BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

# Sur les figures superconvexes planes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 64 (1936), p. 197-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__197_0>

# SUR LES FIGURES SUPERCONVEXES PLANES;

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. La définition classique de la convexité d'un corps, ou plus généralement d'un ensemble ponctuel d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, a comme l'on sait, à sa base, le concept du segment déterminé par deux points quelconques de l'ensemble : *un ensemble est convexe si, avec deux points* A, B, *il contient tous les points du segment rectiligne* AB.

Cette définition a été étendue, de diverses façons, aux géométries non euclidiennes, avec le souci de retrouver la définition usuelle dans le cas particulier de la géométrie euclidienne ordinaire.

Dans toutes les généralisations auxquelles on a été ainsi conduits (¹), le concept de départ est toujours celui du segment déterminé par deux points. Mais, *sans sortir de l'espace ordinaire*, on pouvait tenter une généralisation *portant sur la notion de convexité elle-même*. Dans un essai de ce genre, la généralisation doit nécessairement porter sur le concept de départ (concept du segment défini par deux points), et cela de façon à retrouver la définition ordinaire en revenant au concept initial.

Un tel essai a été fait par M. A. E. Mayer, dans un beau Mémoire de publication récente (²).

Considérons, dans le plan, une courbe U convexe fermée et douée d'un centre de symétrie. U est supposée n'admettre ni points anguleux ni arcs partiels réduits à des segments de droite.

Toute courbe du plan déduite de U par une translation sera dite une *courbe unitaire du plan*, et tout arc d'une courbe unitaire,

---

(¹) *Voir par exemple* E. STEINITZ, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe System; Journ. reine angew. math,* 143, 1913, p. 128-175; 144, 1914, p. 1-40, 146, 1916, p. 1-52.

(²) ANTON. E. MAYER, *Eine Überkonvexität; Mathematische Zeitschrift*; t. 39, 1935, p. 511.

non susceptible d'être partagé en plusieurs autres par un diamètre de celle-ci, sera dit un *arc unitaire*.

La généralisation de la notion de convexité adoptée par M. A. E. Mayer consiste à remplacer, dans la définition de la convexité ordinaire, le segment déterminé par deux points d'un ensemble (E), par un arc unitaire ayant pour extrémités les deux points considérés. Les ensembles répondant à la nouvelle définition sont dits *superconvexes*. Ainsi :

*Un ensemble* (E) *est superconvexe si*, A *et* B *étant deux points quelconques de* (E), *il existe un arc unitaire d'extrémités* A *et* B *dont tous les points sont dans* (E).

Dans son Mémoire, M. A. E. Mayer étend aux ensembles superconvexes un grand nombre de propriétés des ensembles convexes, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas. Nous dirons seulement que, le fait qu'un ensemble superconvexe est nécessairement convexe, et l'introduction de la notion de *courbe unitaire d'appui*, jouent, dans les extensions de M. Mayer, un rôle important : une courbe unitaire U est courbe d'appui pour un ensemble superconvexe (E), si elle passe par un point frontière A de (E) et si elle enveloppe (E) [si tous les points de (E) sauf A sont dans le domaine (ouvert) limité par U].

De même que pour qu'un ensemble plan soit convexe il faut et il suffit qu'il admette en chacun de ses points frontières une droite d'appui (au moins), pour qu'un ensemble soit superconvexe il faut et il suffit que par chaque point de sa frontière il passe une courbe unitaire d'appui.

Un autre critérium de superconvexité est le suivant :

La courbure X(A, B, C) d'un système de trois points A, B, C de l'ensemble (E) étant définie comme le rapport d'homothétie de la courbe unitaire à la courbe homothétique (unique) circonscrite au triangle ABC, pour que (E) soit superconvexe, *il faut et il suffit que la limite inférieure des courbures correspondant aux différents triangles dont les sommets sont des points frontières soit supérieure ou égale à* 1.

