BULLETIN DE LA S. M. F.

C. DE POLIGNAC

Recherches sur la divisibilité du nombre $\frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ par les puissances de la factorielle $1.2\ldots n$

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 5-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__5_0>

RECHERCHES SUR LA DIVISIBILITÉ DU NOMBRE $\frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ PAR LES PUISSANCES DE LA FACTORIELLE $1.2\ldots n$;

Par M. C. de Polignac.

§ 1.

Avant d'entrer en matières, rappelons quelques résultats bien connus.

Désignant par $\left[\frac{a}{b}\right]$ le quotient entier de la division de a par b, notation usitée par Lejeune-Dirichlet, et appelant e l'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le produit $1.2.3\ldots.x$, en sorte que ce produit est supposé divisible par p^e, mais non par p^{e+1}, on a la formule classique

$$e=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{x}{p^i}\right].$$

La limite $i=\infty$ est symbolique; elle se justifie en remarquant que, dès que $p^i>x$, on a $\left[\frac{x}{p^i}\right]=0$.

De plus, on a toujours

$$\left[\frac{\left[\frac{x}{a}\right]}{b}\right]=\left[\frac{x}{ab}\right] \quad (^1).$$

Il en résulte

$$\left[\frac{x}{p^2}\right]=\left[\frac{\left[\frac{x}{p}\right]}{p}\right]; \qquad \left[\frac{x}{p^3}\right]=\left[\frac{\left[\frac{x}{p^2}\right]}{p}\right], \quad \ldots.$$

Par suite, si l'on écrit,

$$\begin{aligned}
x &= pq_1+r_1 \quad \left(r_1<p, \quad q_1=\left[\frac{x}{p}\right]\right),\\
q_1 &= pq_2+r_2 \quad \left(r_2<p, \quad q_2=\left[\frac{q_1}{p}\right]=\left[\frac{x}{p^2}\right]\right),\\
q_2 &= pq_3+r_3 \quad \left(r_3<p, \quad q_3=\left[\frac{q_2}{p}\right]=\left[\frac{x}{p^3}\right]\right), \quad \ldots,
\end{aligned}$$

---

(1) *Voir*, entre autres, Lejeune-Dirichlet, *Zahlentheorie*, § 15, édition 1863.

on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{x}{p^i}\right] = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots.$$

Cela posé, je commencerai par démontrer trois propositions :

Soit x un nombre entier écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p, en sorte que

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n+1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

avec $a < p$ à un rang quelconque.

Désignons par $\sum x$ la somme des chiffres de x :

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Proposition 1. — L'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le produit $1.2.3\ldots x$ est $\dfrac{x - \sum x}{p - 1}$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il suffira d'établir l'égalité

$$\frac{x - \sum x}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{x}{p^i}\right].$$

Conservant les notations adoptées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
& q_1 &&= a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 &&= \left[\frac{x}{p}\right],\\
\left[\frac{q_1}{p}\right] &= q_2 &&= a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \ldots + a_3 p + a_2 &&= \left[\frac{x}{p^2}\right],\\
\left[\frac{q_2}{p}\right] &= q_3 &&= a_n p^{n-3} + a_{n-1} p^{n-4} + \ldots + a_3 &&= \left[\frac{x}{p^3}\right],\\
& \ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
\left[\frac{q_{n-2}}{p}\right] &= q_{n-1} &&= a_n p + a_{n-1} &&= \left[\frac{x}{p^{n-1}}\right],\\
\left[\frac{q_{n-1}}{p}\right] &= q_n &&= a_n &&= \left[\frac{x}{p^n}\right],\\
\left[\frac{q_n}{p}\right] &= q_{n+1} &&= 0 &&= \left[\frac{x}{p^{n+1}}\right],\\
& \ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&
\end{aligned}$$

Chaque colonne de ce Tableau se compose de termes en progression géométrique. Faisant donc la sommation par colonnes et introduisant pour la symétrie le terme nul $\frac{a_0 - a_0}{p - 1}$, il vient

$$\frac{a_n(p^n - 1) + a_{n-1}(p^{n-1} - 1) + \ldots + a_3(p^3 - 1) + a_2(p^2 - 1) + a_1(p - 1) + a_0 - a_0}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i}\right],$$

c'est-à-dire, d'après nos notations,

$$\frac{x - \sum x}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i}\right]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Proposition 2. — Soit n un second nombre entier écrit dans le système numérique de base p ; faisant l'addition $x + n$, on aura

$$\sum(x + n) = \sum x + \sum n - k(p - 1),$$

où k désigne le nombre total d'unités que, dans l'addition, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration.

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \qquad a < p,$$
$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots \qquad b < p.$$

L'addition, membre à membre, donne

$$\begin{array}{r|c|r|l} x + n = a_0 + a_1 & p + a_2 & p^2 + \ldots + a_m & p^m, \\ + b_0 + b_1 & + b_2 & + b_m & \end{array}$$

expression dans laquelle il faut ramener dans chaque colonne la somme des deux chiffres à un nombre inférieur à p. Ces réductions faites, on obtiendra

$$x + n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots \qquad (c_i < p).$$

Comparons ces deux expressions.

Comme dans la première, chacun des deux chiffres a_i, b_i d'une colonne quelconque est moindre que p, leur somme est moindre que $2p$. On a même partout

$$a_i + b_i + 1 < 2p,$$

puisque le maximum est $p - 1 + p - 1 + 1 = 2p - 1$. D'après cette remarque, on peut composer de proche en proche le Tableau suivant :

$$\left.\begin{array}{l}
a_0 + b_0 = k_0\, p + c_0 \\
a_1 + b_1 + k_0 = k_1\, p + c_1 \\
a_2 + b_2 + k_1 = k_2\, p + c_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_m + b_m + k_{m-1} = k_m\, p + c_m \\
\qquad\quad k_m = c_{m+1} = 0 \text{ ou } 1
\end{array}\right\} c_i < p \quad (k_i = 0 \text{ ou } 1),$$

par suite

$$\begin{gathered}
a_0 + a_1 + \ldots + a_m + b_0 + b_1 + \ldots + b_m + k_0 + k_1 + \ldots + k_m \\
= (k_0 + k_1 + \ldots + k_m)p + c_0 + c_1 + \ldots + c_m + c_{m+1}.
\end{gathered}$$

