toute sphère de centre a et de rayon r, pourvu que la boule fermée de centre a et de rayon r soit contenue dans A. On peut d'ailleurs remplacer cette condition par une autre, en apparence plus faible; mais peu nous importe ici. On montre facilement : pour tout ensemble ouvert B dont l'adhérence $\overline{B}$ est compacte et contenue dans l'ensemble A où φ est définie et surharmonique, toute fonction harmonique qui est majorée par φ sur la frontière de B est aussi majorée par φ en tout point de B (d'où la dénomination de « surharmonique »).

Le potentiel d'une distribution positive μ est une fonction surharmonique dans l'espace de base E. En effet, il s'agit de montrer

$$\int U^{\mu}\, d\varepsilon_a \geqq \int U^{\mu}\, d\varepsilon_{a,r},$$

ce qui est évident par application de la loi de réciprocité.

On doit à F. Riesz une sorte de réciproque de cette proposition; rappelons le *théorème de Riesz* ([8]) :

Soit φ une fonction *surharmonique* dans un sous-ensemble ouvert A de l'espace euclidien, qui ne soit identiquement infinie dans aucune composante connexe de A; alors φ définit dans l'espace localement compact A, une *distribution positive* μ et *une seule* telle que, pour tout compact K contenu dans A, la restriction de μ à l'ensemble K ait pour *potentiel* une fonction dont la différence avec φ soit *harmonique* à l'intérieur de K.

Nous admettrons sans démonstration ce théorème, qui peut d'ailleurs être établi aujourd'hui beaucoup plus simplement et

---

([8]) F. Riesz, *Acta mathematica*, 54, 1930, p. 321-360.

rapidement que ne le faisait F. Riesz; il suffit pour cela d'utiliser les notions relatives aux mesures de Radon, telles par exemple qu'elles sont rappelées au paragraphe 1 de ce travail.

Appliquons le théorème de F. Riesz à la démonstration du résultat suivant, qui est lui aussi connu (au moins dans le cas où l'espace de base E est l'espace euclidien tout entier) :

Proposition 1. — *Pour qu'une fonction surharmonique positive dans tout l'espace* E *soit le potentiel d'une distribution positive, il faut et il suffit que sa moyenne sur la sphère de centre* O *et de rayon* r *tende vers* o *quand* r *tend vers* R [9].

Montrons d'abord que cette condition est *nécessaire*. Désignons par ε_r la distribution uniforme de la masse 1 sur la sphère de centre O et de rayon r; si U^μ est un potentiel non identiquement infini, l'intégrale $\int U^{\varepsilon_r}\, d\mu$ est finie (*cf.* § 2); comme la fonction U^{ε_r} décroît quand r augmente, et, en chaque point x, a pour limite o quand r tend vers R, alors, d'après un théorème classique de Lebesgue, $\int U^{\varepsilon_r}\, d\mu$ tend vers zéro quand r tend vers R. Donc la moyenne $\int U^\mu\, d\varepsilon_r$ du potentiel U^μ tend vers zéro quand r tend vers R.

Reste à prouver que la condition est *suffisante*. Soit φ une fonction surharmonique positive, telle que $\lim\limits_{r \to R} \int \varphi\, d\varepsilon_r = 0$. Désignons par μ la distribution positive que le théorème de F. Riesz lui associe, et par μ_r la restriction de μ à la boule fermée de centre O et de rayon $r < R$. La fonction $\varphi(x) - U^{\mu_r}(x)$ est surharmonique dans tout l'espace, et harmonique à l'intérieur de la boule de centre O et de rayon r; comme sa moyenne sur la sphère de centre O et de rayon ρ tend vers o quand ρ tend vers R, elle est partout $\geqq 0$. Donc $U^\mu(x) = \lim\limits_{r \to R} U^{\mu_r}(x)$ est partout $\leqq \varphi(x)$. Reste à montrer que la différence $\varphi(x) - U^\mu(x)$, qui est harmonique et positive dans tout l'espace E, y est identiquement nulle;

---

(9) Pour le cas où $R = +\infty$, *voir* M. Brelot, *Ann. Éc. Norm. sup.*, t. LXI, Fasc. 4, p. 301 (*voir* théor. 4); dans le cas où R est fini, la proposition 1 résulte d'un théorème de F. Riesz [*loc. cit.*, en (8), p. 357].

or cela tient à ce que sa moyenne sphérique tend vers o quand r tend vers R.

La proposition 1 étant ainsi démontrée, en voici quelques conséquences importantes :

Premier corollaire. — Toute fonction surharmonique positive dans E, qui est majorée par le potentiel (non identiquement infini) d'une distribution positive, est elle-même le potentiel d'une distribution positive.

Deuxième corollaire. — φ désignant une fonction surharmonique positive quelconque (par exemple une constante), et U^{μ} le potentiel (non identiquement infini) d'une distribution positive, la fonction $\inf(U^{\mu}, \varphi)$ (égale en chaque point à la plus petite des valeurs de U^{μ} et de φ en ce point) est le potentiel d'une distribution positive. (En effet, elle est surharmonique, et majorée par le potentiel U^{μ}).

La limite d'une suite *croissante* de fonctions surharmoniques est *surharmonique :* en effet, elle est semi-continue inférieurement, et l'inégalité relative aux moyennes sphériques se conserve par passage à la limite. Il est utile de remarquer que cette propriété s'étend au cas plus général d'un ensemble *filtrant croissant* de fonctions surharmoniques; on appelle ainsi un ensemble de fonctions surharmoniques φ_i (i parcourant un ensemble quelconque d'indices) tel que, quelles que soient φ_i et φ_j dans cet ensemble, il existe dans l'ensemble une φ_l qui soit $\geqq \varphi_i$ et $\geqq \varphi_j$. Ici encore, l'inégalité relative aux moyennes sphériques se conserve par passage à la borne supérieure, bien que le théorème de Lebesgue (qui affirme que l'intégrale de la limite d'une suite croissante de fonctions sommables est la limite des intégrales de ces fonctions) ne soit plus applicable; mais ce théorème s'étend au cas d'un ensemble *filtrant croissant* de fonctions *semi-continues inférieurement.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si l'on a une suite croissante* (ou plus généralement *un ensemble filtrant croissant*) *de potentiels* [10] U^{μ_n}

[10] En général, lorsque nous parlerons de *potentiel* (tout court), il s'agira de potentiel d'une distribution *positive*, ce potentiel n'étant pas identiquement infini.

inférieurs à un potentiel fixe, leur borne supérieure est le potentiel d'une distribution positive μ, *qui est limite vague des distributions* μ_n.

En effet, la borne supérieure des U^{μ_n} est une fonction surharmonique majorée par un potentiel, c'est donc le potentiel d'une distribution positive μ. Pour prouver que μ est limite vague des μ_n, il suffit, d'après le lemme 3 (§ 2), de montrer que, pour toute distribution λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, on a

$$\int U^\lambda\, d\mu = \lim \int U^\lambda\, d\mu_n,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int U^\mu\, d\lambda = \lim \int U^{\mu_n}\, d\lambda,$$

et, sous cette forme, c'est évident.