Dans le cas des ensembles (E) ayant pour frontières des courbes régulières [nous entendons par là, douées d'une tangente variant d'une façon continue, et d'une courbure continue finie et non nulle], et pour des courbes unitaires également régulières, la condition générale de superconvexité ci-dessus peut être présentée sous une forme ne faisant intervenir, une fois la courbe unitaire fixée, que la courbure euclidienne de la frontière C de (E). C'est ce que nous montrerons directement au numéro suivant, en nous basant uniquement sur les propriétés des arcs convexes.

La condition à laquelle nous parviendrons, nous permettra (n° 3) d'étendre aux corps superconvexes du plan la notion importante de série linéaire de corps convexes, d'indiquer des courbes unitaires simples assurant la superconvexité d'une figure donnée, et de montrer comment, une figure convexe étant donnée, on peut comparer les degrés de superconvexité qu'elle affecte vis-à-vis de courbes unitaires différentes appartenant à un champ déterminé.

Au n° 4 nous indiquons un procédé géométrique de construction de la courbe unitaire réalisant, pour une figure donnée, la superconvexité maxima.

2. **Le critère de superconvexité pour les figures planes à frontière régulière.** — Nous utiliserons une propriété des arcs convexes établie par M. B. Segre [1].

$\widehat{AB}$ étant un arc régulier de courbe convexe, la *déflexion* $\alpha$ de l'arc est l'angle dont tourne la tangente en un point lorsque ce point décrit l'arc.

Considérons deux arcs convexes C et C′ dont les déflexions sont inférieures ou égales à $\pi$, ayant les mêmes extrémités A, B et tangents en au moins une extrémité. Il est possible d'établir entre ces deux arcs (ou entre l'un d'eux et une portion convenable de l'autre), une correspondance ponctuelle dans laquelle les tangentes aux deux arcs en un couple quelconque de points homologues soient parallèles. Cette correspondance jouit de la propriété suivante :

*Si les arcs sont distincts, la différence des rayons de courbure $r$ et $r'$ en deux points homologues de C et C′ prend des*

---

[1] *Ac. dei Lincei*, 6ᵉ série, t. 20, 1934, p. 407 et 455.

*valeurs positives et négatives; il existe par suite sur les deux arcs, entre* A *et* B, *deux points correspondants au moins pour lesquels les rayons de courbure sont égaux.*

Cela étant, envisageons une figure convexe (C) limitée par une courbe fermée régulière C. Soit U une courbe unitaire [régulière fermée et centrée] définissant une superconvexité dans le plan. Établissons entre C et U une correspondance ponctuelle telle, qu'en deux points homologues quelconques A et A′ de C et U, les tangentes T et T′ à C et U soient parallèles et *également situées.*

L'expression *également situées* signifie, comme il est bien connu, que si l'on soumet U à une translation amenant T′ sur T, après la translation C et U sont situées d'un même côté par rapport à T.

Supposons que (C) soit superconvexe, et désignons par $r$ et $\rho$ les rayons de courbure de C et U aux points homologues A et A′. Après la translation $\overrightarrow{A'A}$, U devient une courbe unitaire d'appui pour (C); elle enveloppe (C), et l'on a par suite

$$\frac{r}{\rho} \leqq 1. \tag{1}$$

La condition (1), pour un couple quelconque de points homologues de C et U, est donc nécessaire pour que (C) soit superconvexe. Nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante. Nous établirons à cet effet que *si* (C) *n'est pas superconvexe on n'a pas* $\frac{r}{\rho} \leqq 1$ *tout le long de* C.

(C) n'étant pas superconvexe, il existe, sur C, des points A tels que la courbe unitaire tangente en A à C et située par rapport à la tangente en A du même côté que C, ait avec C des points communs distincts de A.

Désignons par A′ le point diamétralement opposé au point A sur C [les tangentes T et T′ en A et A′ à C sont parallèles]. Le contact de C et U en A, donne lieu à l'une des trois dispositions suivantes, du voisinage de A sur U par rapport à C :

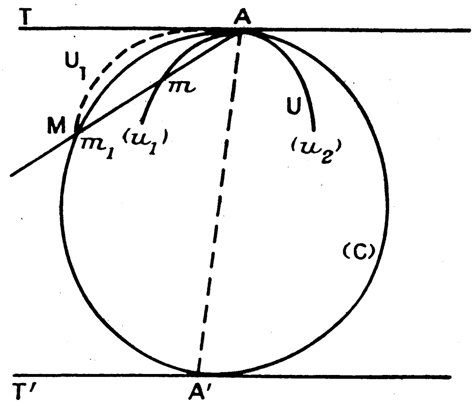
*a.* Au voisinage de A, U est intérieure à C (*fig.* 1).

