BULLETIN DE LA S. M. F.

CHI-TAI CHUANG

Sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 11-40
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__11_0>

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ;

PAR M. CHI-TAI CHUANG.

Pour étudier un problème proposé par M. Montel ([1]), nous avons établi dans un travail précédent ([2]), un théorème général sur le comportement d'une fonction holomorphe dans le cercle unité. La méthode employée pour établir ce théorème était celle utilisée par M. Bloch ([3]) et par M. Valiron ([4]). Dans le présent Mémoire dont la plus grande partie a été résumée dans deux Notes aux *Comptes rendus* ([5]), nous nous proposons d'établir un théorème analogue (théorème I), par une méthode donnée récemment par M. Macintyre ([6]). Nous appliquons ensuite ce théorème à améliorer certains résultats obtenus dans le travail précédent.

Je remercie M. Valiron qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail et qui m'a aidé de ses critiques.

I. — Démonstration d'un théorème général sur le comportement d'une fonction holomorphe dans le cercle unité.

1. Nous allons établir d'abord le lemme suivant, qui joue dans la suite, un rôle fondamental :

LEMME. — *Soient* $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$ *des nombres donnés, et* $g(x)$ *une fonction réelle donnée vérifiant les conditions suivantes :* 1° $g(x)$ *est définie pour* $x \geqq 0$; 2° $g(x)$ *est continue et croît*

([1]) *Enseignement math.*, t. 33, 1934, p. 11.

([2]) *Thèse* présentée à la Faculté des Sciences de Paris, Chap. I (*Rendiconti circolo mat. Palermo*, t. 62, 1938).

([3]) *Annales Fac. Sc. Toulouse*, 3ᵉ série, t. 17, 1925, p. 1-22.

([4]) *Mathematica*, t. 4, 1930, p. 81-108; *Actualités Scientifiques et Industrielles*, n° 570, 1937, Chap. III.

([5]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 76 et 160.

([6]) *Math. Zeit.*, t. 44, Heft 4, 1938, p. 536-540.

indéfiniment pour $x > X(g)$. Soit $g^{-1}(y)$ la fonction inverse de $g(x)$, restreinte à $x > X(g)$. Supposons que la condition

$$(1) \qquad \frac{1}{15\alpha} g(n) \log \frac{1}{\lambda} > \log n \qquad (n \text{ entier})$$

soit vérifiée pour $n > n(\alpha, \lambda, g)$. Dans ces conditions, il existe des nombres $a = a(\alpha, \lambda, g)$, $b = b(\alpha, \lambda, g)$, $c = c(\alpha, \lambda, g)$ jouissant des propriétés suivantes : Si $\mu(t)$ est une fonction convexe et croissante pour $t < 0$, si sa dérivée à droite $\mu'_+(t) \geqq 1$ pour $t < 0$, et s'il existe un entier $n = n(\mu, g)$ tel que

$$(2) \qquad \mu(t) > nt + g(n) \qquad \text{pour} \quad t < 0,$$

on peut trouver trois points $t_1 < t_2 < t_3$ dans l'intervalle

$$(3) \qquad -\gamma < t < 0, \qquad \gamma = \frac{\alpha}{1-\lambda} + \frac{2}{\alpha} + 2\alpha,$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$(4) \quad \mu(t_2) - \mu(t_1) = \mu(t_3) - \mu(t_2) = \alpha, \qquad \lambda(t_2 - t_1) \leqq t_3 - t_2 \leqq t_2 - t_1,$$

et

$$(5) \qquad \mu(t_2) > a, \qquad \mu'_+(t_2) < [b + \mu(t_2)]^2 g^{-1}\left[c + \frac{5}{3}\mu(t_2)\right].$$

2. Considérons une fonction $\mu(t)$ vérifiant les conditions énoncées dans le lemme. Evidemment on a

$$\lim_{t \to 0} \mu(t) \geqq g(n), \qquad \lim_{t \to -\infty} \mu(t) = -\infty.$$

Donc d'après la propriété 2° de la fonction $g(x)$, en supposant que $n > m(g)$ (7), la courbe $\mu = \mu(t)$ coupe l'axe des t négatifs en un point $[-\gamma'(\mu), 0]$. Distinguons deux cas :

Cas où $-\gamma'(\mu) \leqq -\gamma$, γ étant donné dans le lemme. Considérons la suite des points t_i de l'intervalle $-\gamma < t < 0$, définis par les équations suivantes :

$$\mu(t_i) = \mu(-\gamma) + i\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Pour fixer les idées, supposons que la fonction $\mu(t)$ soit bornée

(7) Nous désignerons dans cette démonstration, l'entier $n(\mu, g)$ par n.

supérieurement, et désignons par $t_p (p \geqq 3)$ le dernier point de la suite t_i. Comme $\mu(t)$ est convexe et $\mu'_+(t) \geqq 1$, on a

$$(6) \qquad t_{i+1} - t_i \leqq t_i - t_{i-1}, \qquad t_i - t_{i-1} \leqq \alpha \qquad (t_0 = -\gamma,\ t_{p+1} = 0).$$

Montrons que, pour l'un au moins des points $t_j (i < j < p)$, l'on a à la fois les inégalités

$$(7) \qquad t_{j+1} - t_j \geqq \lambda(t_j - t_{j-1}), \qquad t_{j+1} - t_j \geqq \frac{\alpha}{\mu(t_j)^2},$$

λ et α étant donnés dans le lemme. Pour le voir, procédons avec M. Macintyre (*loc. cit.*) de la manière suivante : Supposons qu'un tel point n'existe pas. Eu égard à (6), on voit successivement que parmi les intervalles (t_j, t_{j+1}), l'étendue totale des intervalles qui vérifient la condition $t_{j+1} - t_j < \lambda(t_j - t_{j-1})$, est inférieure à $\frac{\alpha\lambda}{1-\lambda}$; tandis que l'étendue totale des autres intervalles, qui par hypothèse vérifient nécessairement la condition

$$t_{j+1} - t_j < \frac{\alpha}{\mu(t_j)^2},$$

est inférieure à $\frac{1}{\alpha}$. Par suite, eu égard à (6), on aurait

$$\gamma < 3\alpha + \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} + \frac{1}{\alpha},$$

contrairement à la définition de γ.

Supposons que la fonction $\mu(t)$ soit non bornée supérieurement. On voit de la même manière qu'il existe un point $t_j (j > 1)$ vérifiant les conditions (7). Pour cela, il suffit d'ailleurs de considérer un point t_p, p assez grand pour que $-t_p < \alpha$, et d'appliquer le raisonnement ci-dessus aux points $t_j (1 < j < p)$.

Cas où $-\gamma'(\mu) > -\gamma$. Posons

$$(8) \qquad s = \text{partie entière de } \frac{3g(n)}{4\alpha}.$$

En supposant que $n > m(\alpha, g)$, on a $s > 2$ et $g(n) - s\alpha > 2\alpha$. Soit $-\omega$ la valeur comprise entre $-\gamma'(\mu)$ et 0, telle que

$$\mu(-\omega) = s\alpha.$$

D'après (2), on a

$$(9) \qquad \omega > \frac{g(n) - s\alpha}{n} \geqq \frac{g(n)}{4n}.$$

1° Supposons que $\mu'_+(-\omega) < n$. Considérons la suite des points t_i dans l'intervalle $-\gamma'(\mu) < t < -\omega$, définis par les équations suivantes :

$$\mu(t_i) = i\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Nous allons montrer que si n dépasse un certain rang ne dépendant que de α, λ, $g(x)$, il existe un point t_i vérifiant la condition

$$(10) \qquad t_{i+1} - t_i \geqq \lambda(t_i - t_{i-1}),$$

avec

$$(11) \qquad i \geqq q = \text{partie entière de } \frac{8s}{9}.$$

En effet, si un tel point n'existe pas, on aura

$$t_{q+1} - t_q < \lambda\alpha, \qquad \ldots, \qquad t_s - t_{s-1} < \lambda^{s-q}\alpha \qquad (t_s = -\omega),$$

donc, d'après 1°,

$$(12) \qquad (s-q)\log\frac{1}{\lambda} < \log n.$$

Mais on constate aisément que $(s-q)\alpha > \frac{g(n)}{15}$, si $g(n) > 10\alpha$; par suite (11) nous donne une inégalité incompatible avec la condition (1) du lemme, si $n > n(\alpha, \lambda, g)$.