Or, comme chacun des nombres k_0, k_1, ..., k_m est égal à zéro ou à un, leur somme est égale au nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante, soit k. D'autre part, on a par définition

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m &= \sum x, \\
b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_m &= \sum n, \\
c_6 + c_1 + c_2 + \ldots + c_m + c_{m+1} &= \sum (x + n).
\end{aligned}$$

Il en résulte donc bien

$$\sum (x + n) = \sum x + \sum n - k((p - 1) \text{ [1]}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On trouverait de même

$$\sum (x - n) = \sum x - \sum n + k(p - 1),$$

k étant ici le nombre d'unités empruntées au chiffre d'une

---

[1] Arithmétiquement, l'opération s'indiquerait ainsi :

$$\begin{array}{llllllll}
\ldots & a_i & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_i < p, \\
\ldots & b_i & \ldots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_i < p, \\
\ldots & c_i & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_i < p.
\end{array}$$

Dans chaque colonne, l'addition de deux chiffres ne peut surpasser $2p - 2$ (18 dans le système décimal). On ne peut donc jamais reporter plus d'une unité dans la colonne suivante. Le chiffre de cette colonne augmente de 1, celui de la précédente diminue de p à chaque report; d'où la formule.

colonne et reportées dans la précédente suivant les règles de l'arithmétique élémentaire.

On voit d'ailleurs qu'en posant $x + n = m$, d'où $x = m - n$, la formule d'addition devient

$$m \sum = \sum (m - n) + \sum n - k(p - 1),$$

d'où

$$\sum (m - n) = \sum m - \sum n + k(p - 1).$$

Proposition 3. — Faisant le produit nx, on aura

$$\sum nx = \sum n . \sum x - k(p - 1),$$

où k représente encore le nombre d'unités que, dans le produit, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration. — Soient

$$\begin{array}{rll} x = & a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots & a_i < p, \\ n = & b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots & b_i < p, \\ nx = & c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots & b_i < p. \end{array}$$

La multiplication, membre à membre, donne

$$nx = \begin{array}{r|r|l} a_0 b_0 + a_0 b_1 & p + a_0 b_2 & p^2 + \dots, \\ + a_1 b_0 & + a_1 b_1 & \\ & + a_2 b_0 & \end{array}$$

résultat que, pour abréger, nous écrirons

$$nx = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots.$$

Observons que, par définition,

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots = \sum n . \sum x.$$

Si $a_0 b_0 < p$, on a $C_0 = c_0$; mais, en général,

$$C_0 = p k_0 + c_0$$

et l'on reporte k_0 unités à la colonne suivante, et cela quand bien même cette colonne ferait défaut dans le produit membre à membre nx; ce qui arriverait par exemple si l'on avait $a_1 = b_1 = 0$.

On a donc jusqu'ici

$$nx = c_0 + \left.\begin{array}{l} C_1 \\ + k_0 \end{array}\right| p + C_2 p^2 + \ldots .$$

On posera de même

$$C_1 + k_0 = pk_1 + c_1$$

et l'on reportera k_1 unités à la colonne suivante. Observons qu'ici on pourrait avoir $k_1 > p$, ce qui ne change rien à la marche du calcul.

On obtiendra ainsi successivement

$$\begin{array}{ll}
C_0 \qquad = c_0 + k_0 p, & \\
C_1 + k_0 \quad = c_1 + k_1 p, & C_0 + C_1 = c_0 + c_1 + k_0(p-1) + k_1 p, \\
C_2 + k_1 \quad = c_2 + k_2 p, & C_0 + C_1 + C_2 = c_0 + c_1 + c_2 + (k_0 + k_1)(p-1) + k_2 p, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
C_i + k_{i-1} = c_i + k_i p, & C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_i \\
 & \quad = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots \\
 & \qquad + c_i + (k_0 + k_1 + \ldots + k_{i-1})(p-1) + k_i p.
\end{array}$$

Mais, comme le produit est fini, il arrivera un moment où l'on trouvera $k_i = 0$; on aura alors

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_i = c_0 + c_1 + \ldots + c_i + (k_0 + k_1 + \ldots + k_{i-1})(p-1),$$

c'est-à-dire

$$\sum n . \sum x = \sum nx + k(p-1)$$

ou

$$\sum nx = \sum n . \sum x - k(p-1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La Proposition 1 exige que p soit un nombre premier. Dans les deux autres propositions, p peut être quelconque.

§ 2.

Nous allons maintenant faire quelques applications de ces trois propositions.

THÉORÈME. — *x et n étant, comme ci-dessus, écrits dans le* *système de base p nombre premier, si le produit*

$$1.2.3\ldots(n-1)n$$

est divisible par p^α, — α *exposant maximum* —

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$$

sera divisible par $p^{\alpha+k}$; *où k représente le nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans l'addition* $x+n$.

Démonstration. — Par la proposition **1**, on a

$$\alpha=\frac{n-\sum n}{p-1}$$

et, par la même proposition, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

$$1.2\ldots x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$$

est

$$\frac{x+n-\sum(x+n)}{p-1}.$$

De même, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

$$1.2\ldots x$$

est

$$\frac{x-\sum x}{p-1}.$$

Le nombre premier p entrera donc dans le produit

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$$

avec un exposant égal à la différence des deux précédents, soit

$$\frac{x+n-\sum(x+n)-x+\sum x}{p-1}=\frac{n-\sum(x+n)+\sum x}{p-1},$$

D'ailleurs, par la proposition **2**, on a

$$\sum(x+n)=\sum x+\sum n-k(p-1);$$

l'exposant considéré est donc

$$\frac{n-\sum x-\sum n+\sum x}{p-1}+k=\frac{n-\sum n}{p-1}+k=\alpha+k.$$

C. Q. F. D.

En vue d'une application de la proposition 3, partons de l'identité

$$\frac{1.2\ldots N-1.N}{1.2\ldots N-1.N}=1.$$

Posant $N=a_1+a_2$, elle devient, en admettant $a_1<a_2$,

$$\frac{1.2..(a_1+a_2-1)(a_1+a_2)}{1.2\ldots a_1.(a_1+1)(a_1+2)\ldots(a_1+a_2)}=1,$$

et comme, d'après un théorème classique, le produit

$$(a_1+1)(a_1+2)\ldots(a_1+a_2)$$

est divisible par $1.2\ldots a_2$, on a

$$(1)\qquad \frac{1.2.3\ldots(a_1+a_2)}{1.2\ldots a_1.1.2\ldots a_2}=\text{entier.}$$