*b.* U traverse C en A, de sorte que le voisinage de A sur C est constitué par deux arcs, l'un intérieur, l'autre extérieur à C (*fig.* 2).

*c*. Au voisinage de A, U est extérieure à C (*fig.* 3).

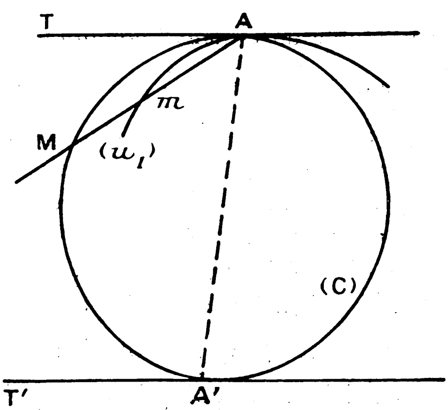
Dans les cas $a$, $b$, soit $(u_1)$ l'un des deux arcs de U constituant

Fig. 1.




le voisinage de A, situé à l'intérieur de C. AT étant la demi-tangente à C située par rapport à la droite AA′ du même côté que $(u_1)$,

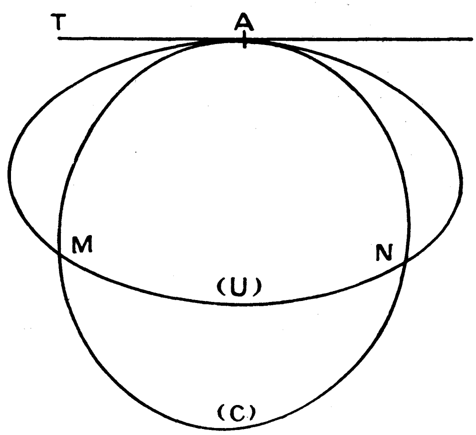
Fig. 2.




il existe dans l'angle $\widehat{TAA'}$, une infinité de demi-droites issues de A et coupant C et $(u_1)$ en des points M et $m$ tels que les deux arcs $\widehat{Am}$ et $\widehat{AM}$ (tangents en A) aient des déflexions inférieures à $\pi$; soit $AmM$ l'une de ces demi-droites.

Soumettons U à l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AM}{Am}$ $(> 1)$. Cette opération conserve les directions des tangentes aux différents points de U, et, en chaque point de la courbe transformée,

Fig. 3.




le rayon de courbure est plus grand que celui de U au point correspondant.

Soit $U_1$ l'homothétique de U dans l'homothétie précédente, et $\widehat{Am_1}$ l'homothétique de l'arc $\widehat{Am}$ ($m_1$ est en $m$). Les deux arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{Am_1}$ de C et $U_1$ ont les mêmes extrémités, ils sont tangents en une extrémité (A), et leurs déflexions sont inférieures à $\pi$. Il existe donc sur C, d'après le théorème de M. Segre, des points où le rayon de courbure $r$ est supérieur à celui de $U_1$ au point correspondant, et *a fortiori* supérieur au rayon de courbure $\rho$ de U au point correspondant, conformément au résultat annoncé.

L'inégalité $\frac{r}{\rho} \leqq 1$ ne peut donc pas avoir lieu tout le long de C.

Dans le cas $c$, en dehors du point A et des points de contact éventuels autres que A, U coupe C en un nombre pair de points, qui disparaissent par couples en donnant lieu à des contacts (distincts du contact en A) entre U et C, lorsqu'on soumet U à une homothétie variable de centre A et dont le rapport croît à partir de 1.