Soit donc t_i un tel point. On a

$$(13) \qquad \mu'_+(t_i) < n, \qquad \mu(t_i) \geqq q\alpha.$$

Si $q > 17$, on a

$$(14) \qquad g(n) < \frac{5}{3}q\alpha.$$

(13) et (14) nous donnent

$$(15) \qquad \mu'_+(t_1) < g^{-1}\left[\frac{5}{3}\mu(t_i)\right],$$

en supposant que $n > \mathrm{X}(g)$, $\mathrm{X}(g)$ étant donné dans le lemme.

Donc si $n > m_1(\alpha, \lambda, g)$, il existe un point t_i vérifiant les conditions (10), (11) et (15).

2° Supposons que $\mu'_+(-\omega) \geqq n$. Considérons la suite des points t_i de l'intervalle $-\omega < t < 0$, définis par les équations suivantes :

$$\mu(t_i) = (s+i)\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D'après 2°, on a

$$(16)\qquad t_i - t_{i-1} \leqq \frac{\alpha}{n} \qquad (t_0 = -\omega).$$

(16), (8) et (9) permettent de voir comme dans le cas considéré au début, que si $n > m_2(\alpha, \lambda, g)$, il existe un point t_i (t_i est inférieur au dernier nombre de la suite t_i, si cette suite est finie) vérifiant à la fois les conditions

$$(17)\qquad t_{i+1} - t_i \geqq \lambda(t_i - t_{i-1}), \qquad t_{i+1} - t_i \geqq \frac{\alpha}{\mu(t_i)^2 g^{-1}\left[\frac{4}{3}\mu(t_i)\right]}.$$

Pour cela on constate qu'il suffit qu'on ait $n > X(g)$ et

$$\frac{g(n)}{4} > \alpha + \frac{\alpha}{1-\lambda} + \frac{2}{\alpha}.$$

Désignons par $m(\alpha, \lambda, g)$ le plus grand des nombres $m(g)$, $m(\alpha, g)$, $m_1(\alpha, \lambda, g)$ et $m_2(\alpha, \lambda, g)$ considérés dans ce qui précède, et soit $L = L(g) \geqq 0$, un nombre vérifiant la condition

$$g^{-1}(L) \geqq 1.$$

En considérant (7), (10), (15) et (17) on a le résultat suivant : Supposons que $n > m(\alpha, \lambda, g)$. On peut trouver dans l'intervalle (3), trois points $t_1 < t_2 < t_3$ vérifiant les conditions (4) et

$$(18)\qquad \mu(t_2) \geqq 2\alpha, \qquad \mu'_+(t_2) < [1 + \mu(t_2)]^2 g^{-1}\left[L + \frac{5}{3}\mu(t_2)\right].$$

3. Supposons que $n \leqq m(\alpha, \lambda, \gamma)$. D'après (2), on a, dans l'intervalle $-\gamma \leqq t < 0$,

$$\mu(t) > -\gamma m(\alpha, \lambda, g) + h(g) = \Lambda(\alpha, \lambda, g),$$

où $h(g)$ désigne le minimum des nombres $g(\nu)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, \infty$). Par la méthode utilisée pour le cas considéré au début, on voit que l'on peut trouver dans l'intervalle (3), trois points $t_1, < t_2 < t_3$ vérifiant les conditions (4) et

$$(19)\quad \mu(t_2) > \Lambda(\alpha, \lambda, g) + 2\alpha, \qquad \mu'_+(t_2) \leqq [-\Lambda(\alpha, \lambda, g) + \mu(t_2)]^2.$$

Soient $a(\alpha, \lambda, g)$ le plus petit des nombres α et $\Lambda(\alpha, \lambda, g) + 2\alpha$, $b(\alpha, \lambda, g)$ le plus grand des nombres 1 et $-\Lambda(\alpha, \lambda, g)$, et

$c(\alpha, \lambda, g)$ le plus grand des nombres $L(g)$ et $L(g) - \frac{5}{3}\Lambda(\alpha, \lambda, g)$. D'après (18) et (19), les nombres a, b, c jouissent des propriétés énoncées dans le lemme. Ce lemme est établi.

4. Établissons maintenant le théorème suivant :

Théorème I. — *Soient $k \geqq 1$ un entier donné et $g(x)$ une fonction réelle donnée vérifiant les conditions* 1° *et* 2° *du lemme, et les conditions suivantes :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{n} = 0, \qquad \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{g(n)}{\log n} > ak^4 \qquad (n \textit{ entier}),$$

a étant une constante positive numérique. Soit $g^{-1}(y)$ la fonction inverse de $g(x)$, restreinte à $x > X(g)$. Il existe des nombres positifs $\lambda(k, g)$, $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\beta'(k)$, $\beta_p(k)$ jouissant des propriétés suivantes. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{20}$$

est une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, qui n'est pas majorée par

$$\lambda(k, g)\left[S + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right] \sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n,$$

où S *est un nombre positif arbitrairement donné, on peut trouver, dans la couronne $\alpha(k) < |z| < 1$, un cercle*

$$|z| = r \qquad [r = r(k, g, f, S)],$$

vérifiant la condition $M(r, f) > S$, et k domaines

$$D_i \qquad [D_i = D_i(r, f, \omega),\ i = 1, 2, \ldots, k],$$

traversés par le cercle $|z| = r$, dans lesquels $f(z)$ se comporte comme suit :

1° *$f(z)$ est univalente dans D_i et représente ce domaine sur la couronne fendue*

$$\frac{1}{2} M(r, f) < |Z| < 2M(r, f), \qquad |\arg Z - \omega| < \pi \qquad (\omega, \text{arbitraire}).$$

2° *Si* $1 \leqq n \leqq k$, *dans* D_i, *l'argument de* $f^{(n)}(z)$ *varie de moins de* 3π, *et l'on a*

$$\frac{1}{3} < \left|\frac{f^{(n)}(z)}{H_n f(z)}\right| < 3, \qquad \beta'(k) < H_n^{\frac{1}{n}} < \beta(k)\left[\log\frac{M(r,f)}{S}\right]^2 g^{-1}\left[2\log\frac{M(r,f)}{S}\right],$$

H_n *étant un nombre dépendant de* r, $f(z)$, k, *et* n.

3° *Si* $1 \leqq n \leqq p$, *on a dans* D_i

$$|f^{(n)}(z)| < \beta_p(k) M(r,f)\left[\log\frac{M(r,f)}{S}\right]^{2p} g^{-1}\left[2\log\frac{M(r,f)}{S}\right]^p.$$

5. Nous allons distinguer plusieurs cas :

Premier cas. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par (20). Supposons que les k premiers coefficients dans (20) s'annulent :

$$c_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots, k-1), \tag{21}$$

et supposons que la fonction $f(z)$ n'est pas majorée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n, \tag{22}$$

où $k \geqq 1$, et où $g(x)$ est une fonction réelle vérifiant les conditions 1° et 2° du lemme, et les conditions suivantes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{n} = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{\log n} > \frac{15\alpha}{\log\frac{1}{\lambda}}, \tag{23}$$

$\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$ étant des nombres dont nous choisirons les valeurs. La condition (1) du lemme est donc vérifiée. Soient $a(\alpha, \lambda, g)$, $b(\alpha, \lambda, g)$ et $c(\alpha, \lambda, g)$ les nombres fournis par ce lemme.