On trouvera de même généralement avec $N=a_1+a_2+\ldots a_n$

$$(2)\qquad \frac{1.2.3\ldots(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{1.2\ldots a_1.1.2\ldots a_2\ldots1.2\ldots a_n}=\text{entier.}$$

Si l'on pose dans (1) $a_1=x$, $a_2=(n-1)x$, on a $N=nx$ et

$$(3)\qquad \frac{1.2\ldots nx}{1.2\ldots x.1.2\ldots(n-1)x}=\text{entier.}$$

D'autre part si dans (2) on pose $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=x$ on a

$$(4)\qquad \frac{1.2.3\ldots nx}{(1.2.3\ldots x)^n}=\text{entier}\quad(^1),$$

relation qui résulte de (3) *a fortiori*. Pour le faire voir mettons (4)

---

[1] Les expressions (1), (2), (3), (4) sont bien connues mais en vue de ce qui suit il y avait intérêt à montrer qu'elles résultent de l'identité initiale par la suppression de certains facteurs au dénominateur.

sous la forme

$$(5)\qquad \frac{1.2\ldots nx}{1.2\ldots x(1.2\ldots x)^{n-1}} = \text{entier}.$$

Changeant dans (4) n en $n-1$, on obtient

$$\frac{1.2\ldots(n-1)x}{(1.2\ldots x)^{n-1}} = \text{M (nombre entier)}$$

ou

$$1.2\ldots(n-1)x = (1.2\ldots x)^{n-1}.\text{M};$$

remplaçant dans (3) on a

$$\frac{1.2\ldots nx}{1.2\ldots x.(1.2\ldots x)^{n-1}.\text{M}} = \text{entier}.$$

Donc (5) ou (4), ce qui est la même chose, résulte de (3) par la suppression au dénominateur du nombre entier **M**.

L'expression (3) peut se mettre sous la forme plus explicite

$$\frac{1.2\ldots(n-1)x[\overline{n-1}.x+1][\overline{n-1}.x+2]\ldots[\overline{n-1}.x+x-1]nx}{1.2\ldots(n-1)x.1.2\ldots(x-1)x}$$

ou, en réduisant,

$$\frac{[\overline{n-1}.x+1][\overline{n-1}.x+2]\ldots[\overline{n-1}.x+x-1]}{1.2\ldots(x-1)}n.$$

L'expression (3) est donc divisible par n quel que soit x et, en posant

$$q_{n-1} = \frac{[\overline{n-1}.x+1][\overline{n-1}x+2\ldots][\overline{n-1}x+x-1]}{1.2\ldots(x-1)},$$

on trouve

$$\frac{1.2\ldots nx}{1.2\ldots(n-1)x.1.2\ldots x} = nq_{n-1}.$$

Changeant successivement n en $n-1$, $n-2$, ..., il vient

$$\begin{aligned}
1.2.3\ldots\qquad nx &= 1.2\ldots(n-1)x.1.2\ldots x.nq_{n-1},\\
1.2.3\ldots(n-1)x &= 1.2\ldots(n-2)x.1.2\ldots x(n-1)q_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
1.2.3\ldots\qquad 3x &= 1.2\ldots 2x.1.2\ldots x.3q_2,\\
1.2.3\ldots\qquad 2x &= 1.2\ldots x.1.2\ldots x.2q_1,
\end{aligned}$$

d'où par multiplication

$$1.2\ldots nx = (1.2\ldots x)^n.2.3\ldots n.q_1q_2\ldots q_{n-2}q_{n-1}$$

ou

$$(5a) \qquad \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n} = 1.2.3\ldots n.q_1 q_2 \ldots q_{n-2} q_{n-1}.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 19 décembre 1881, M. Mathieu Weill a démontré par un procédé d'analyse combinatoire la divisibilité du nombre $\frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ par la factorielle $1.2\ldots n$. L'équation ($5a$) implique ce théorème et de plus fait connaître explicitement le résultat de la division. On voit que le théorème en question, tout comme ceux qu'expriment les égalités (1), (2), (3), (4), résulte de l'identité initiale avec $N = nx$, par la suppression de différents facteurs au dénominateur. Ils se trouvent restitués dans l'équation ($5a$) qui, en y remplaçant les quantités q_1, $q_2, \ldots$, par leurs valeurs, reproduira l'identité initiale.

On peut pousser plus loin cette investigation et montrer que l'entier

$$E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$$

est en général divisible par une puissance de la factorielle $1.2\ldots n$ supérieure à l'unité, soit $(1.2\ldots n)^h$ avec $h > 1$. La proposition 3 trouvera ici son application.

Soit p un nombre premier non supérieur au plus grand des deux nombres x et n; p^ε la plus grande puissance de p qui divise E. Évaluons d'abord ε.

Par la proposition 1, p entre dans le numérateur de E avec un exposant

$$\varepsilon_1 = \frac{nx - \sum nx}{p-1},$$

et dans la factorielle $1.2\ldots x$ avec un exposant

$$\varepsilon_2 = \frac{x - \sum x}{p-1},$$

par suite p entre dans le dénominateur de E avec l'exposant $n\varepsilon_2$ et l'on a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varepsilon = \frac{n\sum x - \sum nx}{p-1}.$$

D'ailleurs par la proposition 3

$$\sum nx = \sum n \sum x - k(p-1).$$

Par conséquent

$$\varepsilon = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k, \tag{6}$$

telle est la valeur exacte de l'exposant cherché, ou, comme on dit aussi, le nombre de fois que le nombre premier p entre comme facteur dans l'entier E.