4. **Énergie.** — La valeur commune des deux intégrales $\int U^\mu\, d\nu$ et $\int U^\nu\, d\mu$, où μ et ν désignent deux distributions positives (*cf.* § 2), s'appelle l'*énergie mutuelle* de μ et ν. Lorsque $\mu = \nu$, on obtient l'*énergie* $\int U^\mu\, d\mu$ de la distribution positive μ.

Remarquons tout de suite que si les potentiels de deux distributions positives μ et ν satisfont à $U^\mu(x) \leqq U^\nu(x)$ partout, l'énergie de μ est au plus égale à celle de ν; en effet

$$\int U^\mu d\mu \leqq \int U^\nu\, d\mu = \int U^\mu\, d\nu \leqq \int U^\nu\, d\nu.$$

Nous désignerons par $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des *distributions positives d'énergie finie*. Le potentiel d'une distribution de $\mathcal{E}^+$ n'est évidemment pas identiquement infini.

Une propriété fondamentale, classique, de l'énergie est la suivante ([11]) : quelles que soient les distributions positives μ et ν, on a

$$\left(\int U^\mu\, d\nu\right)^2 \leqq \left(\int U^\mu\, d\mu\right) \cdot \left(\int U^\nu\, d\nu\right). \tag{1}$$

([11]) Pour une démonstration, voir par exemple p. 6 du Mémoire de M. Riesz cité en ([3]); cette démonstration vaut pour l'espace euclidien tout entier, de

Il en résulte que la somme de deux distributions de $\mathcal{E}^+$ est une distribution de $\mathcal{E}^+$. Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des différences $\mu - \nu$, où μ et ν appartiennent à $\mathcal{E}^+$; $\mathcal{E}$ est un *espace vectoriel* sur le corps des nombres réels, et pour toute distribution λ de $\mathcal{E}$, on peut définir l'*énergie* de λ comme étant égale à

$$\int (U^{\lambda^+} - U^{\lambda^-})(d\lambda^+ - d\lambda^-) = \int U^{\lambda^+} d\lambda^+ + \int U^{\lambda^-} d\lambda^- - 2\int U^{\lambda^+} d\lambda^-;$$

c'est un nombre *fini* bien déterminé, puisque toutes les intégrales du second membre ont une valeur finie. L'énergie d'une λ de $\mathcal{E}$ est *essentiellement positive*, comme cela résulte de l'inégalité (1).

L'énergie mutuelle $\int U^\mu d\nu$ peut être définie pour $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathcal{E}$, même si μ et ν ne sont pas positives; c'est une fonction *bilinéaire* de μ et ν, que nous noterons (μ, ν); on a évidemment

$$(\mu, \mu) = \int U^\mu d\mu.$$

En écrivant que l'énergie de $a\mu + b\nu$ est positive quelles que soient les constantes réelles a et b, on obtient l' « inégalité de Schwarz »

$$|(\mu, \nu)|^2 \leqq (\mu, \mu).(\nu, \nu),$$

qui généralise l'inégalité (1).

Il est facile de démontrer que *l'énergie d'une distribution de $\mathcal{E}$ ne peut être nulle que si cette distribution est nulle*. En effet, si $(\mu, \mu) = 0$, l'inégalité de Schwarz prouve que $(\mu, \lambda) = 0$ pour toute distribution λ de $\mathcal{E}$; si l'on applique ceci aux λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, on trouve (lemme 3, § 2) que μ est nulle.

Pour toute distribution μ de $\mathcal{E}$, nous noterons $\|\mu\|$ la racine carrée positive de l'énergie de μ. C'est une *norme* ([12]) sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. En effet, $\|\mu\| = 0$ équivaut bien à $\mu = 0$; en

---

dimension $k \geqq 3$; le cas du potentiel pris par rapport à la fonction de Green s'y ramène; enfin, le cas $k = 2$ se traite à part : le potentiel, pris par rapport à la fonction de Green d'un cercle, d'une distribution positive portée par un compact, est aussi le *potentiel logarithmique* d'une distribution de masse totale nulle, potentiel qui est justiciable d'une formule de composition de M. Riesz (*loc. cit.*).

([12]) L'idée de considérer systématiquement cette norme sur l'espace $\mathcal{E}$ remonte à mon article cité en ([5]).

outre, si c est un nombre réel, on a

$$\|c\mu\| = |c| . \|\mu\|;$$

enfin

$$\|\mu + \nu\| \leqq \|\mu\| + \|\nu\|,$$

comme on le voit en élevant au carré et appliquant l'inégalité de Schwarz.

On voit qu'en « complétant » l'espace $\mathcal{E}$ pour cette norme, on obtiendrait un espace de Hilbert. On vérifie sans peine que $\mathcal{E}$ lui-même *n'est pas complet* [13]; par contre, nous verrons tout à l'heure [14] que *le sous-espace* $\mathcal{E}^+$ *des distributions positives d'énergie finie est complet.* Mais avant d'aborder l'étude qui nous conduira à ce théorème fondamental, notons un résultat important :

Proposition 2. — *Soient* μ *une distribution positive d'énergie finie, et* φ *une fonction surharmonique positive dans tout l'espace* E (espace de base). *Si l'inégalité* $U^\mu(x) \leqq \varphi(x)$ *a lieu sur un noyau de* μ, *elle a lieu en tout point de l'espace* E.

En effet, $\inf(U^\mu, \varphi)$ est le potentiel U^ν d'une distribution ν (*cf.* 2ᵉ corollaire de la prop. 1, § 3) qui, comme μ, a une énergie finie. D'après les hypothèses, $\int (U^\mu - U^\nu)(d\mu - d\nu) \leqq 0$; ceci exige $\mu = \nu$, donc $\inf(U^\mu, \varphi) = U^\mu$. C. Q. F. D.

Lorsque φ est une *constante* positive, on obtient le fameux « principe du maximum » [15].

---

(13) Considérons par exemple, dans l'espace euclidien de dimension 3, la distribution μ_n formée d'une masse -1 répartie uniformément sur la sphère de centre O et de rayon 1, et d'une masse $+1$ répartie uniformément sur la sphère de centre O et de rayon $1 - 4^{-n}$. Il n'existe aucune distribution μ de $\mathcal{E}$ qui soit somme de la série $\Sigma \mu_n$ au sens de la norme, bien que la série des normes $\Sigma \|\mu_n\|$ soit convergente; en effet, on voit facilement que le potentiel d'une telle μ, si elle existait, devrait être, dans la boule ouverte de centre O et de rayon 1, égal à la somme des potentiels des μ_n, donc que, à l'intérieur de cette boule, μ s'obtiendrait par superposition des μ_n, ce qui est absurde, la somme des masses des μ_n intérieures à la boule étant infinie.

(14) Paragraphe 5, théorème 2.

(15) Frostman, *Thèse*, p. 68. La démonstration de Frostman est foncièrement différente de celle donnée ici.