Soit $M(r)$ le module maximum de la fonction $f(z)$, sur le cercle $|z| = r$, et posons

$$m(t) = \log M(e^t). \tag{24}$$

D'après un théorème classique de M. Hadamard ([8]), $m(t)$ est une

([8]) *Bull. Soc. math.*, t. 24, 1896, p. 186-187.

fonction convexe et croissante de t pour $t < 0$. Eu égard à (21), on a

$$m'_+(t) \geqq m'_-(t) \geqq k, \tag{25}$$

où $m'_+(t)$ et $m'_-(t)$ désignent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $m(t)$. D'autre part, la fonction $f(z)$ étant supposée non majorée par la série (22), il existe un entier n tel que $|c_n| > e^{g(n)}$ et, d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$m(t) > nt + g(n) \qquad \text{pour} \quad t < 0. \tag{26}$$

Donc, d'après le lemme, on peut trouver trois points $t_1 < t_2 < t_3$ dans l'intervalle (3), vérifiant les conditions suivantes :

$$m(t_2) - m(t_1) = m(t_3) - m(t_2) = \alpha, \qquad \lambda(t_2 - t_1) \leqq t_3 - t_2 \leqq t_2 - t_1, \tag{27}$$

et

$$m(t_2) > a, \qquad m'_+(t_2) < [b + m(t_2)]^2 g^{-1}\left[c + \frac{5}{3} m(t_2)\right]. \tag{28}$$

6. Posons

$$r_0 = e^{t_2}, \qquad \sigma' = t_2 - t_1, \qquad \sigma = t_3 - t_2. \tag{29}$$

Prenons un point z_0 sur le cercle $|z| = r_0$, où $|f(z_0)| = M(r_0)$, et considérons avec M. Macintyre (*loc. cit.*), la fonction

$$\varphi(\tau) = \frac{f(z_0 e^\tau)}{f(z_0)} e^{-N\tau}, \qquad N = \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}. \tag{30}$$

D'après M. Macintyre (*loc. cit.*), N est un nombre réel positif, et l'on a

$$m'_-(t_2) \leqq N \leqq m'_+(t_2). \tag{31}$$

Considérons, dans le plan des τ, la bande définie par les inégalités

$$-\sigma' \leqq R\tau \leqq \sigma, \tag{32}$$

où $R\tau$ est la partie réelle de τ. D'après M. Macintyre (*loc. cit.*), dans la bande (32), on a

$$\begin{cases} \log|\varphi(\tau)| \leqq \alpha - \sigma N & \text{pour} \quad R\tau \geqq 0, \\ \log|\varphi(\tau)| \leqq \sigma' N - \alpha & \text{pour} \quad R\tau \leqq 0. \end{cases} \tag{33}$$

Mais, d'après (27) et (31), on a

$$\frac{\alpha}{\sigma'} \leqq N \leqq \frac{\alpha}{\sigma}, \qquad \lambda\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma', \tag{34}$$

donc il s'ensuit de (33) que dans la bande (32),

$$\log|\varphi(\tau)| \leqq \frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda}.$$

Supposons d'abord que, dans ce cas, on a dans (23)

$$\lambda = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \tag{35}$$

alors dans la bande (32), on a

$$|\varphi(\tau)| \leqq e. \tag{36}$$

Cela posé, le cercle $|\tau| \leqq \sigma$ appartient à la bande (32). D'autre part, on a $\varphi(0) = 1$, et $\varphi'(0) = 0$. Donc, d'après le lemme de Schwarz et (36), on a

$$\varphi(\tau) = 1 + \psi(\tau), \qquad |\psi(\tau)| < \frac{1}{100}, \tag{37}$$

dans le cercle

$$|\tau| \leqq \frac{\sigma}{20}. \tag{38}$$

7. Considérons les dérivées de la fonction $f(z)$. Bornons-nous d'abord aux k premières dérivées. En dérivant la relation

$$\frac{f(z_0 e^{\tau})}{f(z_0)} = e^{N\tau}\varphi(\tau),$$

on a

$$\frac{z_0 e^{\tau} f'(z_0 e^{\tau})}{N f(z_0)} = e^{N\tau}\left[\varphi(\tau) + \frac{\varphi'(\tau)}{N}\right]$$

ou

$$\frac{z_0 f'(z_0 e^{\tau})}{N f(z_0)} = e^{(N-1)\tau}\varphi_1(\tau).$$

Puis on a

$$\frac{z_0^2 e^{2\tau} f''(z_0 e^{\tau})}{N(N-1) f(z_0)} = e^{N\tau}\left[\varphi_1(\tau) + \frac{\varphi_1'(\tau)}{N-1}\right],$$

et ainsi de suite. On trouve que l'on a, en général,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{z_0^s\, e^{s\tau} f^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\ldots(N-s+1) f(z_0)} = e^{N\tau}\varphi_s(\tau), \\ &\varphi_s(\tau) = \varphi_{s-1}(\tau) + \frac{\varphi'_{s-1}(\tau)}{N-s+1}, \qquad \varphi_0(\tau) = \varphi(\tau), \end{aligned}\right. \tag{39}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$. Observons que, d'après (25) et (31), on a $N \geqq k$.

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ et $0 < \theta_k < \theta_{k-1} < \ldots < \theta_1 < 1$ des nombres positifs. D'après les inégalités de Cauchy, on voit successivement à partir de (36), que si

$$(40) \qquad \frac{e}{N\sigma(1-\theta_1)} \leqq \delta_1, \qquad \frac{e+\delta_1+\ldots+\delta_i}{(N-i)\sigma(\theta_i-\theta_{i+1})} \leqq \delta_{i+1},$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, on aura

$$\left|\frac{\varphi'_j(\tau)}{N-j}\right| \leqq \delta_{j+1},$$

dans la bande $-\theta_{j+1}\sigma \leqq R\tau \leqq \theta_{j+1}\sigma$, pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$; donc on aura

$$(41) \qquad |\varphi_s(\tau) - \varphi(\tau)| \leqq \delta_1 + \ldots + \delta_s,$$

dans la bande $-\theta_s\sigma \leqq R\tau \leqq \theta_s\sigma$, pour $s = 1, 2, \ldots, k$.

Comme $N \geqq k$, les conditions (40) seront vérifiées, si elles le sont en y remplaçant $N - i$ par $N\left(1 - \frac{i}{k}\right)$. Prenons

$$\delta_1 = \frac{1}{100k}, \qquad \delta_{i+1} = \frac{1}{100k^{\frac{1}{2}}(k-i)^{\frac{1}{2}}},$$

$$1 - \theta_1 = \frac{1}{4k}, \qquad \theta_i - \theta_{i+1} = \frac{1}{4k^{\frac{1}{2}}(k-i)^{\frac{1}{2}}},$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$. En considérant l'intégrale $\int_1^k x^{-\frac{1}{2}}dx$, on voit aisément que $\sum_{j=1}^{k} \delta_j < \frac{1}{50}$ et $\theta_k > \frac{1}{2}$. Alors les conditions (40) sont vérifiées si l'on a

$$(42) \qquad N\sigma \geqq 1200k^2.$$

Mais, d'après (34) et (35), on a

$$(43) \qquad N\sigma \geqq \frac{\alpha^2}{\alpha+1} > \alpha - 1,$$

donc (42) est vérifiée, pourvu qu'on ait

$$(44) \qquad \alpha \geqq 1200k^2 + 1.$$

Par suite, il résulte de (41) que, pour $s = 1, 2, \ldots, k$, on a

$$|\varphi_s(\tau) - \varphi(\tau)| < \frac{1}{50},$$

dans la bande $-\frac{\sigma}{2} \leqq R\,\tau \leqq \frac{\sigma}{2}$, et, d'après (39) et (37), on a

$$(45)\qquad \frac{z_0^s e^{s\tau} f^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\ldots(N-s+1)f(z_0)} = e^{N\tau}[1 + \psi_s(\tau)], \qquad |\psi_s(\tau)| < \frac{1}{30},$$

dans le cercle (38), pour $s = 1, 2, \ldots, k$. Il s'ensuit de (45), (37) et (30) que

$$(46)\qquad \frac{z_0^s e^{s\tau} f^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\ldots(N-s+1)f(z_0 e^{\tau})} = 1 + \lambda_s(\tau), \qquad |\lambda_s(\tau)| < \frac{1}{20},$$

dans le cercle (38), pour $s = 1, 2, \ldots, k$.