Si l'on se contente d'une valeur approchée on peut écrire

$$\varepsilon \geqq \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x.$$

On retrouve ainsi une formule approximative déjà obtenue par M. Désiré André (¹).

Cherchons maintenant avec quel exposant ε', p entre dans l'expression

$$E' = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n 1.2\ldots n}.$$

Par la proposition 1, p entre dans $1.2\ldots n$ avec un exposant

$$\varepsilon_3 = \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Conservant les notations précédentes on aura donc

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

et, comme nous avons trouvé

$$\varepsilon_1 - n\varepsilon_2 = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k,$$

(¹) Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 13 février 1882, M. Désiré André a donné ce résultat sous la forme $z \geqq (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) P(n)$ où z désigne l'exposant ε, $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \sum x$ et où $P(n)$ représente le nombre de fois que p, nombre premier, entre comme facteur dans $1.2\ldots n$, c'est-à-dire $\frac{n - \sum n}{p-1}$ d'après la proposition 1.

il vient

$$\varepsilon' = \frac{n - \sum n}{p - 1}\left(\sum x - 1\right) + k.$$

Cette valeur ne doit jamais être négative puisque nous avons trouvé plus haut que E′ est un nombre entier; et en effet il résulte de nos notations que l'on a toujours

$$\sum x \geqq 1, \qquad k \geqq 0.$$

Par une généralisation immédiate, p entrera dans l'expression

$$E'' = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n(1.2\ldots n)^h}$$

avec un exposant

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - h\varepsilon_3,$$

soit

$$(7) \qquad \varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p - 1}\left(\sum x - h\right) + k,$$

et pour que E″ soit un nombre entier il faut et il suffit que cette expression soit nulle ou positive quel que soit p parmi les nombres premiers non supérieurs au plus grand des deux nombres x et n.

Dans le cas d'un nombre premier p supérieur à la fois à x et à n les développements du Paragraphe 1

$$x = a_0 + a_1 p + \ldots \qquad (a_i < p),$$
$$n = b_0 + b_1 p + \ldots \qquad (b_i < p),$$

se réduisent à leurs premiers termes a_0, b_0. On a

$$\sum x = x; \qquad \sum n = n,$$

et l'expression (7) donne simplement

$$\varepsilon'' = k.$$

Dans ce cas aussi les valeurs ci-dessus trouvées pour les exposants ε_2, ε_3 se réduisent à zéro comme cela devait être, eu égard aux hypothèses $x < p$, $n < p$; par suite l'égalité

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2 - k\varepsilon_0$$

se réduit à

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1,$$

d'où l'on conclut

$$\varepsilon_1 = k.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la formule classique $\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i}\right]$. En effet, dans les notations du Paragraphe 1, la multiplication nx se réduit aussi au seul terme

$$nx = C_0$$

et pour déterminer k on a d'abord (*voir* § 1)

$$C_0 = nx = pk_0 + c_0 \qquad (c_0 < p);$$

d'ailleurs, puisque $x < p$, $n < p$, on a $nx < p^2$; donc $k_0 < p$, par suite $k = k_0 = \left[\frac{nx}{p}\right]$, terme unique auquel dans ce cas se réduit la série $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i}\right]$.

Désignons maintenant par σ le minimum de $\sum x$ pour tous les nombres premiers considérés quand x est mis sous la forme

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \qquad (a_i < p; \qquad p = (2, 3, 5, 7, 11\ldots).$$

Alors pour un nombre premier quelconque de cette suite on aura assurément

$$\sum x \geqq \sigma.$$

Si donc on remplace h par σ dans la valeur de ε'', la nouvelle expression

$$(8) \qquad \frac{n - \sum n}{p - 1} \left[\sum x - \sigma\right] + k$$

ne sera jamais négative et il en résulte, remplaçant h par σ dans E'', que la quantité

$$F = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n (1.2\ldots n)^\sigma} \tag{9}$$

est toujours un nombre entier (¹).

Remarque. — Si $\sum x = 1$ pour un certain nombre premier on a nécessairement $\sigma = 1$. Écartant le cas illusoire $x = 1$ cette circonstance ne peut se présenter que si $x = p^i$. Alors l'expression (8) s'évanouit. En effet, le premier terme s'annule en vertu de l'hypothèse $\sum x = 1 = \sigma$. Quant à k, remarquons qu'en mettant n sous la forme

$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots$$

le produit nx s'effectuera par la simple addition de i à chacun des exposants de p dans l'expression de n. On n'aura donc rien à reporter d'une colonne à la suivante, par suite $k = 0$. Dans ce cas on a simplement

$$F = E' = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n (1.2\ldots n)}.$$

§ 3.

Dans les notations des Paragraphes 1 et 2, un nombre entier quelconque x étant écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p, savoir

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \qquad (a < p),$$

(¹) M. Désire André, *loc. cit.*, pose $Q = \frac{nx!}{(x!)^n}$ et énonce ainsi qu'il suit le théorème qu'implique l'égalité (9):

« S'il est impossible d'exprimer x par une somme de moins de k puissances d'un même nombre premier le quotient Q est divisible par la puissance $k^{\text{ième}}$ de la factorielle n. »

Dans la notation de M. André $x = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \ldots$ doit être considéré comme exprimé par la somme de $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ puissances de p; savoir α puissances égales à zéro, β puissances égales à 1, γ puissances égales à 2, etc. Si x ne peut être exprimé par moins de k puissances on a $k = \text{minimum}\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) = \sigma$ de notre texte. L'égalité (9) correspond donc bien à l'énoncé de M. André; mais dans cet énoncé la signification de la lettre k est toute différente de celle qui est attribuée à la même lettre dans le présent Mémoire.

on a par définition

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots.$$

σ = *le minimum* $\sum x$ *que donnent les diverses expressions de* x *quand* p *parcourt la suite indéfinie des nombres premiers.*

Ce minimum ne peut se rencontrer qu'avec un nombre premier non supérieur à x. Car avec un nombre premier quelconque supérieur à x, l'expression de x se réduit à son premier terme a_0 et donne $\sum x = x$, tandis que, pour tout autre nombre premier non supérieur à x, on a $\sum x < x$. Le nombre x lui-même ne saurait donc être égal à σ.