5. **L'espace $\mathcal{E}^+$ est complet.** — La distance $\|\mu - \nu\|$ de deux éléments μ et ν de $\mathcal{E}$ définit une topologie dans $\mathcal{E}$; nous l'appellerons la *topologie forte*. Une suite $\{\mu_n\}$ sera donc *fortement convergente* vers une μ de $\mathcal{E}$ si $\|\mu - \mu_n\|$ tend vers o. On appelle *suite de Cauchy* ([16]) une suite $\{\mu_n\}$ telle que $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ p \to \infty}} \|\mu_n - \mu_p\| = 0$; c'est le cas d'une suite fortement convergente. Dire que $\mathcal{E}^+$ est *complet*, c'est dire que toute suite de Cauchy dont les éléments sont positifs converge fortement vers une distribution positive ([17]); c'est ce que nous prouverons à la fin de ce paragraphe.

Conformément aux conventions en usage dans l'espace de Hilbert, une suite de $\mu_n \in \mathcal{E}$ sera dite *faiblement convergente* vers $\mu \in \mathcal{E}$, si : 1° les normes $\|\mu_n\|$ sont bornées; 2° pour chaque $\lambda \in \mathcal{E}$, (μ, λ) est limite de (μ_n, λ). Grâce à 1°, il *suffit* que la condition 2° soit vérifiée pour un ensemble d'éléments λ *partout dense* dans $\mathcal{E}$ (« partout dense » s'entendant au sens de la topologie forte).

Si μ est limite faible d'une suite de μ_n telles que $\|\mu_n\| \leqq M$, on a

$$\|\mu\| \leqq M.$$

En effet,

$$\|\mu\|^2 = (\mu, \mu) = \lim_{n \to \infty} (\mu, \mu_n), \qquad \text{et} \qquad |(\mu, \mu_n)| \leqq \|\mu\| . \|\mu_n\| \leqq M . \|\mu\|.$$

De là résulte la proposition classique : *si une suite de Cauchy converge faiblement, elle converge fortement.* En effet, si μ est limite faible de la suite de Cauchy μ_n, $\mu - \mu_p$ est limite faible des $\mu_n - \mu_p$ (quand n tend vers l'infini), donc

$$\|\mu - \mu_p\| \leqq \limsup_{n \to \infty} \|\mu_n - \mu_p\| = \varepsilon_p,$$

et ε_p tend vers zéro quand p tend vers l'infini.

Comparons maintenant les convergences forte et faible à la convergence *vague* (§ 1) qui, elle, ne fait pas intervenir la « fonction fondamentale » du potentiel.

([16]) Plus généralement, on appelle *filtre de Cauchy* [*voir* Bourbaki, *loc. cit.* en ([4])] tout filtre qui possède des ensembles de diamètre arbitrairement petit (pour la distance déduite de la norme).

([17]) On montre sans peine que si toute suite de Cauchy est convergente, tout filtre de Cauchy est aussi convergent.

Proposition 3. — *La convergence faible entraîne la convergence vague* (*a fortiori*, la convergence forte entraîne la convergence vague).

En effet, si, pour chaque $\lambda \in \mathcal{E}$, (μ_n, λ) tend vers (μ, λ), le lemme 3 (§ 2) permet d'affirmer que μ est limite vague des μ_n.

La proposition précédente admet une sorte de réciproque; avant de l'établir, faisons une remarque sur les suites monotones de potentiels de distributions positives.

Proposition 4. — *Si* $U^\mu (\mu \in \mathcal{E}^+)$ *est, en chaque point, limite d'une suite croissante ou décroissante de potentiels* $U^{\mu_n} (\mu_n \in \mathcal{E}^+)$, *alors* μ *est limite forte de la suite* μ_n.

En effet, si $U^{\mu_n} \leqq U^{\mu_p}$, on a

$$\| \mu_n - \mu_p \|^2 \leqq \| \mu_p \|^2 - \| \mu_n \|^2.$$

Donc la suite μ_n est une suite de Cauchy. Il suffit alors de montrer que μ_n converge faiblement vers μ, c'est-à-dire que, pour toute $\lambda \in \mathcal{E}^+$,

$$\int U^\mu \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int U^{\mu_n} \, d\lambda,$$

ce qui est évident (passage à la limite sous le signe d'intégration).

Remarque. — La conclusion subsisterait même si l'ensemble des points où $U^\mu(x)$ n'est pas la limite de $U^{\mu_n}(x)$, au lieu d'être supposé vide, était seulement supposé de mesure nulle pour toute distribution d'énergie finie; ceci a un intérêt dans le cas d'une suite *décroissante* de potentiels. D'autre part, la proposition 4 s'étend évidemment au cas d'un ensemble filtrant *croissant* (*cf.* § 3) de potentiels par contre, son extension aux ensembles filtrants *décroissants* n'est pas immédiate; elle résultera de la suite de ce travail (§ 8, théorème 4).

Une conséquence de la proposition 4 est celle-ci : toute μ de $\mathcal{E}^+$ est limite forte de ses restrictions à des boules fermées ayant pour centre l'origine O et contenues dans l'espace de base E. Autrement dit, celles des distributions de $\mathcal{E}^+$ qui sont *portées par des* *compacts* forment un sous-ensemble de $\mathcal{E}^+$, *partout dense* pour la topologie forte.

D'autre part, si une μ positive est portée par un compact, son potentiel U^μ est limite croissante des potentiels obtenus à partir de U^μ par médiations sphériques (de rayons assez petits tendant vers zéro), potentiels qui sont *continus*. Ainsi : les distributions positives qui sont portées par des compacts et dont le potentiel est continu forment un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{E}^+$.

Enfin, soit $\mu \in \mathcal{E}^+$, portée par un compact, et de potentiel continu. Posons $\inf\left(U^\mu, \frac{1}{n}\right) = U^{\mu_n}$. La suite des U^{μ_n} est décroissante et sa limite est nulle en tout point; donc (prop. 4) μ_n converge fortement vers zéro. Ainsi, μ est limite forte des $(\mu - \mu_n)$, distributions de $\mathcal{E}$ dont le potentiel appartient à $\mathcal{C}^+$ (en effet, on a $U^\mu(x) = U^{\mu_n}(x)$ hors d'un compact convenable, car $U^\mu(x)$ tend vers o quand la distance de x à l'origine tend vers le rayon R de l'espace de base).

De tout ce qui précède, il résulte que *les distributions de $\mathcal{E}$ dont le potentiel appartient à la famille $\mathcal{C}$ forment un sous-espace partout dense de $\mathcal{E}$.*

Réciproque de la proposition 3. — *Si une suite d'éléments μ_n de $\mathcal{E}^+$, d'énergies bornées, converge vaguement vers une distribution μ, cette distribution appartient à $\mathcal{E}^+$ et est aussi limite faible des μ_n.*

Tout d'abord, μ est bien d'énergie *finie*, car si $\|\mu_n\| \leq M$ pour tout n, on a, en vertu de la semi-continuité inférieure de U^{μ_p},

$$\int U^{\mu_p}\, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int U^{\mu_p}\, d\mu_n \leq M^2,$$

puis, en vertu de la semi-continuité inférieure de U^μ,

$$\int U^{\mu}\, d\mu \leq \liminf_{p \to \infty} \int U^{\mu}\, d\mu_p \leq M^2.$$

Pour montrer que μ est limite faible de la suite μ_n, il suffit alors de prouver que (μ, λ) est limite des (μ_n, λ) pour chaque λ d'un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{E}$, en fait pour les λ dont le potentiel appartient à $\mathcal{C}$; or, pour une telle λ,

$$\int U^{\lambda}\, d\mu = \lim \int U^{\lambda}\, d\mu_n,$$

d'après la définition même de la convergence vague.