Eu égard à (36) et (34), on a $|f(z)| \leqq e^{\alpha+1}|f(z_0)|$ dans le cercle $|z| \leqq r_0 e^{\sigma}$. D'après les inégalités de Cauchy, on trouve aisément que pour $\nu \geqq 1$,

$$(47)\qquad |f^{(\nu)}(z)| < \nu!\, e^{\alpha+1} r_0^{-\nu} |f(z_0)| \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\nu},$$

dans le cercle $|z| \leqq r_0 e^{\frac{\sigma}{2}}$. D'après (43), $N\sigma > \frac{\alpha}{2}$, pourvu que $\alpha > 1$, (47) nous donne

$$|f^{(\nu)}(z)| < \nu!\, e^{\alpha+1} r_0^{-\nu} \alpha^{-\nu} |f(z_0)|\,(4N)^{\nu}.$$

Eu égard à (28) et (31), on a

$$(48)\qquad \begin{aligned} |f^{(\nu)}(z)| < \nu!\, e^{\alpha+1} e^{\nu\gamma} \alpha^{-\nu} 4^{\nu} |f(z_0)|\,[b + \log|f(z_0)|]^{2\nu} \\ \times g^{-1}\left[c + \frac{5}{3}\log|f(z_0)|\right]^{\nu}, \end{aligned}$$

dans le cercle $|z| \leqq r_0 e^{\frac{\sigma}{2}}$, où $\gamma = \alpha(1+\alpha) + \frac{2}{\alpha} + 2\alpha$.

8. Le cercle (38) comprend le rectangle

$$(49)\qquad -\frac{\log 4}{N} \leqq R\,\tau \leqq \frac{\log 4}{N}, \qquad -\frac{2(k+1)\pi}{N} \leqq I\,\tau \leqq \frac{2(k+1)\pi}{N},$$

si

$$(50)\qquad N\sigma > 20\sqrt{(\log 4)^2 + 4(k+1)^2\pi^2}.$$

D'après (43), (50) est vérifiée pourvu que

(51) $$\alpha \geqq 20\sqrt{(\log 4)^2 + 4(k+1)^2\pi^2} + 1.$$

Dans le cercle (38), on a

(52) $$\frac{f(z_0 e^\tau)}{f(z_0)} = e^{N\tau}[1 + \psi(\tau)], \qquad |\psi(\tau)| < \frac{1}{100},$$

d'après (30) et (37). Soit $-\pi \leqq \omega \leqq \pi$ un nombre réel quelconque. La fonction $e^{N\tau}$ représente conformément le rectangle

A(0) $$-\frac{\log 4}{N} < R\tau < \frac{\log 4}{N}, \qquad \frac{\omega}{N} - \frac{\pi}{N} < I\tau < \frac{\omega}{N} + \frac{\pi}{N},$$

sur la couronne fendue

$$\frac{1}{4} < |Z| < 4, \qquad |\arg Z - \omega| < \pi.$$

Considérons le domaine défini par

D(0) $$\frac{1}{2} < |Z| < 2, \qquad |\arg Z - \omega| < \frac{\pi}{2}.$$

Z étant un point quelconque de D(0), sur la frontière du rectangle A(0), on a

(53) $$|e^{N\tau} - Z| > \frac{1}{4}.$$

Soit $F(\tau) = \frac{f(z_0 e^\tau)}{f(z_0)}$. Eu égard à (52) et (53), on voit, d'après le théorème de Rouché, que l'équation

(54) $$F(\tau) - Z = 0.$$

définit une fonction $\tau = G_0(Z \mid \omega)$ holomorphe dans le domaine D(0), qui est une branche de la fonction inverse de $F(\tau)$. Les valeurs de $\tau = G_0(Z \mid \omega)$ couvrent une certaine portion du rectangle A(0). Soit $0 < h \leqq \frac{\pi}{4}$. De la même manière, on voit que l'équation (54) définit une fonction $\tau = G_h(Z \mid \omega)$ holomorphe dans le domaine

D(h) $$\frac{1}{2} < |Z| < 2, \qquad |\arg Z - \omega - h| < \frac{\pi}{2}.$$

Les valeurs de $\tau = G_h(Z \mid \omega)$ couvrent une certaine portion du rectangle

$$A(h) \quad -\frac{\log 4}{N} < R\tau < \frac{\log 4}{N}, \qquad \frac{\omega + h}{N} - \frac{\pi}{N} < I\tau < \frac{\omega + h}{N} + \frac{\pi}{N}.$$

Considérons le segment défini par $R\tau = 0$, $\frac{\omega}{N} \leqq I\tau \leqq \frac{(\omega + h)}{N}$, appartenant aux rectangles $A(0)$ et $A(h)$. Eu égard à (52), on voit que lorsque τ décrit ce segment, $Z = F(\tau)$ décrit un arc simple situé dans la partie commune à $D(0)$ et à $D(h)$. La fonction $G_h(Z \mid \omega)$ est donc le prolongement analytique de la fonction $G_0(Z \mid \omega)$. On prolonge la fonction $G_0(Z \mid \omega)$ en considérant successivement les rectangles $A\left(p\frac{\pi}{4}\right)$ et les domaines $D\left(p\frac{\pi}{4}\right)$ pour $p = 1, 2, \ldots, 6$, et l'on obtient une branche $\tau = G_0(Z \mid \omega)$ de la fonction inverse de $F(\tau)$, holomorphe dans la couronne

$$(55) \qquad \frac{1}{2} < |Z| < 2,$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$. En partant des rectangles

$$A(2j\pi) \quad -\frac{\log 4}{N} < R\tau < \frac{\log 4}{N}, \qquad \frac{\omega + 2j\pi}{N} - \frac{\pi}{N} < I\tau < \frac{\omega + 2j\pi}{N} + \frac{\pi}{N},$$

pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$, on obtient successivement k branches $\tau = G_j(Z \mid \omega)$ de la fonction inverse de $F(\tau)$, holomorphes dans la couronne fendue (55). Ces branches sont distinctes. En effet, dans la portion de la couronne (55), définie par $\omega < \arg Z < \omega + \frac{\pi}{2}$, les valeurs de $G_j(Z \mid \omega)$ appartiennent à $A(2j\pi)$, et les rectangles $A(2j\pi)$ sont distincts. Lorsque Z décrit la couronne fendue (55), les valeurs des fonctions $G_j(Z \mid \omega)$ décrivent respectivement des domaines $E_j(\omega)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ qui sont distincts. De même, en prolongeant la fonction $G_0(Z \mid \omega)$ considérée comme ci-dessus, dans le sens négatif, on obtient k branches $\tau = G'_j(Z \mid \omega)$ de la fonction inverse de $F(\tau)$, holomorphes dans la couronne fendue (55), dont les valeurs couvrent des domaines $E'_j(\omega)$.

Soit ω_1 un nombre réel quelconque. On peut écrire

$$\omega_1 - \arg f(z_0) = \omega, \qquad |\omega| \leqq \pi.$$

Considérons les domaines correspondants

$$E_j(\omega) \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

et soient $D_j(\omega_1)(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ les domaines décrits par le point $z = z_0 e^{\tau}$, lorsque τ décrit $E_j(\omega)(j = 0, 1, \ldots, k-1)$. Comme le rectangle (49) est supposé dans le cercle (38), les domaines $D_j(\omega_1)$ sont dans la couronne

$$r_0 e^{-\frac{\sigma}{20}} < |z| < r_0 e^{\frac{\sigma}{20}}. \tag{56}$$

D'autre part, d'après les considérations précédentes, les domaines $D_j(\omega_1)$ sont traversés par le cercle $|z| = r_0$. D'après la définition de la fonction $F(\tau)$, il s'ensuit que $f(z)$ est univalente dans $D_j(\omega_1)$ et représente ce domaine sur la couronne

$$\frac{1}{2}|f(z_0)| < |Z| < 2|f(z_0)|, \tag{57}$$

fendue suivant $\arg Z = \omega_1$. Montrons que les domaines

$$D_j(\omega_1) \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$$

sont distincts. En effet, soit Z_0 un point arbitraire de la couronne fendue (55). Soient $\tau_j = G_j(Z_0 \mid \omega)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ les points correspondants dans les domaines $E_j(\omega)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$. D'après la manière dont on a obtenu les fonctions $G_j(Z \mid \omega)$, les points τ_j sont tous dans un rectangle

$$-\frac{\log 4}{N} < R\tau < \frac{\log 4}{N}, \qquad \frac{\omega + l}{N} - \frac{\pi}{N} < I\tau < \frac{\omega + 2(k-1)\pi + l}{N} + \frac{\pi}{N}, \tag{58}$$

où l est égal à l'un des nombres $p\frac{\pi}{4}$ $(p = 2, 3, 4, 5, 6)$. Comme $N \geqq k$, la fonction $z = z_0 e^{\tau}$ est univalente dans (58). Par suite, les points $z_j = z_0 e^{\tau_j}$ dans les domaines $D_j(\omega_1)$ sont distincts. Évidemment, il résulte de là que les domaines $D_j(\omega_1)$ sont distincts. De même, correspondant aux domaines $E'_j(\omega)$, on a k domaines $D'_j(\omega_1)$. Mais les domaines $D'_j(\omega_1)$ ne sont pas nécessairement distincts des domaines $D_j(\omega_1)$.