Nous avons vu également que le nombre entier

$$E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$$

est toujours divisible par $(1.2\ldots n)^\sigma$. Mais la puissance σ est-elle une limite supérieure et sinon, dans quels cas est-il possible de déterminer de combien la puissance limite surpasse σ? C'est ce que nous nous proposons de rechercher.

Reprenons à cet effet l'expression

$$(1) \qquad \varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p - 1}\left(\sum x - h\right) + k \qquad [\S\ 2;\ (7)]$$

qui fait connaître l'exposant ε'' de la puissance du nombre premier p dans le quotient

$$E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n (1.2\ldots n)^h},$$

exposant qui selon la valeur de h pourra être positif, nul ou négatif.

Remplaçant, dans (1), h par $\sigma + \mu$, où μ représente un nombre entier positif quelconque, il vient

$$\varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p - 1}\left(\sum x - \sigma - \mu\right) + k,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2)\qquad \varepsilon'' = \frac{n - \sum n}{p - 1}\left(\sum x - \sigma\right) + k - \mu\,\frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Cette formule est exacte quels que soient x et n et jusqu'ici nous n'avons rien stipulé sur les grandeurs relatives de ces deux nombres. Or, pour déterminer σ, nous pouvons nous borner, ainsi qu'il vient d'être dit, à faire varier le nombre premier p sans dépasser x. D'autre part, lorsque $p > n$, on a $\sum n = n$ et la formule (2) se réduit à $\varepsilon'' = k$. Si l'on suppose $x > n$, alors pour tout nombre premier compris entre n et x cette formule est indépendante de μ et par conséquent illusoire en ce qui concerne l'examen de cette quantité. Nous introduirons donc la restriction suivante :

Convention restrictive : x est au plus égal à n.

D'après la signification de ε'', tant qu'en donnant à μ des valeurs croissantes l'expression (2) ne sera pas négative le nombre E sera divisible par $p^{\sigma+\mu}$; il ne le sera plus à partir du moment où ε'' deviendra négatif.

Or le premier terme de ε'' dans (2) étant essentiellement positif (ou nul) quel que soit p, les valeurs de μ susceptibles de rendre ε'' négatif ne se rencontrent que parmi celles pour lesquelles

$$k < \mu\,\frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et, si p est un des nombres premiers qui donnent $\sum x = \sigma$, on a

$$\varepsilon'' = k - \mu\,\frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Dans ce cas, si l'on trouve

$$(\mu - 1)\,\frac{n - \sum n}{p - 1} \overset{=}{<} k < \mu\,\frac{n - \sum n}{p - 1},$$

le nombre

$$E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$$

sera divisible par $p^{\sigma+\mu-1}$ et ne le sera pas par $p^{\sigma+\mu}$, et cela suffit pour que E soit divisible tout au plus par la puissance $\sigma + \mu - 1$ de la factorielle $1.2\ldots n$.

Nous sommes donc amenés en définitive à comparer les valeurs de k et de $\frac{n - \sum n}{p-1}$. Cette comparaison se fera aisément dans chaque cas particulier par un calcul direct, mais il n'existe aucune formule susceptible de rattacher à la variation de x et de n ni la variation de k, ni celle des nombres premiers pour lesquels $\sum x$ est minimum. Il faut donc se créer une méthode indirecte d'investigation ; celle dont nous ferons usage repose sur la remarque suivante :

Remarque. — Lorsque n augmente, p restant constant, la quantité $\frac{n - \sum n}{p-1}$ ne peut pas diminuer.

La démonstration directe serait facile, mais elle n'est pas nécessaire. Puisque $\frac{n - \sum n}{p-1}$ représente par la proposition I (§ 1) l'exposant de la plus grande puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans la factorielle $1.2\ldots n$, il est clair que, si l'on fait croître n sans faire varier p, cet exposant ne peut décroître.

Comme conséquence immédiate, quand n croît, p restant constant, $n - \sum n$ ne peut décroître.

Voici comment cette remarque peut être utilisée :

Exposé de la méthode d'investigation.

Soient x et n deux nombres donnés respectivement compris entre des limites pour le moment indéterminées

$$x_0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} X,$$
$$n_0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} N.$$

Pour satisfaire à la convention générale $x \leqq n$, nous supposerons $n_0 \geqq X$.

Soit encore p un nombre premier quelconque non supérieur à n.

D'après la remarque la quantité $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ ne pourra jamais décroître quand n croît jusqu'à N, donc $\frac{N - \sum N}{p - 1}$ sera un maximum.

Imaginons qu'on puisse déterminer X et N de façon que, dans le produit nx, variable dans les limites fixées, la quantité k qui correspond à NX soit un maximum. Le désignant par K nous poserons

$$(3) \qquad K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1};$$

comparant, à dessein, K non avec la valeur maxima correspondante $\frac{N - \sum N}{p - 1}$ mais avec la quantité minima $\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$. Supposons qu'on ait déterminé le minimum de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite, on aura *a fortiori*

$$K < \mu \frac{N - \sum N}{p - 1}$$

et il en résulte que pour cette même valeur de μ on aura partout dans le produit variable nx

$$k < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque d'une part k est égal ou inférieur à K et que d'autre part $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ est égal ou supérieur à $\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$.