Soit M l'un des points de contact ainsi obtenus, $U_1$ la courbe homothétique de U qui le fournit. C et $U_1$ sont bitangentes en A et M; le théorème de M. Segre s'applique à l'un (au moins) des couples d'arcs de C et $U_1$ situés d'un même côté de AM; il y a donc sur $U_1$ (et *a fortiori* sur U), des points en lesquels le rayon de courbure est *inférieur* au rayon de courbure au point correspondant de C; l'inégalité $\frac{r}{\rho} \leqq 1$ tout le long de C est donc impossible.

*Remarque.* — Il résulte de la démonstration précédente que la courbe unitaire d'appui U *ne peut jamais être bitangente à* C. Elle peut cependant avoir avec C un arc commun (au plus); dans ce cas, l'impossibilité de l'inégalité $\frac{r}{\rho} \leqq 1$ s'établit exactement comme dans le cas du simple contact : il suffit de faire jouer le rôle du point A à un point quelconque de l'arc commun.

$\frac{r}{\rho} \leqq 1$ *est donc la condition nécessaire et suffisante pour que* C *soit superconvexe.*

**3. Séries linéaires de figures superconvexes; comparaison des superconvexités.** — Pour donner une première application du critérium de superconvexité établi au numéro précédent, nous allons montrer comment il permet d'étendre aux figures superconvexes du plan la notion de série linéaire.

Soient $(C_1)$ et $(C_2)$ deux figures convexes planes, limitées par les courbes fermées régulières $C_1$ et $C_2$. $T_1$ et $T_2$ étant deux tangentes parallèles et également situées à $C_1$ et $C_2$ touchant $C_1$ et $C_2$ en $M_1$ et $M_2$, envisageons la droite T, parallèle à $T_1$ et $T_2$, située entre $T_1$ et $T_2$, et dont le rapport des distances à $T_1$ et $T_2$ est un nombre fixe $\lambda$. Lorsque $T_1$ et $T_2$ varient, T enveloppe une courbe fermée régulière C limitant une figure convexe (C). T touche C en un point M, et est située par rapport à (C) comme $T_1$ et $T_2$ par rapport à $(C_1)$ et $(C_2)$. L'ensemble des figures (C) correspondant aux différentes valeurs de $\lambda$ constitue *la série linéaire de figures convexes déterminée par* $(C_1)$ *et* $(C_2)$.

Il est facile de voir que si $(C_1)$ et $C_2)$ sont, non seulement convexes, mais superconvexes relativement à une courbe unitaire déterminée U, toutes les figures de la série linéaire précédemment définie sont superconvexes par rapport à U.

$r_1$, $r_2$, $r$ étant les rayons de courbure de $C_1$, $C_2$, C aux points correspondants $M_1$, $M_2$, M, désignons par $\rho$ le rayon de courbure de U au point $\mu$ où la tangente est parallèle à $T_1$, $T_2$, T. On a pour tout système de points homologues

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda}, \tag{2}$$

et l'on sait que

$$r_1 \leqq \rho, \qquad r_2 \leqq \rho.$$

Si l'on tient compte des deux inégalités précédentes dans l'égalité (2), on voit que

$$r \leqq \rho.$$

Cette dernière inégalité prouve que C est superconvexe. Ainsi :

*Si deux figures sont superconvexes, il en est de même de toutes les figures de la série linéaire qu'elles déterminent.*

Si l'on adopte le critérium général de superconvexité que M. A. E. Mayer a donné pour les ensembles plans (1), on peut étendre le résultat précédent aux séries linéaires définies par deux figures dont les frontières ne possèdent, ni tangente continue ni courbure au sens ordinaire.

**Courbes unitaires rendant superconvexe une figure donnée.** — Une figure convexe (C) à frontière régulière C étant donnée, les courbes unitaires régulières par rapport auxquelles (C) est superconvexe sont les courbes centrées, admettant en chaque point M un rayon de courbure supérieur ou égal aux rayons de courbure de C aux points où les tangentes sont parallèles à la tangente en M.

Si R est le rayon de courbure maxima de C, tous les cercles de rayon supérieur ou égal à R rendent évidemment C superconvexe.