Nous sommes enfin en mesure de démontrer le théorème fondamental :

THÉORÈME 2. — *L'espace $\mathcal{E}^+$ (espace des distributions positives d'énergie finie) est complet* [18].

Soit en effet une suite de Cauchy d'éléments μ_n de $\mathcal{E}^+$. Je dis d'abord que les μ_n convergent *vaguement* vers une certaine distribution positive μ; en effet, pour tout élément λ de $\mathcal{E}^+$, la suite des nombres (μ_n, λ) a une limite [car c'est une suite de Cauchy, en vertu de l'inégalité de Schwarz

$$|(\mu_n - \mu_p, \lambda)| \leq \|\mu_n - \mu_p\| . \|\lambda\|].$$

Appliquons ce résultat aux distributions λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$: le lemme 3 prouve que la suite μ_n converge vaguement vers une distribution μ. Mais alors μ est aussi limite *faible* des μ_n, car la suite des énergies $\|\mu_n\|$ est évidemment bornée. Enfin, comme la suite μ_n est une suite de Cauchy, sa limite faible en est aussi limite forte. C. Q. F. D.

Terminons ce paragraphe par une remarque au sujet de la proposition 4. *Pour qu'une suite croissante* (ou un ensemble *filtrant croissant*) *de potentiels* U^{μ_n} (μ_n positives) *ait pour limite le potentiel d'une distribution* μ *d'énergie finie, il faut et il suffit que les énergies des* μ_n *soient bornées.* La condition est trivialement nécessaire; elle est suffisante, car si $V(x)$ désigne alors la borne supérieure des $U^{\mu_n}(x)$, le critère de la proposition 1 (§ 3) s'applique à V : désignons en effet par ε_r la distribution uniforme de la masse 1 sur la sphère de centre O et de rayon $r < R$,

---

[18] Dans l'article cité en [5], j'avais déjà démontré, par une tout autre voie, un théorème plus faible, à savoir que le sous-espace des distributions positives d'énergie finie *portées par un ensemble compact fixe*, est *complet*. Ce résultat était valable pour tous les potentiels « d'ordre α » ($0 < \alpha < n$). J'ignore si l'actuel théorème 2 est valable pour les potentiels d'ordre α lorsque $\alpha > 2$.

et considérons

$$\int \mathrm{V}\, d\varepsilon_r = \lim \int \mathrm{U}^{\mu_n}\, d\varepsilon_r \leqq \lim \|\mu_n\| . \|\varepsilon_r\| \leqq \mathrm{M}\, \|\varepsilon_r\|;$$

comme $\|\varepsilon_r\|$ tend vers zéro quand r tend vers R, la moyenne

$$\int \mathrm{V}\, d\varepsilon_r$$

tend vers zéro quand r tend vers R. Ce qui achève la démonstration.

6. **Capacité.** — Sans vouloir développer ici ce sujet, sur lequel je me réserve de revenir dans un autre travail, donnons de rapides indications sur les résultats dont nous aurons besoin. Le lecteur pourra reconstituer sans peine le détail des démonstrations; ces résultats sont d'ailleurs pour la plupart connus.

K désignant un ensemble compact, il existe une distribution positive μ_K et une seule jouissant des propriétés suivantes : μ_K est portée par K, son potentiel est partout $\leqq 1$, et est égal à 1 *à peu près partout* sur K (c'est-à-dire : l'ensemble borélien des points de K où le potentiel est $\neq 1$ est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^+$). On montre l'*unicité* d'une telle distribution (si elle existe) en remarquant que, parmi les μ de $\mathcal{E}^+_K$ ($\mathcal{E}^+_K$ désigne l'ensemble des distributions positives d'énergie finie portées par K), elle minimise l'intégrale $\int (\mathrm{U}^\mu - 2)\, d\mu$; quant à l'*existence*, on prouve que l'intégrale $\int (\mathrm{U}^\mu - 2)\, d\mu$ atteint effectivement sa borne inférieure [grâce au fait que $\mathcal{E}^+_K$ est *complet* [19]], et que la distribution minimisante μ_K est caractérisée par les deux conditions :

$$\int (\mathrm{U}^{\mu_K} - 1)\, d\mu \geqq 0 \text{ pour toute } \mu \text{ de } \mathcal{E}^+_K;$$

$$\int (\mathrm{U}^{\mu_K} - 1)\, d\mu_K \leqq 0 \text{ (et donc } = 0\text{)}.$$

La première condition signifie que $\mathrm{U}^{\mu_K}(x) \geqq 1$ à p. p. p. sur K; la seconde que $\mathrm{U}^{\mu_K}(x) = 1$ sur un noyau de μ_K; alors (prop. 2, § 4) $\mathrm{U}^{\mu_K}(x) \leqq 1$ partout, et le théorème d'existence est ainsi démontré.

---

[19] J'ai indiqué cette méthode de démonstration dans l'article cité en [5].

Nous noterons $c(\mathrm{K})$ la *capacité* de l'ensemble compact K; c'est par définition la valeur commune de l'énergie $\|\mu_{\mathrm{K}}\|^2$ et de la masse $\int d\mu_{\mathrm{K}}$. La distribution μ_{K} s'appelle *distribution capacitaire* de K. La capacité $c(\mathrm{K})$ est aussi la borne supérieure de la masse et de l'énergie des distributions positives, portées par K, dont le potentiel est partout au plus égal à 1. Dire que $c(\mathrm{K}) = 0$, c'est dire que $\mu_{\mathrm{K}} = 0$, ce qui exprime que K est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^+$; il revient au même de dire que K est de mesure nulle pour toute distribution positive de potentiel borné.

On définit la *capacité intérieure* $c_i(\mathrm{A})$ d'un ensemble *quelconque* A (que A soit ou ne soit pas relativement compact), comme la borne supérieure des capacités des ensembles compacts contenus dans A. C'est aussi la borne supérieure des *mesures intérieures* de A pour les distributions positives de potentiel $\leqq 1$ partout. Il en résulte que, pour une famille finie ou dénombrable d'ensembles *boréliens* A_n, de réunion A, on a

$$c_i(\mathrm{A}) \leqq \sum_n c_i(\mathrm{A}_n). \tag{2}$$

La *capacité extérieure* $c_e(\mathrm{A})$ est, par définition, la borne inférieure des capacités intérieures des ensembles *ouverts* contenant A [20]. On a $c_i(\mathrm{A}) \leqq c_e(\mathrm{A})$; lorsque $c_e(\mathrm{A})$ et $c_i(\mathrm{A})$ sont égaux, leur valeur commune s'appelle la capacité (tout court) de A. C'est notamment le cas lorsque A est ouvert; on démontre que c'est aussi le cas si A est compact. De la relation (2), appliquée à des ensembles ouverts, on déduit

$$c_e(\mathrm{B}) \leqq \sum_n c_e(\mathrm{B}_n) \tag{3}$$

pour une famille finie ou dénombrable d'ensembles *quelconques* B_n, de réunion B.