9. Considérons les conditions (44) et (51). Ces deux conditions sont vérifiées si $\alpha = 1201 k^2$. Donc, si l'on suppose que, dans les

conditions (23), on a $\alpha = 1201 k^2$ et $\lambda = \frac{1201 k^2}{(1 + 1201 k^2)}$, la fonction $f(z)$ et ses dérivées possèdent les propriétés (52), (45), (46), (48) et celles obtenues dans le numéro précédent, en remplaçant, bien entendu, les nombres a, b, c, t_1, t_2, t_3, ... par les nombres correspondants.

La deuxième condition dans (23) est vérifiée pour $\alpha = 1201 k^2$ et $\lambda = \frac{1201 k^2}{(1 + 1201 k^2)}$, si l'on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{\log n} > 30(1201)^2 k^4. \tag{59}$$

Nous désignerons dans la suite par $g(x)$ une fonction réelle vérifiant les conditions 1° et 2° du lemme, la première condition dans (23), et la condition (59); par $\alpha(k)$ l'entier $1201 k^2$, et par $a(k, g)$, $b(k, g)$, $c(k, g)$, $\gamma(k)$ les nombres considérés dans le lemme correspondant à $\alpha(k)$, $\frac{\alpha(k)}{1 + \alpha(k)}$ et $g(x)$.

10. **Deuxième cas.** — Soit $\delta(k, g)$ le minimum des nombres $g(i)$ ($i = 0, 1, \ldots, k - 1$). Soit $f(z)$ définie par (20). Supposons que les k premiers coefficients dans (20) vérifient la condition

$$\sum_{i=0}^{k=1} | c_i | < \eta\, e^{-|\delta(k,g)|}, \tag{60}$$

où η est un nombre positif inférieur à 1, dont la valeur sera bientôt fixée. Supposons, d'autre part, que la fonction $f(z)$ n'est pas majorée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n. \tag{61}$$

Évidemment, la fonction

$$f_1(z) = f(z) - \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i \tag{62}$$

est aussi non majorée par (61). Donc, d'après le premier cas, si l'on désigne par $t_1 < t_2 < t_3$ trois points dans l'intervalle $-\gamma(k) < t < 0$, vérifiant les conditions (27) et (28) correspondant à $f_1(z)$, $\alpha(k)$, $\frac{1+\alpha(k)}{\alpha(k)}$ et $g(x)$, et si l'on définit ensuite les nombres r_0, σ', σ, z_0, N correspondants, comme au début du n° 6, la fonction $f_1(z)$ et ses dérivées possèdent les propriétés suivantes, déduites de (52), (45), (46) et (48) : dans le cercle

$$|\tau| \leqq \frac{\sigma}{20}, \tag{63}$$

on a

$$\frac{f_1(z_0 e^{\tau})}{f_1(z_0)} = e^{N\tau}[1+\psi(\tau)], \qquad |\psi(\tau)| < \frac{1}{100}, \tag{64}$$

$$\frac{z_0^s e^{s\tau} f_1^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\dots(N-s+1)f_1(z_0)} = e^{N\tau}[1+\psi_s(\tau)], \qquad |\psi_s(\tau)| < \frac{1}{30}, \tag{65}$$

pour $s = 1, 2, \dots, k$, et

$$\frac{z_0^s e^{s\tau} f_1^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\dots(N-s+1)f_1(z_0 e^{\tau})} = 1+\lambda_s(\tau), \qquad |\lambda_s(\tau)| < \frac{1}{20}, \tag{66}$$

pour $s = 1, 2, \dots, k$. Dans le cercle $|z| \leqq r_0 e^{\frac{\sigma}{2}}$, on a pour $\nu \geqq 1$,

$$\begin{aligned} |f_1^{(\nu)}(z)| < \nu!\, e^{1+\alpha+\nu\gamma\alpha-\nu} 4^{\nu} |f_1(z_0)| [b + \log|f_1(z_0)|]^{2\nu} \\ \times g^{-1}\left[c + \frac{5}{3}\log|f_1(z_0)|\right]^{\nu}, \end{aligned} \tag{67}$$

où $\alpha = \alpha(k)$, $\gamma = \gamma(k)$, $b = b(k, g)$, $c = c(k, g)$. D'autre part, le cercle (63) comprend le rectangle (49), et la fonction $f_1(z)$ possède les propriétés énoncées au n° 8.

11. Comme $\log|f_1(z_0)| > a(k, g)$, et, d'après (34), $N\sigma \leqq \alpha(k)$, il découle de (64) et (65) que, dans le cercle (63), on a

$$|f_1(z_0 e^{\tau})| > \frac{99}{100} e^{a(k,g) - \frac{\alpha(k)}{20}}, \tag{68}$$

et

$$|f_1^{(s)}(z_0 e^{\tau})| > \frac{29}{30} N(N-1)\dots(N-s+1) e^{a(k,g) - \frac{\alpha(k)}{20}}, \tag{69}$$

pour $s = 1, 2, \dots, k$. Nous prenons, dans (60),

$$\eta = \frac{1}{300}\,\frac{29}{30}\, e^{-|a(k,g)| - \frac{\alpha(k)}{20}}. \tag{70}$$

Alors, d'après la définition de la fonction $f_1(z)$, on voit que, dans le cercle (63), on a

$$(71)\qquad f(z_0 e^{\tau}) = f_1(z_0 e^{\tau})[1+\beta(\tau)], \qquad |\beta(\tau)| < \frac{1}{300},$$

et

$$(72)\qquad f^{(s)}(z_0 e^{\tau}) = f_1^{(s)}(z_0 e^{\tau})[1+\beta_s(\tau)], \qquad |\beta_s(\tau)| < \frac{1}{300},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$, dans le cercle (63). En particulier, on a

$$(73)\qquad f(z_0) = f_1(z_0)[1+\beta(0)], \qquad |\beta(0)| < \frac{1}{300}.$$

D'après (64), (65), (66), (71), (72) et (73), on trouve par des calculs faciles que, dans le cercle (63), on a

$$(74)\qquad \frac{f(z_0 e^{\tau})}{f(z_0)} = e^{N\tau}[1+\theta(\tau)], \qquad |\theta(\tau)| < \frac{1}{50},$$

$$(75)\qquad \frac{z_0^s e^{s\tau} f^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\ldots(N-s+1)f(z_0)} = e^{N\tau}[1+\theta_s(\tau)], \qquad |\theta_s(\tau)| < \frac{1}{20},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$, et

$$(76)\qquad \frac{z_0^s e^{s\tau} f^{(s)}(z_0 e^{\tau})}{N(N-1)\ldots(N-s+1)f(z_0 e^{\tau})} = 1+\varpi_s(\tau), \qquad |\varpi_s(\tau)| < \frac{1}{15},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$.

Soit z'_0 un point sur le cercle $|z| = |z_0|$, où $|f(z)|$ atteint son maximum. Eu égard à (73), on a $|f_1(z_0)| < 2|f(z'_0)|$. D'autre part, on a $|f^{(\nu)}(z)| < |f_1^{(\nu)}(z)| + k!|f_1(z_0)|$. D'après (67), on trouve que, dans le cercle $|z| \leqq r_0 e^{\frac{\sigma}{2}}$, on a

$$(77)\qquad |f^{(\nu)}(z)| < 2\nu!\, e^{\alpha+\nu\gamma}|f(z'_0)|\,[b' + \log|f(z'_0)|]^{2\nu} \times g^{-1}\left[c' + \frac{5}{3}\log|f(z'_0)|\right]^{\nu},$$

pour $\nu \geqq 1$, où $b' = b + \log 2$ et $c' = c + \frac{5}{3}\log 2$.