Le nombre p désigne ici un nombre premier quelconque non supérieur à n. Si nous le prenons inférieur à x et si pour ce nombre premier on a $\sum x = \sigma$ on pourra conclure, ainsi qu'il a été dit plus haut, que le nombre $E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ n'est pas divisible par

$(1.2...n)^{\sigma+\mu}$. Mais si avec p on n'a point $\sum x = \sigma$ l'inégalité $k < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$ cesse d'être un criterium de non-divisibilité. C'est pourquoi il faut concevoir théoriquement le procédé que nous venons de décrire appliqué successivement à tous les nombres premiers non supérieurs à x. Soit p' l'un d'entre eux différent de p. Partant toujours des deux nombres donnés x et n on déterminera de nouvelles limites x'_0 X'; n'_0 N' remplissant les conditions précédemment imposées à x_0 X et n_0 N et l'on en inférera un nouveau nombre μ' déterminé par l'inégalité

$$K' < \mu' \frac{n'_0 - \sum n'_0}{p' - 1}.$$

En continuant ainsi on obtiendra une série de nombres

$$\mu, \quad \mu', \quad \mu'', \quad \ldots$$

Soit M le plus grand nombre qui se rencontre, une ou plusieurs fois, dans cette suite. On aura l'inégalité

$$k < \mathrm{M} \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

dans laquelle k se rapporte au produit nx des deux nombres donnés et p à tous les nombres premiers non supérieurs à x; par conséquent aussi à ceux pour lesquels $\sum x = \sigma$. Pour ceux-ci l'inégalité précédente est, exactement ou *a fortiori*, un criterium de non-divisibilité; on pourra donc conclure que le nombre E n'est pas divisible par la puissance $\sigma + \mathrm{M}$ de la factorielle $1.2...n$.

Telle est la conception théorique de la méthode d'investigation; il s'agit maintenant de montrer qu'elle est réalisable.

Déterminons d'abord les limites supérieures X et N.

x étant un nombre entier quelconque, p un nombre premier non supérieur à x, il existera toujours un nombre entier i tel que

$$p^{i-1} \leqq x < p^i,$$

et l'expression générale de x sera

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_{i-1} p^{i-1},$$

où a_{i-1} n'est pas nul et où le minimum de i est 2, eu égard à la condition $p \leqq x$.

Dans cette formule, le minimum de x correspond à

$$0 = a_0 = a_1 = \ldots = a_{i-2}, \qquad a_{i-1} = 1.$$

On a donc

$$\text{minimum}\, x = p^{i-1}.$$

Le maximum s'obtient en donnant à chaque coefficient sa valeur maximum $p - 1$, d'où

$$\text{maximum}\, x = p - 1 + \overline{p - 1}\,.p + \ldots + \overline{p - 1}\,.p^{i-1} = p^i - 1.$$

Prenons maintenant pour n un nombre quelconque au moins égal au maximum de x, soit

$$n = b_0 + b_1 p + \ldots + b_{i-1} p^{i-1} + b_i p^i + \ldots;$$

alors, dans le produit nx où n est fixe et x variable dans ses limites, on aura un maximum pour k en prenant x maximum. En effet, k étant par définition le nombre total d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans la multiplication membre à membre des deux expressions

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + \ldots \qquad (a_0,\ a_1,\ \ldots \text{ variables}),\\ n &= b_0 + b_1 p + \ldots \qquad (b_0,\ b_1,\ \ldots \text{ constants}), \end{aligned}$$

ce nombre total ne saurait être plus grand que lorsque chaque coefficient a_0, a_1, ... est le plus grand possible, c'est-à-dire égal à $p - 1$, auquel cas x est égal à son maximum $p^i - 1$.

Nous pouvons donc prendre

$$x_0 = p^{i-1}, \qquad X = p^i - 1,$$

et les limites de x se trouvent déterminées.

Passons à la détermination des limites de n et prenons, sauf justification,

$$n_0 = \lambda p^h, \qquad N = (\lambda + 1) p^h - 1 \qquad \text{avec} \qquad h \geqq i,$$

où λ peut varier de 1 à $p - 1$.

Il s'agit de justifier le choix de N, eu égard à la règle donnée dans la méthode d'investigation.

On peut écrire

$$\mathrm{N} = p^h - 1 + \lambda p^h,$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathrm{N} = p - 1 + \overline{p-1}\,.p + \overline{p-1}\,.p^2 + \ldots + \overline{p-1}\,.p^{h-1} + \lambda p^h,$$

formule exacte puisque $\lambda < p$.

Pour un autre nombre n quelconque de n_0 à N, on aura

$$n = b_0 + b_1 p + \ldots + b_{h-1} p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Mais dans le produit nx, où x est supposé fixe dans ses limites et n variable, la quantité k est maximum quand chaque coefficient de n est le plus grand possible, c'est-à-dire quand $n = \mathrm{N}$.

La limite N est ainsi justifiée et l'on voit que le maximum maximorum de k correspond au produit maximum NX.

D'autre part, n étant donné, il existera pour tout nombre premier p un nombre h tel que

$$p^h \leqq n \leqq p^{h+1} - 1,$$

et, par conséquent aussi, une valeur de λ pour laquelle

$$\lambda p^h \leqq n \leqq (\lambda + 1) p^h - 1 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq p - 1).$$

Si l'on fait $h = i$ et $\lambda = 1$, on a

$$n = |p^i, p^i + 1, \ldots, 2p^i - 1|.$$

Avec $h = i$ et *exceptionnellement* $\lambda = 0$, on a

$$n = p^i - 1;$$

c'est, d'après nos conventions, le minimum absolu de n égal à X maximum de x. Ici $n_0 = n = \mathrm{N}$.