Revenons sur la notion de « à peu près partout ». Nous avons dit qu'une propriété des points de l'espace a lieu à p. p. p. sur un

---

[20] On trouve déjà cette définition chez Brelot (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, t. 9, 1940, p. 319-337; *voir* p. 321).

compact K si l'ensemble (supposé borélien) des points de K où elle n'a pas lieu est de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}^+$. Il revient au même de dire que cet ensemble est de capacité *intérieure* nulle. D'une manière générale, nous dirons qu'une propriété a lieu à p. p. p. sur A (A étant un ensemble quelconque) si l'ensemble des points de A, où elle n'a pas lieu, est de capacité intérieure nulle.

Ceci nous conduit à une nouvelle notion : on dira qu'une propriété des points de l'espace a lieu *quasi-partout* sur A, si l'ensemble des points de A où elle n'a pas lieu est de capacité *extérieure* nulle.

Ainsi, l'ensemble des points d'un compact K où le potentiel capacitaire est < 1 est de capacité *extérieure* nulle, car cet ensemble est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles compacts $\left[\text{à savoir les ensembles } U^{\mu_K}(x) \leq 1 - \frac{1}{n}\right]$, dont chacun est de capacité nulle.

Remarque. — On ignore s'il existe des ensembles *boréliens* dont la capacité intérieure soit nulle et la capacité extérieure non nulle.

Avant d'en terminer avec la capacité, parlons brièvement des distributions capacitaires « intérieure » et « extérieure » que l'on peut définir pour un ensemble quelconque ([21]). Nous omettons le détail des démonstrations, qui seront publiées ailleurs.

Soit A un ensemble dont la capacité intérieure $c_i(A)$ soit *finie* (A peut n'être pas relativement compact). Si K désigne un ensemble compact variable contenu dans A, la distribution capa-

---

([21]) M. Brelot, dans un travail récent [*Journ. de Math.*, 1945, (*sous presse*)] envisage lui aussi les deux distributions capacitaires intérieure et extérieure. Il convient de remarquer que Brelot donne pour fondement à sa théorie le théorème de convergence qui sera précisément démontré au cours du présent travail (§ 8, théor. 4) : j'avais annoncé ce théorème dans une Note aux *Comptes rendus* (214, 1942, p. 944), et Brelot l'a admis sans attendre la publication de ma démonstration. Au contraire, la définition que je donne ici des distributions capacitaires intérieure et extérieure est indépendante du théorème de convergence. On notera aussi que la distribution capacitaire *intérieure* d'un ensemble borné a été également envisagée, d'une manière assez compliquée, par F. Vasilesco (*Bull. des Sciences Math.*, 2e série, t. 67, 1943, p. 49-68), qui, par contre, ne semble pas avoir eu l'idée de la distribution capacitaire extérieure.

citaire μ_K tend *fortement* vers une limite quand $c(K)$ tend vers $c_i(A)$. En effet, si K' et K'' désignent deux compacts contenus dans A, tels que $K' \subset K''$, on a

$$\|\mu_{K'} - \mu_{K''}\|^2 \leq c(K'') - c(K');$$

il suffit alors de se servir du fait que l'espace $\mathcal{E}$ est complet. La limite μ_A^i de μ_K [lorsque $c(K)$ tend vers $c_i(A)$] s'appelle la *distribution capacitaire intérieure* de A; elle n'est pas nécessairement portée par A; sa masse et son énergie sont égales à $c_i(A)$. Pour toute suite de compacts $K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ telle que

$$\lim c(K_n) = c_i(A),$$

la suite *croissante* des potentiels des distributions μ_K a pour limite le potentiel capacitaire intérieur $U^{\mu_A^i}$; il en résulte que ce dernier est égal à 1 en tout point intérieur à A. En particulier, si A est un ensemble *ouvert* de capacité finie ([22]), la distribution capacitaire intérieure de A a un potentiel égal à 1 en tout point de A.

On prouve, d'une manière analogue, l'existence d'une « distribution capacitaire extérieure » pour un ensemble A de capacité extérieure finie : c'est la limite forte des distributions capacitaires intérieures des ensembles *ouverts* B contenant A, lorsque $c_i(B)$ tend vers $c_e(A)$. Lorsque $c_i(A) = c_e(A) < +\infty$, les deux distributions capacitaires (intérieure et extérieure) de A sont identiques.

7. Infinis d'un potentiel. — Il est bien connu ([23]), par la loi de réciprocité, que l'ensemble des points où un potentiel (non identiquement infini) est infini, est de mesure nulle pour toute distribution de potentiel borné; autrement dit, c'est un ensemble de capacité *intérieure* nulle. Je me propose de montrer qu'il est même de capacité *extérieure* nulle.

THÉORÈME 3. — *Si μ désigne une distribution positive dont le potentiel n'est pas identiquement infini, l'ensemble des points x où $U^\mu(x)$ est infini est de capacité extérieure nulle.*

([22]) Dans le cas d'un ensemble *ouvert* borné, la distribution capacitaire a déjà été envisagée par de La Vallée Poussin (*Bull. Acad. Roy. Belgique*, nov. 1938, p. 672-689; *voir* § 4).

([23]) *Voir*, par exemple, p. 21 de l'ouvrage de La Vallée Poussin cité en ([7]).

Il suffit de montrer que, pour tout compact K, l'ensemble des points de K où U^μ est infini est de capacité extérieure nulle: or cet ensemble est le même que l'ensemble des points où U^ν est infini, ν désignant la restriction de μ à un voisinage compact de K. Il suffit donc de démontrer le théorème pour une distribution positive de masse totale finie. Or :

Lemme 4. — Si μ est une distribution positive de masse totale m, l'ensemble (ouvert) des points x où

$$U^\mu(x) > \alpha \qquad (\alpha \text{ nombre} > 0)$$

a une capacité au plus égale à $\frac{m}{\alpha}$.

En effet, pour tout compact K contenu dans cet ensemble, on a

$$\alpha c(K) = \alpha \int d\mu_K \leqq \int U^\mu \, d\mu_K = \int U^{\mu_K} \, d\mu \leqq \int d\mu = m.$$

Ce lemme étant établi, soit μ une distribution positive de masse totale m. L'ensemble des points x où $U^\mu(x) = +\infty$ est contenu dans l'ensemble *ouvert* où $U^\mu(x) > \alpha$, ensemble de capacité $\leqq \frac{m}{\alpha}$, donc arbitrairement petite. C. Q. F. D.

Théorème 3 *bis* (réciproque du théorème 3). — *Pour tout ensemble* A *de capacité extérieure nulle, il existe une distribution positive, d'énergie arbitrairement petite, dont le potentiel est infini en tout point de* A.

En effet, soit ε un nombre > 0 arbitraire. Il existe un ensemble ouvert B_n contenant A, dont la capacité est $\leqq 2^{-2n}\varepsilon$; sa distribution capacitaire μ_n a une énergie $\leqq 2^{-2n}\varepsilon$, et son potentiel est égal à 1 en tout point de B_n, et en particulier en tout point de A. La distribution $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ a une énergie $\leqq \varepsilon$, et son potentiel est infini en tout point de A. C. Q. F. D.