Une autre courbe unitaire simple assurant la superconvexité de (C) est la frontière D de son domaine vectoriel (2). Si $\rho$ est le

---

(1) A. E. Mayer, *loc. cit.*, p. 526.

(2) *Voir par exemple*, P. Vincensini, *Sur les domaines vectoriels des corps convexes* (*Journ. de Math. pures et appliquées*, t. 15, 1936).

rayon de courbure en un point quelconque M de D, et si $r$ et $r'$ sont les rayons de courbure aux deux points de C où les tangentes sont parallèles à la tangente en M à D, on sait que l'on a

$$\rho = r + r',$$

d'où l'inégalité

$$\frac{r}{\rho} \leqq 1$$

qui assure la superconvexité.

D'une façon générale, si l'on remplace la courbe unitaire U par une autre courbe centrée U′ superconvexe par rapport à U, toute figure superconvexe par rapport à U l'est aussi par rapport à U′.

Ainsi, par exemple, si (C) est superconvexe par rapport à U, elle l'est aussi par rapport à toutes les courbes homothétiques de U dans des homothéties de rapport $\lambda > 1$.

Lorsque $\lambda$ croît, on peut dire que la superconvexité de (C) s'atténue, jusqu'à disparaître complètement pour se réduire à la convexité ordinaire lorsque $\lambda$ est infini.

Ces remarques nous suggèrent la définition suivante :

Étant données deux courbes unitaires U et U′, si U′ est la frontière d'une figure superconvexe par rapport à U, la superconvexité que U définit dans le plan est *plus forte* que celle définie par U′.

Si l'une des deux courbes U et U′ n'est pas la frontière d'une figure superconvexe par rapport à l'autre, on ne voit pas de moyen logique pour comparer les superconvexités définies par ces deux courbes.

La définition précédente pose le problème de la recherche de la superconvexité maxima dont est susceptible une figure convexe donnée. Avant d'aborder ce problème, nous ferons les remarques suivantes :

Alors que la qualité de convexité d'une figure est une propriété intrinsèque de la figure (indépendante de la position que la figure occupe dans le plan), la qualité de superconvexité est généralement liée à l'orientation de la figure dans le plan.

La courbe unitaire U étant choisie, envisageons l'ensemble des figures superconvexes du plan. Chacune de ces figures reste superconvexe si on la soumet à une translation, mais cesse en général de l'être si on lui fait subir une rotation.

Seules, les figures de l'ensemble envisagé, dont le rayon de courbure maximum de la courbe frontière est inférieur ou égal au rayon de courbure minimum de U, restent superconvexes après un déplacement arbitraire. Ces figures sont celles qui peuvent *rouler librement* à l'intérieur de U, la position initiale étant quelconque.

Le seul cas où la qualité de superconvexité d'une figure est une propriété intrinsèque de la figure, est celui où la courbe unitaire U est un cercle. Ce cas est celui où la géométrie Minkowskienne définie par U dans le plan, se réduit à la géométrie euclidienne ordinaire.

**4. La superconvexité maxima.** — Le fait que nous n'avons pas pu trouver de moyen logique pour comparer, *dans tous les cas*, les superconvexités d'une même figure (C) par rapport à deux courbes unitaires différentes, n'exclut pas la possibilité de définir pour (C) une *superconvexité maxima.*

Considérons l'ensemble ($\mathcal{E}$) des courbes unitaires par rapport auxquelles (C) est superconvexe. Deux éléments arbitraires de ($\mathcal{E}$) ne sont généralement pas tels que l'un soit superconvexe par rapport à l'autre, mais *il existe dans* ($\mathcal{E}$) *une courbe* U *par rapport à laquelle tous les autres éléments de* ($\mathcal{E}$) *sont superconvexes.*

Nous dirons que cette courbe, dont nous allons donner la construction géométrique, est celle qui définit la superconvexité maxima pour (C); ou encore, que c'est la courbe unitaire minima rendant (C) superconvexe.

La détermination de U repose sur l'étude du rapport $\frac{r}{r_1}$ des rayons de courbure de la frontière C de (C) en deux points opposés A et $A_1$ [points de contact de deux tangentes parallèles].