Faisant varier h à partir de i, on peut résumer l'ensemble des valeurs simultanées de x et de n dans le Tableau suivant. Il se compose de *divisions* indiquées par des accolades { et de *subdivisions* indiquées par des barres verticales |. Les divisions correspondent aux valeurs de h, les subdivisions aux valeurs de λ.

$$
\begin{array}{lll}
x = & \{p^{i-1},\ p^{i-1}+1,\ \dots\ p^{i}-1\} & \\
n = & |p^{i}-1| & \{|p^{i}p^{i}+1 \dots 2p^{i}-1| \\
 & & |2p^{i}, 2p^{i}+1, \dots 3p^{i}-1| \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & |(p-1)p^{i}, (p-1)p^{i}+1 \dots p^{i+1}-1|\} \\
 & & \{|p^{i+1},\ p^{i+1}+1\ \dots\ 2p^{i+1}-1| \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & |(p-1)\,p^{i+1}, (p-1)p^{i+1}+1 \dots p^{i+2}-1|\} \\
 & & \{|p^{i+2},\ p^{i+2}+1\ \dots\ 2p^{i+2}-1| \dots\} \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & \{|p^{h}, p^{h}+1\ \dots\ 2p^{h}-1|\ \dots \\
 & & |\lambda p^{h}, \lambda p^{h}+1\ \dots\ (\lambda+1)p^{h}-1| \dots\} \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & (1 \leqq \lambda \leqq p-1).
\end{array}
$$

x étant un nombre donné et p un nombre premier non supérieur à x, l'exposant i sera déterminé, et n, quel qu'il soit, à partir de $p^{i}-1$, tombera forcément dans une des subdivisions de ce Tableau.

En faisant varier p et i le Tableau donne pour x tous les nombres entiers, sauf l'unité, puisque le minimum de i est 2, et, pour n, tous les nombres entiers à partir de $p^{i}-1$.

Pour appliquer la méthode générale, nous aurons à former le produit NX correspondant à la subdivision dans laquelle tombe n et à déterminer μ par la condition

$$
\mathrm{K} < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1},
$$

n_0 étant pris dans la même subdivision.

Nous commencerons par le nombre $n = p^{i}-1$, seul de sa subdivision.

On a ici

$$
\mathrm{X} = n = p^{i}-1 = p-1+\overline{p-1}.p+\overline{p-1}.p^{2}+\ldots+\overline{p-1}.p^{i-1},
$$

$$
\sum n = \sum \mathrm{X} = i(p-1).
$$

Supposant le produit nX effectué, on aura dans les notations du paragraphe 1, toutes réductions faites,

$$nX = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots, \qquad c < p,$$

et comme $n = X = p^i - 1$, on a ici

$$nX = (p^i - 1)^2 = 1 - 2p^i + p^{2i}.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$\begin{aligned} 1 - 2p^i + p^{2i} = 1 + \overline{p-2}.p^i + \overline{p-1}.p^{i+1} \\ + \overline{p-1}.p^{i+2} + \ldots + \overline{p-1}.p^{2i-2} + \overline{p-1}.p^{2i-1}; \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = c_2 = \ldots = c_{i-1} = 0,$$
$$c_i = p - 2, \qquad c_{i+1} = c_{i+2} = \ldots = c_{2i-1} = p - 1$$

et

$$\sum nX = i(p-1).$$

Nous pouvons maintenant évaluer K par la formule générale

$$\sum nx = \sum n . \sum x - k(p-1) \qquad \text{[Proposition 3, § 1]},$$

qui devient ici

$$\sum nX = \left(\sum n\right)^2 - K(p-1),$$

c'est-à-dire

$$i(p-1) = i^2(p-1)^2 - K(p-1),$$
$$K = i^2(p-1) - i.$$

n se confondant ici avec ses limites n_0, N, nous avons, conformément à la méthode générale, à déterminer le minimum de μ dans l'inégalité

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Or, on a ici

$$\frac{n - \sum n}{p-1} = \frac{p^i - 1 - i(p-1)}{p-1} = \frac{p^i - 1}{p-1} - i = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{i-1} - i,$$

et l'inégalité devient

$$i^2(p-1) - i < \mu(1 + p + p^2 + \ldots + p^{i-1}) - i\mu$$

ou

$$(4) \qquad i^2(p-1)+i(\mu-1) < \mu(1+p+p^2+\ldots+p^{i-1}),$$

que nous indiquerons brièvement ainsi

$$V_1 < V_2.$$

Notre but est de trouver le minimum numérique de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite quel que soit p, nombre premier, et i nombre entier $\geqq 2$.

Or pour $i=2$, $p=2$ l'inégalité devient

$$4+2(\mu-1) < 3\mu; \quad \mu > 2.$$

La limite inférieure cherchée ne peut donc être moindre que 3 et l'inégalité (4) est satisfaite par les valeurs minima $i=2, p=2$ avec $\mu \geqq 3$.

Nous chercherons maintenant à la vérifier avec i et p nombres entiers quelconques, à partir de 2; par implication elle se trouvera vérifiée pour $p =$ nombre premier quelconque.

A cet effet nous remplacerons successivement dans l'inégalité (4) i et p par $i+1$, $p+1$ et nous comparerons dans les deux cas l'accroissement δV_1 du premier membre avec l'accroissement δV_2 du second. Tant que l'accroissement du premier membre sera égal ou inférieur à l'accroissement du second l'inégalité sera encore satisfaite et la condition $\delta V_1 \leqq \delta V_2$ donnera dans chaque cas un minimum pour μ qui pourra être supérieur au minimum 3 déjà trouvé avec les valeurs initiales $i=p=2$. Le maximum minimorum ainsi obtenu sera la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

1° Changement de i en $i+1$ dans (4).

On a

$$\delta V_1 = (2i+1)(p-1)+\mu-1; \qquad \delta V_2 = \mu p^i.$$

La condition $\delta V_1 \leqq \delta V_2$ est

$$(2i+1)(p-1)+\mu-1 \leqq \mu p^i.$$

Elle peut s'écrire

$$(2i+1)(p-1) \leqq \mu(p^i-1)+1,$$

ou

$$2i+1 \leqq \mu\frac{p^i-1}{p-1}+\frac{1}{p-1}$$

et sera satisfaite *a fortiori* si l'on pose

$$2i+1 \leqq \mu\frac{p^i-1}{p-1},$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad 2i+1 \leqq \mu(1+p+p^2+\dots+p^{i-1}).$$

Dans l'examen de cette nouvelle condition et de celles que nous rencontrerons par la suite, nous aurons à opérer identiquement comme avec l'inégalité (4) : chercher d'abord les valeurs initiales minima de i, p, μ qui y satisfont et comparer ensuite les accroissements des deux membres quand i et p augmentent séparément d'une unité.