Appelons, avec Brelot, *ensemble polaire* tout ensemble A tel qu'il existe une distribution positive dont le potentiel soit infini en tout point de A sans être identiquement infini. Alors les théorèmes 3 et 3 *bis* fournissent une caractérisation des ensembles polaires :

Pour qu'un ensemble A *soit polaire, il faut et il suffit que sa capacité extérieure soit nulle.*

Signalons que ce résultat peut s'étendre à des cas plus généraux que celui du potentiel newtonien; par exemple au cas où la « fonction fondamentale » est $|x-y|^{\alpha-k}(0<\alpha<k)$, fonction qui donne naissance aux « potentiels d'ordre α » de M. Riesz et Frostman [3]. Les démonstrations précédentes doivent être alors légèrement retouchées dans le détail, mais subsistent dans leurs traits essentiels.

Remarque. — Le problème se pose de caractériser entièrement l'ensemble des infinis d'un potentiel, c'est-à-dire de trouver un système de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble A soit l'ensemble de *tous* les points où un potentiel convenable (non identiquement infini) est infini.

8. Familles décroissantes de potentiels. — Contrairement à ce qui a lieu pour les suites *croissantes* (ou plus généralement les ensembles filtrants *croissants*) de potentiels de distributions positives, la borne inférieure d'une suite *décroissante* de potentiels n'est pas, en général, le potentiel d'une distribution positive : par exemple, si un ensemble A est intersection d'une suite décroissante d'ensembles ouverts B_n dont la capacité tend vers 0, la suite des potentiels capacitaires des ensembles B_n est une suite décroissante dont la borne inférieure est *nulle quasi-partout* (comme cela va résulter du lemme 5 qui suit), mais est égale à 1 en tout point de A; une telle fonction n'est pas le potentiel d'une distribution positive.

M. Brelot [24] a démontré que la borne inférieure d'une *suite* décroissante de potentiels U^{μ_n} est *à peu près partout* égale à un potentiel U^{μ}. Sans avoir recours à ce résultat, nous allons démontrer directement ici que l'ensemble exceptionnel [celui des

[24] Note citée en [1]. Brelot étudie, en fait, les fonctions sousharmoniques plutôt que les potentiels (il s'agit alors de suites croissantes de fonctions sousharmoniques). Le cas des fonctions surharmoniques (dont l'étude est bien entendu équivalente à celle des fonctions sousharmoniques) sera traité ici (§ 9, théorème 6).

points où $U^{\mu}(x)$ n'est pas égal à la borne inférieure des $U^{\mu_n}(x)$] est non seulement de capacité intérieure nulle, mais de capacité *extérieure* nulle (résultat qui m'avait été signalé par Brelot comme probable, sans qu'il ait pu le démontrer). En outre, le théorème sera étendu au cas plus général d'un ensemble *filtrant décroissant* de potentiels.

Auparavant, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire :

Lemme 5. — μ et ν désignant deux distributions positives d'énergie finie, l'ensemble des points où l'on a

$$U^{\mu}(x) > U^{\nu}(x) + \alpha \qquad (\alpha \text{ nombre} > 0)$$

a une *capacité extérieure* au plus égale à $\frac{1}{\alpha^2}\|\mu - \nu\|^2$.

Montrons d'abord que la capacité *intérieure* de cet ensemble A est $\leqq \frac{1}{\alpha^2}\|\mu - \nu\|^2$, c'est-à-dire que l'on a

$$c(K) \leqq \frac{1}{\alpha^2}\|\mu - \nu\|^2$$

pour tout ensemble compact K en tout point duquel

$$U^{\mu}(x) > U^{\nu}(x) + \alpha.$$

Désignons par λ la distribution capacitaire de K; alors

$$\alpha . c(K) = \alpha \int d\lambda \leqq \int (U^{\mu} - U^{\nu})\, d\lambda \leqq \|\mu - \nu\| . \|\lambda\| = \|\mu - \nu\| . \sqrt{c(K)}.$$

En comparant les membres extrêmes, on obtient le résultat annoncé.

Reste maintenant à majorer la capacité *extérieure* de A. Or, d'après la proposition 4 (§ 5), il existe une distribution positive ν' dont le potentiel est *continu* et partout $\leqq U^{\nu}$, et une telle distribution ν' peut être choisie de manière que $\|\nu - \nu'\|$ soit arbitrairement petit. L'ensemble des points où $U^{\mu}(x) > U^{\nu'}(x) + \alpha$ est *ouvert* et contient A; sa capacité est au plus égale à $\frac{1}{\alpha^2}\|\mu - \nu'\|^2$, d'après ce qui précède. Donc la capacité extérieure de A est au plus égale à $\frac{1}{\alpha^2}\|\mu - \nu'\|^2$; et comme $\|\mu - \nu'\|$ peut être arbitrairement voisin de $\|\mu - \nu\|$, le lemme est démontré.

Faisons tout de suite une application :

PROPOSITION 5. — *Pour toute distribution positive* μ *de potentiel* U^{μ} *non identiquement infini, on peut retrancher de l'espace un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite, de manière que, prise sur l'ensemble fermé restant, la fonction* U^{μ} *soit continue.*

Supposons d'abord μ d'énergie finie. $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une distribution positive μ_n d'énergie finie, de potentiel continu $\leqq U^{\mu}$, et telle que l'ensemble (ouvert) B_n des points où $U^{\mu}(x) - U^{\mu_n}(x) > \frac{1}{2^n}$ soit de capacité $\leqq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Hors la réunion B des B_n, dont la capacité est au plus égale à ε, la fonction $U^{\mu}(x)$ est *limite uniforme* de la suite des fonctions continues $U^{\mu_n}(x)$, et par suite U^{μ}, considérée comme fonction sur l'ensemble fermé complémentaire de B, est *continue.*

Reste à examiner le cas général. Il suffit d'examiner le cas où μ est portée par un ensemble compact. Or, d'après le lemme 4 (§ 7), il existe un entier p tel que le potentiel $U^{\nu} = \inf(U^{\mu}, p)$ soit égal à U^{μ} en dehors d'un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite; et comme ν est d'énergie finie, on peut lui appliquer le résultat déjà obtenu. Ceci achève de démontrer la proposition 5.

Abordons maintenant l'étude des familles décroissantes de potentiels.

THÉORÈME 4. — *Soit une suite décroissante* (ou plus généralement un *ensemble filtrant décroissant*) de potentiels U^{μ_n} (μ_n distributions positives de potentiels non identiquement infinis). *Il existe une distribution positive* μ *et une seule dont le potentiel est partout au plus égal à la borne inférieure* $V(x)$ *des* $U^{\mu_n}(x)$, *et quasi-partout égal à* $V(x)$. *Le potentiel* U^{μ} *est la fonction « régularisée semi-continue inférieurement » de la fonction* V. *La distribution* μ *est limite forte des* μ_n *lorsque celles-ci sont d'énergie finie, limite vague des* μ_n *dans le cas général.*

Montrons d'abord l'*unicité* de μ, si elle existe : si un potentiel (ou plus généralement une fonction surharmonique) est partout au plus égal à une fonction $V(x)$, et *quasi-partout* (ou même seulement *presque-partout* au sens de Lebesgue, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure spatiale lebesguienne nulle) *égal* à $V(x)$, il est identique à la fonction $W(x)$ « régularisée semi-continue inférieurement » ([25]) de V, c'est-à-dire

$$W(x) = \liminf_{y \to x} V(y).$$

En effet, soit $U^{\mu}(x)$ un tel potentiel; on a

$$U^{\mu}(x) = \liminf_{y \to x} U^{\mu}(y) \leqq W(x),$$

et $W(x)$ est lui-même au plus égal à la limite des moyennes spatiales de V (ou, ce qui revient au même, de U^{μ}) dans des boules de centre x dont le rayon tend vers zéro; or cette limite est précisément $U^{\mu}(x)$, d'où finalement

$$U^{\mu}(x) \leqq W(x) \leqq U^{\mu}(x),$$

ce qui établit l'égalité annoncée.