Pour les courbes que nous envisageons, le rapport $\frac{r}{r_1}$ est une fonction continue de l'angle que font les tangentes en A et $A_1$ avec une direction fixe.

On sait qu'il existe au moins trois couples de points opposés sur C pour chacun desquels le rapport précédent est égal à 1 [nous excluons le cas où C serait centrée; la courbe unitaire minima est alors C elle-même]. D'une façon générale, décrivons C dans un sens déterminé et désignons par $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2p}$ ($p$ étant un nombre impair) les points consécutifs en lesquels le rapport $\frac{r}{r_1}$ traverse la valeur *un*, soit en croissant, soit en décroissant.

Supposons par exemple que l'on ait $\frac{r}{r_1} \geqq 1$ sur l'arc $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ ; on aura alors $\frac{r}{r_1} \geqq 1$ sur les arcs

$$\overset{\frown}{A_1 A_2},\quad \overset{\frown}{A_3 A_4},\quad \ldots,\quad \overset{\frown}{A_{2p-1} A_{2p}}$$

que nous dirons de rangs impairs, et $\frac{r}{r_1} \leqq 1$ sur les arcs restants (de rangs pairs).

Appelons *arcs opposés* deux arcs dont les rangs diffèrent de $p$, et envisageons la suite des couples d'arcs opposés :

$$\left[\overset{\frown}{A_1 A_2},\ \overset{\frown}{A_{p+1} A_{p+2}}\right],\quad \left[\overset{\frown}{A_2 A_3},\ \overset{\frown}{A_{p+2} A_{p+3}}\right],\quad \ldots,\quad \left[\overset{\frown}{A_{2p} A_1},\ \overset{\frown}{A_p A_{p+1}}.\right]$$

Une courbe unitaire $\mathfrak{U}$ quelconque rendant (C) superconvexe, doit satisfaire à la condition nécessaire et suffisante suivante :

Établissons entre $\mathfrak{U}$ et C une correspondance ponctuelle dans laquelle les tangentes aux points correspondants sont parallèles et également situées. Soit $a_i$ le point de $\mathfrak{U}$ correspondant au point $A_i$ de C ; en chaque point de l'un des arcs en lesquels les points $a_i$ partagent $\mathfrak{U}$ (et de l'arc opposé), le rayon de courbure de $\mathfrak{U}$ est supérieur ou égal au rayon de courbure de C au point correspondant. D'après ce qui précède, pour que la condition ci-dessus soit satisfaite tout le long de C et $\mathfrak{U}$, *il faut et il suffit qu'elle le soit le long des arcs correspondants de rangs impairs sur les deux courbes.*

Si, parmi les courbes $\mathfrak{U}$, il en existe une U pour laquelle, le rayon de courbure en un couple quelconque de points opposés est *égal* au rayon de courbure correspondant sur celui des deux arcs correspondants de C dont le rang est impair, toutes les $\mathfrak{U}$ sont superconvexes par rapport à U, et U réalise pour (C) la superconvexité maxima.

La construction de U est aisée. Dans la suite des arcs $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ $\overset{\frown}{A_2 A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_{2p} A_1}$ en lesquels a été partagée C, remplaçons chaque arc de rang pair par l'arc opposé ; nous obtenons la nouvelle suite de $2p$ arcs

$$\overset{\frown}{A_1 A_2},\quad \overset{\frown}{A_{p+2} A_{p+3}},\quad \ldots\quad \overset{\frown}{A_{2p-1} A_{2p}},\quad \overset{\frown}{A_p A_{p+1}},$$

dans laquelle deux arcs dont les rangs diffèrent de $p$ sont égaux.

Laissant alors l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ en place, raccordons chaque arc de cette nouvelle suite au précédent, de façon que l'origine de chaque arc coïncide avec l'extrémité du précédent et que deux arcs contigus soient situés d'un même côté par rapport à la tangente au point de raccord.

Nous obtenons ainsi une courbe *régulière fermée et centrée* U. U est la courbe unitaire réalisant pour (C) la superconvexité maxima.