12. On a

$$|f(z'_0)| < |f_1(z_0)|\left(1+\frac{1}{300}\right),$$

et, eu égard à (73),

$$|f(z_0)| > |f_1(z_0)|\left(1-\frac{1}{300}\right).$$

On a donc $\frac{f(z_0)}{f(z'_0)} = (1+\varepsilon_0)e^{i\theta_0}$, $|\varepsilon_0| < \frac{1}{100}$, et, d'après (74),

$$(78) \qquad \frac{f(z_0 e^{\tau})}{e^{i\theta_0} f(z'_0)} = e^{N\tau}[1+\delta(\tau)], \qquad |\delta(\tau)| < \frac{1}{30},$$

dans le cercle (63). Comme le cercle (63) comprend le rectangle (49), la formule (78) et la méthode utililisée dans le n° 8 permettent d'obtenir k domaines $D_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ dans la couronne (56), traversés par le cercle $|z| = r_0$; dans $D_i(\omega)$, $f(z)$ est univalente et représente ce domaine sur la couronne

$$(79) \qquad \frac{1}{2}|f(z'_0)| < |Z| < 2|f(z'_0)|,$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω étant arbitraire. D'après les définitions des nombres r_0 et σ, les domaines $D_i(\omega)$ sont, *a fortiori*, à l'intérieur de la couronne

$$(80) \qquad e^{-\Upsilon(k)} < |z| < 1.$$

D'après (78), on voit que dans $D_i(\omega)$, l'argument de z varie de moins de $\frac{3\pi}{N}$, et le module de z est compris entre $r_0\left(\frac{15}{31}\right)^{\frac{1}{N}}$ et $r_0\left(\frac{60}{29}\right)^{\frac{1}{N}}$, et eu égard à (75) et (76), on trouve que dans $D_i(\omega)$, l'argument de $f^{(s)}(z)$ varie de moins de 3π, et l'on a

$$(81) \qquad \frac{1}{3} < \left|\frac{f^{(s)}(z)}{H_s f(z)}\right| < 3,$$

avec

$$H_s = \frac{N(N-1)\ldots(N-s+1)}{r_0^s},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$. En considérant (28) et (31), on a

$$(82) \qquad 1 < H_s^{\frac{1}{s}} < e^{\Upsilon(k)}[b' + \log|f(z'_0)|]^2 g^{-1}\left[c' + \frac{5}{3}\log|f(z'_0)|\right],$$

où $b' = b(k, g) + \log 2$ et $c' = c(k, g) + \frac{5}{3}\log 2$. Évidemment, (77) a lieu, *a fortiori*, dans les domaines $D_i(\omega)$. Enfin, on a

$$(83) \qquad |f(z'_0)| > \frac{1}{2}e^{a(k,g)}.$$

13. Troisième cas. — Soit $f(z)$ définie par (20), et supposons que $f(z)$ n'est pas majorée par

$$\Omega\left(1+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{g(n)}z^n, \tag{84}$$

où $\Omega=\frac{1}{\eta}e^{|\delta(k,g)|}$, avec η défini par (70). Évidemment, la fonction

$$f_2(z)=\frac{f(z)}{\Omega\left(1+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)}$$

vérifie la condition (60) et n'est pas majorée par (61). Donc, $f_2(z)$ possède les propriétés données dans le deuxième cas. Il suit de ces propriétés de $f_2(z)$ que la fonction $f(z)$ a les propriétés suivantes : Dans la couronne (80), on peut trouver k domaines $D_i(\omega)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ traversés par un cercle $|z|=r_0$ vérifiant la condition

$$M(r_0, f)>\frac{1}{2}\Omega e^{a(k,g)},$$

tels que

1° $f(z)$ est univalente dans $D_i(\omega)$ et représente ce domaine sur la couronne

$$\frac{1}{2}M(r_0, f)<|Z|<2M(r_0, f),$$

fendue suivant $\arg Z=\omega$, ω étant arbitraire.

2° Dans $D_i(\omega)$, l'argument de $f^{(s)}(z)$ varie de moins de 3π, et l'on a

$$\frac{1}{3}<\left|\frac{f^{(s)}(z)}{H_s f(z)}\right|<3,$$

$$1<H_s^{\frac{1}{s}}<e^{\gamma(k)}[b'(k, g)+\log M(r_0, f)]^2 g^{-1}\left[c'(k, g)+\frac{5}{3}\log M(r_0, f)\right],$$

pour $s=1, 2, \ldots, k$.

3° Dans $D_i(\omega)$, on a

$$|f^{(\nu)}(z)|<2\nu!\, e^{\alpha(k)+\nu\gamma(k)}M(r_0, f)[b'(k, g)+\log M(r_0, f)]^{2\nu}$$
$$\times g^{-1}\left[c'(k, g)+\frac{5}{3}\log M(r_0, f)\right]^{\nu},$$

pour $\nu\geq 1$.

14. **Quatrième cas.** — Soit S un nombre positif arbitrairement donné. Soit $f(z)$ définie par (20), et supposons que $f(z)$ n'est pas majorée par

$$\Omega\Omega'\left(S+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n,$$

où Ω est défini comme dans le cas précédent, et où

$$\Omega' = e^{b'(k,g)k+c'(k,g)}.$$

En considérant la fonction

$$f_3(z) = \frac{f(z)}{\Omega' S},$$

qui vérifie la condition (84) du troisième cas, nous parvenons enfin au théorème I.

15. *Remarque.* — D'après la démonstration du théorème I, on voit que l'on a un énoncé qui se déduit du théorème I de la manière suivante : On remplace dans le théorème I la condition

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log n} > ak^4,$$

par

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log n} > ak^2,$$

a étant une constante positive numérique, et, dans la partie 2°, on remplace les dérivées $f^{(n)}(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$ par la première dérivée $f'(z)$. Le reste du théorème I est non changé. En effet, considérons la première condition dans (40). Cette condition est vérifiée pour $\delta_1 = \frac{1}{50}$ et $\theta_1 = \frac{1}{2}$ si $\alpha \geqq 100e + 1$. Ceci et la condition (51) sont toutes deux vérifiées si $\alpha = 381k$. Pour $\alpha = 381k$ et $\lambda = \frac{381k}{(1+381k)}$, la deuxième condition dans (23) est vérifiée si

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log n} > 30(381)^2 k^2.$$

Les mêmes méthodes permettent alors de démontrer notre énoncé.

II. — Majorations dans le cercle unité des fonctions holomorphes vérifiant certaines conditions.

16. De la remarque découle le théorème suivant :

Théorème II. — *Si* $Z = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *est une fonction holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$, *et si, correspondant à toute couronne* (Γ) *dans le plan* Z, *de centre origine et d'épaisseur supérieure à un nombre positif donné* M, *il existe un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte au cercle* $|z| < 1$, *ne possède que* $k - 1$ *branches au plus, holomorphes dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma)$, $f(z)$ *est majorée par*

$$\mu_k \left(M + \sum_{l=0}^{k=1} |c_l| \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha k^2} z^n \right),$$

où μ_k *est un nombre positif ne dépendant que de* k, *et* α *est une constante positive numérique.*

Il résulte de ce théorème une majoration d'une fonction holomorphe q-valente dans le cercle unité, et une majoration d'une branche quelconque du logarithme d'une fonction holomorphe dans le cercle unité, ne prenant pas les valeurs 0 et 1. Mais ces majorations sont moins précises que celles obtenues par M. Frazer [9] et par M. Littlewood [10].