Reste à montrer l'*existence* d'une distribution μ jouissant des propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème. Supposons d'abord que les μ_n soient d'*énergie finie*. Alors elles forment une suite de Cauchy [ou un filtre de Cauchy ([16]) si les U^{μ_n} forment un ensemble filtrant décroissant général], donc (§ 5, théor. 2) convergent fortement vers une distribution positive μ, d'énergie finie. En particulier, μ est limite vague des μ_n, donc, en tout point x,

$$U^{\mu}(x) \leqq \liminf U^{\mu_n}(x),$$

ce qui donne $U^{\mu}(x) \leqq V(x)$, $V(x)$ désignant, comme plus haut, la borne inférieure des $U^{\mu_n}(x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points où $V(x) > U^{\mu}(x) + \varepsilon$ est contenu dans l'ensemble des points où $U^{\mu_n}(x) > U^{\mu}(x) + \varepsilon$, ensemble dont la capacité extérieure tend vers o avec $\|\mu_n - \mu\|$, d'après le lemme 5; l'ensemble des points où $V(x) > U^{\mu}(x) + \varepsilon$ est donc de capacité extérieure nulle. L'ensemble des points où $V(x) > U^{\mu}(x)$ apparaît alors comme réunion dénombrable d'ensembles de capacité extérieure nulle : c'est un ensemble de capacité extérieure nulle. Et ceci

---

([25]) *Cf.* P. Lelong, *Ann. Éc. Norm sup.*, 58, 1941, p. 83-177; *voir* p. 97.

démontre entièrement le théorème 4 dans le cas où l'énergie des μ_n est finie.

Nous allons ramener le cas général à ce cas-là : soit α une distribution positive fixe d'énergie finie; posons, pour chaque entier p,

$$\inf(U^{\mu_n}, pU^{\alpha}) = U^{\nu_{n,p}}.$$

p restant fixe, les $\nu_{n,p}$ ont pour limite forte une ν_p, telle que U^{ν_p} soit partout au plus égal et quasi-partout égal à

$$\inf(V, pU^{\alpha}) = \inf_n U^{\nu_{n,p}}.$$

Lorsque p varie, les U^{ν_p} forment une suite croissante de potentiels majorés par V, donc (§ 3, théor. 1) ont pour limite un potentiel $U^{\mu} \leq V$. Enfin, hors d'un ensemble de capacité extérieure nulle, U^{μ} est égal à la limite de la suite des $\inf(V, pU^{\alpha})$, limite qui est précisément V. La démonstration du théorème 4 est ainsi achevée, à cela près qu'il reste à vérifier que la distribution μ que nous venons d'obtenir est bien *limite vague* des μ_n.

Pour l'établir, il suffit (*Cf.* lemme 3, § 2) de montrer que, pour toute distribution λ de la forme $\varepsilon_{a,r}$, on a

$$\int U^{\mu} d\lambda = \lim_n \int U^{\mu_n} d\lambda. \tag{4}$$

C'est évident si les U^{μ_n} forment une *suite* décroissante, car alors le théorème de Lebesgue sur l'intégrale de la limite d'une suite décroissante est applicable; mais pour le cas général d'un ensemble filtrant décroissant de U^{μ_n}, le résultat n'est plus évident, et nécessite une démonstration spéciale, que voici.

Nous allons montrer que la relation (4) vaut pour toute distribution positive λ telle que tout potentiel (non identiquement infini) soit sommable par rapport à λ (en particulier, l'énergie de λ est finie). Désignons par U^{β} un potentiel fixe supérieur aux U^{μ_n}; étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que

$$\int [U^{\beta} - \inf(U^{\beta}, pU^{\alpha})]\, d\lambda \leq \varepsilon$$

(cela tient à ce que $\int U^{\beta} d\lambda$ est *fini*). En conservant les notations ci-dessus, $\inf(U^{\mu}, pU^{\alpha})$ n'est autre que U^{ν_p}, puisque tous deux sont quasi-partout égaux à $\inf(V, pU^{\alpha})$. Écrivons désormais μ'_n

au lieu de $\nu_{n,p}$, et μ' au lieu de ν_p. Puisque μ' est limite forte de μ'_n, et que λ est d'énergie finie, on a

$$\int U^{\mu'} d\lambda = \lim_n \int U^{\mu'_n} d\lambda ;$$

or

$$U^{\mu_n} - U^{\mu'_n} \leqq U^{\beta} - \inf(U^{\beta}, p U^{\alpha}),$$

donc

$$\int (U^{\mu_n} - U^{\mu'_n})\, d\lambda \leqq \varepsilon,$$

et

$$\lim_n \int U^{\mu_n} d\lambda \leqq \lim_n \int U^{\mu'_n} d\lambda + \varepsilon = \int U^{\mu'} d\lambda + \varepsilon \leqq \int U^{\mu} d\lambda + \varepsilon ;$$

comme ε a pu être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_n \int U^{\mu_n} d\lambda \leqq \int U^{\mu} d\lambda.$$

L'inégalité inverse est évidente, puisque $U^{\mu_n} \geqq U^{\mu}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Une autre démonstration de l'inégalité (4) résulterait du fait suivant : dans l'ensemble filtrant décroissant des U^{μ_n}, on peut trouver une *suite* décroissante dont la limite est quasi-partout la borne inférieure des U^{μ_n}.

Corollaire du Théorème 4. — *Étant donné une famille quelconque de distributions positives, la borne inférieure de leurs potentiels est quasi-partout égale au potentiel d'une distribution positive, et partout au moins égale à ce potentiel.*

En effet, les bornes inférieures d'un nombre fini quelconque de potentiels de la famille forment un ensemble filtrant décroissant de potentiels, auquel on applique le théorème 4.

9. Limite inférieure d'une suite de potentiels. — Voici une conséquence du théorème 4 :

Théorème 5. — *Étant donnée une suite* [26] *quelconque de potentiels* U^{μ_n} (non nécessairement décroissante), *il existe une*

---

[26] Le fait qu'il s'agit d'une *suite dénombrable* est essentiel, contrairement à ce qui avait lieu pour le théorème 4.

fonction surharmonique φ *telle que l'on ait*

$$\varphi(x) = \liminf_{n \to \infty} U^{\mu_n}(x) \quad \text{quasi-partout},$$

$$\varphi(x) \leqq \liminf_{n \to \infty} U^{\mu_n}(x) \quad \text{partout}.$$

En effet, $\liminf_{n \to \infty} U^{\mu_n}$ est limite de la suite croissante des fonctions $V_p(x) = \inf_{n \geqq p} U^{\mu_n}(x)$. D'après le corollaire du théorème 4, il existe une distribution positive ν_p telle que

$$U^{\nu_p}(x) = V_p(x) \quad \text{quasi-partout},$$

$$U^{\nu_p}(x) \leqq V_p(x) \quad \text{partout}.$$

Les U^{ν_p} forment une suite croissante; leur borne supérieure φ est *surharmonique*, quasi-partout égale à $\lim V_p(x)$, et partout $\leqq \lim V_p(x)$. C. Q. F. D.

Complément : pour que φ soit un *potentiel* de distribution positive, il *suffit* que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit vérifiée :

1° les U^{μ_n} sont majorés par un potentiel fixe (non identiquement infini);

2° les distributions μ_n sont de *masse totale finie*, *uniformément bornée*.

Pour 1°, c'est évident, car alors les U^{ν_p} sont majorés par un potentiel fixe. Pour 2°, nous allons montrer que le critère de la proposition 1 (§ 3) est alors rempli : on a

$$\int U^{\nu_p} d\varepsilon_r \leqq \int U^{\mu_p} d\varepsilon_r = \int U^{\varepsilon_r} d\mu_p \leqq m.M_r,$$

M_r désignant le maximum de U^{ε_r}, et m une borne supérieure de la masse totale de μ_p (valable quel que soit p). Ceci ayant lieu pour tout p, on a, à la limite,

$$\int \varphi \, d\varepsilon_r \leqq m.M_r,$$

et comme M_r tend vers o quand r tend vers R, le critère de la proposition 1 est bien vérifié.

Voici un complément intéressant au théorème 5 :

Théorème 6 [27]. — *Soit une suite de distributions positives* μ_n *de masse totale uniformément bornée; si cette suite converge vaguement vers une distribution* μ, *on a*

$$U^{\mu}(x) = \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) \quad \text{quasi-partout,}$$

$$U^{\mu}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x) \quad \text{partout.}$$

(Autrement dit, la fonction φ du théorème 5 n'est autre que le potentiel de la distribution limite μ.)

Posons $V(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x)$; il est bien connu que

$$U^{\mu}(x) \leq V(x)$$

partout. Reste à montrer que U^{μ} est identique à la « régularisée semi-continue inférieurement » de V (qui est précisément la fonction φ du théorème 5); pour cela, il suffit de montrer que U^{μ} et V sont égaux *presque-partout* (au sens de Lebesgue).

Or soit g une fonction continue positive telle que $g(x)$ tende vers zéro quand $|x|$ tend vers R. On voit facilement que

$$\int g(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int g(x)\, d\mu_n(x).$$

Appliquons ceci au cas où g est le potentiel d'une distribution $\varepsilon_{a,r}$; il vient

$$\int U^{\mu} d\varepsilon_{a,r} = \lim_{n\to\infty} \int U^{\mu_n} d\varepsilon_{a,r} \geq \int V\, d\varepsilon_{a,r}.$$

Ceci prouve que la fonction positive $V - U^{\mu}$ a pour moyenne o sur toute sphère dont l'intérieur appartient à l'espace de base E. Il en résulte bien qu'elle est presque-partout nulle.

---

[27] Ce théorème a déjà été donné par Brelot [lemme III de la Note citée en [1]], mais avec la restriction (en fait inutile) que les ensembles de capacité nulle soient de mesure nulle pour μ; en outre, l'ensemble des points où

$$U^{\mu}(x) < \liminf U^{\mu_n}(x),$$

dont nous démontrons qu'il est de capacité *extérieure* nulle, était seulement donné, par Brelot, comme un ensemble de capacité intérieure nulle.

10. Familles de fonctions surharmoniques. — Les résultats du paragraphe précédent conduisent à des propriétés des familles de *fonctions surharmoniques dans un ensemble ouvert quelconque*.

Théorème 7. — *Soit une famille quelconque de fonctions surharmoniques positives dans un ensemble ouvert* A. *Si* φ *désigne la borne inférieure de cette famille, il existe dans* A *une fonction surharmonique et une seule qui soit quasi-partout égale à* φ *et partout au plus égale à* φ. (Cette fonction surharmonique est évidemment la fonction « régularisée semi-continue inférieurement » de φ.)

Avant de démontrer ce théorème, faisons une remarque : il s'étend au cas d'une famille de fonctions surharmoniques minorées par une constante (finie) fixe. Plus généralement, sa conclusion reste valable si l'on suppose seulement que, sur tout compact K contenu dans A, les fonctions de la famille sont minorées par une constante finie (valable pour toutes les fonctions de la famille, mais pouvant dépendre de K).

Pour établir le théorème 7, il suffira, étant donné le caractère *local* de la surharmonicité, de démontrer ceci : soient une boule ouverte B et une boule fermée C contenue dans B; si l'on a une famille Φ de fonctions surharmoniques positives dans B, il existe, à l'intérieur de C, une fonction surharmonique qui est quasi-partout égale et partout au plus égale à la borne inférieure de la famille Φ.

Pour cela, il suffira de prouver :

Lemme 6. — Pour toute fonction g surharmonique positive dans la boule ouverte B (et non identiquement infinie) existe une distribution positive portée par la boule fermée C, telle que son potentiel (la « fonction fondamentale » étant la fonction de Green de B) soit égal à $g(x)$ en tout point de C.

Admettons en effet ce lemme pour un instant. En appliquant le théorème 4 (§ 9) à la boule ouverte B prise comme espace de base, la fonction fondamentale étant la fonction de Green de B, on obtiendra aussitôt le théorème 7.

Tout revient donc à démontrer le lemme 6. Voici la démonstration qu'en donne M. Brelot (lettre du 19 octobre 1943); elle utilise la solution du problème de Dirichlet pour l'ensemble ouvert borné B — C, la donnée sur la frontière étant o sur la frontière de B, et, sur la frontière de C, la trace sur cette frontière de la fonction surharmonique g de l'énoncé du lemme. La fonction h_g, solution du problème de Dirichlet, a, en chaque point frontière x de C, une limite inférieure au moins égale à $g(x)$. Il en résulte que la fonction égale à g sur C, et à h_g sur B — C, est, dans toute la boule ouverte B, au plus égale à g et *surharmonique*. D'après le critère du paragraphe **3** (prop. 1), cette fonction surharmonique est le potentiel d'une distribution positive, évidemment portée par C puisque la fonction est harmonique hors C. D'où le lemme.

Remarque. — Si deux distributions positives μ_1 et μ_2 portées par une boule fermée C (ou, plus généralement, par un ensemble fermé sans point « irrégulier ») sont telles que $U^{\mu_1}(x) \leqq U^{\mu_2}(x)$ en tout point de C, l'inégalité a lieu en tout point de l'espace de base ([28]). La correspondance du lemme 6, qui à chaque fonction surharmonique positive dans B associe le potentiel d'une distribution portée par C, est donc *croissante*.

(Manuscrit reçu le 24 mai 1945).

([28]) Ce fait est une conséquence de la théorie moderne du « balayage », sur laquelle je me propose de revenir dans un autre travail.