17. Nous allons considérer les fonctions holomorphes dans le cercle unité ne s'annulant pas et vérifiant certaines conditions où interviennent leurs dérivées. Pour cela, rappelons d'abord les définitions suivantes, données dans notre travail cité : Considérons un polynome de la forme suivante :

$$\Pi[f', f'', \ldots, f^{(k)}] + P[f', f'', \ldots, f^{(p)}], \tag{85}$$

Π est un monome de degré d en $f', f'', \ldots, f^{(k)}$, ayant le coeffi-

---

(9) *Journal London Math. Soc.*, t. 10, 1935, p. 143-150.
(10) *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 23, 1925, p. 481-519.

cient a_0, et P est un polynome de degré $< d$ en $f', f'', \dots, f^{(p)}$, ayant les coefficients a_j $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$; k, p, d sont des entiers positifs et $a_0 \neq 0$, a_j sont des constantes. Nous désignons par d_j le degré du terme de P qui a le coefficient a_j. Soit $T(F, F', \dots, F^{(\nu)})$ un polynome homogène de degré s en $F, F', \dots, F^{(\nu)}$ ayant des coefficients constants. En posant $F = e^f$, T prend la forme $e^{sf}\Psi(f', f'', \dots, f^{(\nu)})$. On dit que T vérifie la condition $H(k, p, d)$ si le polynome Ψ est identique au polynome (85). De même, $T(F', F'', \dots, F^{(\nu)})$ étant un polynome non nécessairement homogène ayant des coefficients constants, en posant $F = e^f$, T prend la forme $\sum_{h=0}^{s} e^{hf}\Psi_h(f', f'', \dots, f^{(\nu)})$. On dit que T vérifie la condition $K(k, p, d)$ si le polynome $\sum_{h=0}^{s}\Psi_h$ est identique au polynome (85).

18. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Soient* $T(F, F', \dots, F^{(\nu)})$ *un polynome homogène de degré* s *en* $F, F', \dots, F^{(\nu)}$ *vérifiant la condition* $H(k, p, d)$ *et* m *un entier positif donné. Posons*

$$(86)\qquad s\Lambda = 1 + m + \left|\log\frac{|a_0|}{s^d}\right| + s\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}.$$

Si $F(z)$ *est holomorphe et ne s'annule pas dans* $|z| < 1$, *et si l'équation*

$$(87)\qquad T[F, F', \dots, F^{(\nu)}] = 1$$

n'a que m *racines au plus dans* $|z| < 1$, *alors* $\log F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *est majorée par*

$$\rho(k, p, d)\left(\Lambda + \sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\tau} z^n\right),$$

où $\rho(k, p, d)$ *est un nombre positif ne dépendant que de* k, p, d, γ *est une constante positive numérique, et* τ *désigne le plus grand des entiers* k^4 *et* $p\,d$.

En effet, par hypothèse, en posant $F = e^f$, et $\varphi = sf$, l'équation (87) prend la forme

$$(88)\qquad e^{\varphi}[\mathrm{H}_1(\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(k)}) + \mathrm{P}_1(\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(p)})] = 1,$$

où le coefficient de H_1 est $a'_0 = a_0 s^{-d}$, et les coefficients de P_1 sont $a'_j = a_j s^{-d_j}$. Appliquons le théorème I en prenant pour $g(x)$ la fonction définie par les conditions suivantes : $g(x) = 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, et $g(x) = ahk^4 \log x$ pour $x > 1$, où h est un nombre positif supérieur à un, qui sera fixé. Donc si la fonction $\varphi(z)$ n'est pas majorée par

$$(89)\qquad \lambda(k, g)\left[\mathrm{S} + s\sum_{i=0}^{k=1} |c_i|\right]\sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n,$$

on peut trouver, en particulier dans la couronne $\alpha(k) < |z| < 1$, un domaine (D) dans lequel $\varphi(z)$ est univalente et représente ce domaine sur la couronne fendue

$$(90)\qquad \frac{1}{2}\mathrm{M}(r, \varphi) < |\mathrm{Z}| < 2\mathrm{M}(r, \varphi), \qquad |\arg \mathrm{Z}| < \pi; \qquad \mathrm{M}(r, \varphi) > \mathrm{S}.$$

Dans (D), les dérivées de $\varphi(z)$ possèdent les propriétés 2° et 3° du théorème I. Par hypothèse, l'ensemble des équations

$$(91)\qquad \varphi(z) + 2i\pi l + \log \mathrm{H}_1 + \log\left(1 + \frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{H}_1}\right) = 0,$$

où l est un entier arbitraire, et où les déterminations des logarithmes ont été choisies en un point, n'a que m racines au plus. On voit aisément que si

$$(92)\qquad \mathrm{M}(r, \varphi) > 6(m+1)\pi,$$

la couronne (90) comprend au moins $2(m+1)$ des points $2i\pi l$, et, pour chacun de ces points, on a, sur la frontière de (D),

$$(93)\qquad |\varphi(z) + 2i\pi l| > \frac{1}{6}\mathrm{M}(r, \varphi).$$

En prenant en un point z_0 du domaine (D), les déterminations réduites pour $\log a'_0$ et $\log \varphi^{(n)}(z)\,(n = 1, 2, \ldots, k)$, il suit de (90) et de la deuxième partie du théorème I, que, si $\mathrm{S} > e$, on a dans (D)

$$(94)\qquad |\log \Pi_1| < |\log |a'_0|| + C(k, d)\log M(r, \varphi),$$

où $C(k, d)$ est un nombre positif ne dépendant que de k, d.

Considérons la fonction $\frac{P_1}{\Pi_1}$. D'après (90), la deuxième partie du théorème I et la troisième partie, on a, dans le domaine (D), en posant $M = M(r, \varphi)$,

$$(95)\qquad \left|\frac{P_1}{\Pi_1}\right| < C'(k, p, d)\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right| \frac{\left(\log \frac{M}{S}\right)^{2pd_j}\left(\frac{M}{S}\right)^{\frac{2pd_j}{ahk}}}{M^{d-d_j}}.$$

Supposons que

$$(96)\qquad S > e\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}} \quad (^{11}),$$

et écrivons

$$(97)\qquad M = H\Gamma, \qquad \Gamma = \sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$$

D'après (95), on a, *a fortiori*, dans (D),

$$(98)\qquad \left|\frac{P_1}{\Pi_1}\right| < C'\frac{(\log H)^{2p(d-1)} H^{\frac{2p(d-1)}{ahk}}}{H}\sum_{j=1}^{\sigma}\frac{\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right|}{\Gamma^{d-d_j}}.$$

On voit aisément que la somme dans (98) est ≤ 1. En effet, posons

$$\alpha_j = \frac{\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right|}{\Gamma^{d-d_j}}.$$

Comme $\alpha_j \leq 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{\sigma}\alpha_j \leq \sum_{j=1}^{\sigma}\alpha_j^{\frac{1}{d-d_j}} = 1.$$

Soit τ défini dans le théorème III, et prenons

$$(99)\qquad h = \left(1 + \frac{8}{a}\right)\frac{\tau}{k^{\lambda}}.$$

([11]) Nous supposons que les coefficients du polynome P ne sont pas tous nuls. Le cas où $T(F, F', \dots F^{(\nu)})$ prend la forme $e^{sf}\Pi$, en posant $F = e^f$, est plus simple.

Alors, si $H > C''(k, p, d)$, (98) nous donne

$$\left|\frac{P_1}{\Pi_1}\right| < \frac{1}{2}, \tag{100}$$

dans (D). Cette inégalité fournit une limitation du module de $\log\left(1 + \frac{P_1}{\Pi_1}\right)$ dans (D), en prenant au point z_0 dans (D), la détermination réduite pour cette fonction. Les conditions (93), (94) et (100) sont donc vérifiées si

$$S > 6(m+1)\pi + e + [e + C''(k, p, d)]\Gamma. \tag{101}$$

Enfin, d'après le théorème de Rouché, on voit, eu égard à (93), (94), (100) et (101), que l'équation (91) a une racine dans (D) pour chacune des valeurs $2i\pi l$ considérées plus haut, si

$$S > C'''(k, p, d)\,(1 + m + |\log|a'_0|| + \Gamma).$$

Donc, si l'on donne à S une valeur vérifiant cette condition, la fonction $\varphi(z)$ est majorée par (89). Ceci établit le théorème III.

En posant $F = e^f$, $F^{(\nu)} (\nu \geqq 1)$ prend la forme $e^f(f'^{\nu} + P_\nu)$, où P_ν est un polynome de degré $\nu - 1$ en $f', f'', \ldots, f^{(\nu)}$. Donc, on a le corollaire suivant :

Corollaire. — *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$ *ne prenant pas la valeur zéro, et dont la dérivée d'ordre* ν, $F^{(\nu)}(z)$ $(\nu \geqq 1)$, *ne prend pas la valeur un.* $\operatorname{Log} F(z)$, *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *est majorée par*

$$\rho_\nu[1 + |\log F(0)|]\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma'\nu^2} z^n\right),$$

où ρ_ν *est un nombre positif ne dépendant que de* ν *et* γ' *est une constante positive numérique.*

Théorème IV. — *Soient* $T(F', F'', \ldots, F^{(\nu)})$ *un polynome en* $F', F'', \ldots, F^{(\nu)}$ *vérifiant la condition* $K(k, p, d)$ *et* m *entier,* L, *des nombres positifs donnés. Posons*

$$B = 1 + m + \left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}.$$

Si $F(z)$ *est holomorphe et ne s'annule pas dans* $|z|<1$, *et si aux points de* $|z|<1$, *sauf peut-être en m points, où* $F(z)$ *prend la valeur un, on a*

$$|T(F', F'', \ldots, F^{(\nu)})|<L,$$

alors $\log F(z)=\sum_{n=0} c_n z^n$, *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *est majorée par*

$$\varpi(k, p, d)\left(B+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta\tau} z^n\right),$$

où $\varpi(k, p, d)$ *est un nombre positif ne dépendant que de* k, p, d, δ *est une constante positive numérique, et* τ *désigne le plus grand des entiers* k^4 *et* $p\,d$.

D'après les hypothèses, en écrivant $F=e^f$, f possède la propriété suivante : Aux points de $|z|<1$, sauf peut-être en m points, où f prend une quelconque de valeurs $2i\pi l$, l entier arbitraire, on a

$$(102)\qquad |\Pi(f', f'', \ldots, f^{(k)})+P(f', f'', \ldots, f^{(p)})|<L.$$

D'après le théorème I, en y prenant pour $g(x)$ la fonction définie dans la démonstration du théorème III avec h égal à la valeur dans (99), si la fonction $f(z)$ n'est pas majorée par

$$(103)\qquad \lambda(k, g)\left[S+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right]\sum_{n=0}^{\infty} e^{g(n)} z^n,$$

on peut trouver dans la couronne $\alpha(k)<|z|<1$ un domaine (D) que $f(z)$ représente conformément sur la couronne fendue

$$(104)\qquad \frac{1}{2}M(r, f)<|Z|<2M(r, f), \qquad |\arg Z|<\pi; \qquad M(r, f)>S.$$

Dans (D), les dérivées de $f(z)$ possèdent les propriétés 2° et 3° du théorème I. D'après les mêmes considérations que dans la démonstration du théorème III, on voit que si

$$S>\frac{4}{3}(m+1)\pi+[e+C''(k, p, d)]\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$$

la couronne (104) comprend $2(m+1)$ des points $2i\pi l$, et l'on a, dans (D),

(105) $$\left|\frac{P}{\Pi}\right| < \frac{1}{2}.$$

Soient z' les points dans (D) correspondant à ces points $2i\pi l$. Donc, pour certains des points z', on a l'inégalité (102). Mais, d'après (105), (104), et la deuxième partie du théorème I, si

$$M(r, f) > C(k)\left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}},$$

on a, dans le domaine (D), $|\Pi + P| > L$. Donc, en donnant à S une valeur vérifiant la condition

$$S > C'''(k, p, d)\left[1 + m + \left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}\right],$$

$f(z)$ est majorée par (103). Le théorème IV est donc établi.

Corollaire. — *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$ *ne prenant pas la valeur zéro, et dont la dérivée d'ordre* ν, $F^{(\nu)}(z)$ $(\nu \geqq 1)$ *est bornée en module par un nombre positif donné* L, *aux points situés dans* $|z| < 1$, *où* $F(z)$ *prend la valeur un.* $\operatorname{Log} F(z)$, *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *est majorée par*

$$\varpi_\nu\left[1 + L^{\frac{1}{\nu}} + |\log F(0)|\right]\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta'\nu^2} z^n\right),$$

où ϖ_ν *est un nombre positif ne dépendant que de* ν *et* δ' *est une constante positive numérique.*

19. *Remarque.* — Considérons une fonction $F(z)$ vérifiant les conditions du corollaire du théorème III. Dans notre travail cité (Chap. III), nous avons établi l'inégalité

(106) $$\log|F(re^{i\theta})| < \frac{1}{1-r}\left[\lambda_0 + \lambda_1 \overset{+}{\log}|F(0)| + \lambda_2 \log\frac{1}{1-r}\right],$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, λ_0, λ_1, λ_2 étant des nombres positifs ne dépendant que de ν. Cette inégalité permet de préciser le corollaire du théorème III de la manière suivante : Soit $\log F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une branche quelconque du logarithme de $F(z)$. D'après les inégalités de Hadamard ([12]), on a

$$(107) \quad |c_n| r^n \leqq 4 \overset{+}{\log} M(r, F) - 2 \log |F(0)| \qquad (n > 0,\ 0 < r < 1).$$

Prenons, dans (107), $r = \frac{(n-1)}{n}$ $(n > 1)$. Eu égard à (106), on trouve que

$$|c_n| < 8en\left(\lambda_0 + \lambda_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + \lambda_2 \log n\right) - 4e \log |F(0)| \qquad (n > 1).$$

Pour $n = 1$, on peut prendre $r = \frac{1}{2}$. On a, *a fortiori*,

$$|c_n| < \lambda(1 + |\log F(0)|) n \log en \qquad (n \geqq 1),$$

λ étant un nombre positif ne dépendant que de ν. De même, soit $F(z)$ une fonction vérifiant les conditions du corollaire du théorème IV, et soit $\log F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une branche quelconque du logarithme de $F(z)$. Moyennant l'inégalité suivante, obtenue dans le même travail (Chap. III),

$$\log |F(re^{i\theta})| < \frac{1}{1-r}\left[\lambda_0 + \lambda_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + \lambda_2 L^{\frac{1}{\nu}}\right],$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, λ_0, λ_1, λ_2 étant des nombres positifs ne dépendant que de ν, on trouve que

$$|c_n| < 8en\left(\lambda_0 + \lambda_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + \lambda_2 L^{\frac{1}{\nu}}\right) - 4e \log |F(0)| \qquad (n > 1),$$

et

$$|c_n| < \lambda\left(1 + L^{\frac{1}{\nu}} + |\log F(0)|\right) n \qquad (n \geqq 1),$$

λ étant un nombre positif ne dépendant que de ν.

([12]) *Journal de Math.*, t. 9, 1893, p. 186-187.

20. Les théorèmes III et IV améliorent respectivement les théorèmes IV′ et VIII′ de notre travail cité. D'une manière analogue, on peut obtenir des théorèmes qui améliorent les théorèmes XIX et XXI dans le même travail. Donnons enfin le théorème suivant qui est démontré en établissant une inégalité de la forme $\left|\frac{P}{\Pi}\right| < \frac{1}{2}$ par la méthode donnée dans la démonstration du théorème III :

Théorème V. — *Soient* $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$ *un monome, et* $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$ *un polynome définis dans les mêmes conditions qu'au n° 17. Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *est holomorphe dans* $|z| < 1$, *et si* $f(z)$ *vérifie l'équation différentielle*

$$\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)}) = 0,$$

$f(z)$ *est majorée par*

$$\lambda(k, p, d)\left(\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}} + \sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta\tau} z^n\right),$$

où $\lambda(k, p, d)$ *est un nombre positif ne dépendant que de* k, p, d, β *est une constante positive numérique, et* τ *désigne le plus grand des entiers* k^4 *et* $p\,d$.

Remarque. — Il est aisé de voir que l'on peut remplacer dans ce théorème l'expression $\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$ par $1 + \sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}} < \sigma + \sum_{j=0}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|,$$

et que σ est au plus égal à un certain entier ne dépendant que de p et d. En considérant l'expression $\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a'_j}{a'_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$ figurant dans la démonstration du théorème III, on voit que l'on peut remplacer dans le théorème III, la quantité $s\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$ par $\sum_{j=1}^{\sigma} s^{d-d_j}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$. Enfin, dans le théorème IV, on peut remplacer l'expression $\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^{\frac{1}{d-d_j}}$ par $\sum_{j=1}^{\sigma}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$.