Or la forme de la condition (5) montre que, si elle est satisfaite par trois valeurs i, p, μ, elle le sera encore par les mêmes valeurs i, μ et toute valeur supérieure de p. Il suffit donc de l'examiner avec $p=2$; elle devient alors

$$2i+1 \leqq \mu(1+2+2^2+\dots+2^{i-1})$$

et pour le minimum $i=2$ on trouve

$$5 \leqq 3\mu; \qquad \mu \geqq 2.$$

Changeons maintenant dans (5) i en $i+1$. On a

Accroissement du 1^{er} membre $= 2$,
Accroissement du 2^e membre $= \mu . 2^i$,

et la condition

$$2 \leqq \mu . 2^i$$

est toujours satisfaite quels que soient μ et i.

La condition $\delta V_1 \leqq \delta V_2$ est donc satisfaite quels que soient i et p avec $\mu \geqq 2$ et *a fortiori* avec $\mu \geqq 3$. On en conclut que l'inégalité (4), satisfaite avec $\mu \geqq 3$, $p=2$, $i=2$, le sera encore avec $\mu \geqq 3$, $p=2$, i quelconque.

2° Changement de p en $p+1$ dans (4). On a ici

$$\delta V_1 = i^2; \qquad \delta V_2 = \mu \left\{ 1 + p + 1 + (p+1)^2 + \ldots + (p+1)^{i-1} \right.$$
$$\left. - (1 + p + p^2 + \ldots + p^{i-1}) \right\}.$$

La condition à satisfaire : $\delta V_1 \overset{=}{<} \delta V_2$ devra être traitée identiquement comme la condition correspondante dans 1° et comme l'inégalité (4). Nous appliquerons le procédé sans répéter les raisonnements.

On voit d'abord que δV_2 croît avec p. Car en groupant les termes deux à deux on a

$$\delta V_2 = \mu \left\{ 1 + (p+1)^2 - p^2 + (p+1)^3 - p^3 + \ldots + (p+1)^{i-1} - p^{i-1} \right\}$$

et la différence des deux termes d'un groupe quelconque

$$(p+1)^m - p^m = 1 + mp + \frac{m.m-1}{1.2} p^2 + \ldots + mp^{m-1}$$

est positive et augmente avec p. Il suffit donc encore d'étudier la condition $\delta V_1 \overset{=}{<} \delta V_2$ avec $p = 2$; elle devient alors

$$i^2 \overset{=}{<} \mu \left(\frac{3^i - 1}{2} - (2^i - 1) \right)$$

ou

$$(6) \qquad i^2 \overset{=}{<} \frac{\mu}{2} (1 + 3^i - 2^{i+1})$$

et pour le minimum $i = 2$ on trouve

$$\mu \overset{=}{>} 4,$$

limite plus élevée que celles obtenues jusqu'ici.

Changeant maintenant i en $i+1$ dans (6) on trouve

Accroissement du 1er membre $= 2i + 1$,

Accroissement du 2e membre $= \frac{\mu}{2} \left\{ 3^{i+1} - 2^{i+2} - (3^i - 2^{i+1}) \right\}$

$$= \frac{\mu}{2} \left\{ 2.3^i - 2^{i+1} \right\} = \mu (3^i - 2^i).$$

La condition

$$2i + 1 \overset{=}{<} \mu (3^i - 2^i)$$

est satisfaite avec $i = 2$, $\mu = 1$; *a fortiori* avec $\mu \overset{=}{>} 4$; elle le sera aussi quel que soit i; car changeant encore i en $i + 1$ on a

Accroissement du 1^{er} membre $= 1$,
Accroissement du 2^e membre $= \mu(3^{i+1} - 2^{i+1} - (3^i - 2^i) = \mu(2.3^i - 2^i)$

et la condition

$$1 \leqq \mu(2.3^i - 2^i)$$

est évidemment toujours satisfaite.

En résumé nous trouvons 4 comme maximum minimorum; telle est donc la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

De l'examen du cas 2° considéré isolément résulte que l'inégalité (4) satisfaite avec $\mu \geqq 4$, $i = 2$, $p = 2$ le sera encore avec $\mu \geqq 4$, $i = 2$, p quelconque.

Associant les résultats de 1° et de 2°, la conclusion finale est la suivante :

L'inégalité (4) est toujours satisfaite avec $\mu = 4$ et i, p nombres entiers quelconques, sauf l'unité.

Elle est donc aussi satisfaite avec p nombre premier quelconque.

D'ailleurs l'inégalité (4) est identique à la condition

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

avec

$$n = p^i - 1,$$

par suite on a

$$K < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et il en résulte, comme dans l'exposé de la méthode, que dans tout produit nx, où

$$n = p^i - 1 \quad \text{et} \quad p^{i-1} \leqq x \leqq p^i - 1,$$

on a

$$k < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque n est constant et $k \leqq K$.

Remarquons enfin que la limite $\mu = 4$ convient à toutes les valeurs de i, le minimum $i = 2$ inclus. Pour des valeurs de i supérieures à 2, la limite s'abaisserait.

Ainsi, en reprenant l'investigation avec $i \geqq 3$, on trouverait, quel que soit p, minimum $\mu = 2$; avec $i \geqq 5$, minimum $\mu = 1$.

Généralisation. — Passons maintenant au cas général

$$n = |\, \lambda p^h, \lambda p^h + 1, \ldots, (\lambda + 1)p^h - 1 \,|,$$
$$X = p^i - 1, \qquad n_0 = \lambda p^h, \qquad N = (\lambda + 1)p^h - 1,$$

et, comme ci-dessus,

$$N = p - 1 + \overline{p - 1}.p + \ldots + \overline{p - 1}.p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Notons

$$\sum X = i(p - 1), \qquad \sum N = h(p - 1) + \lambda,$$
$$\sum n_0 = \lambda, \qquad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = \lambda \frac{p^h - 1}{p - 1}.$$

Formons le produit NX

$$NX = [\lambda + 1)p^h - 1].[p^i - 1] = 1 - p^i - (\lambda + 1)p^h + (\lambda + 1)p^{h+i},$$

et l'on a identiquement

$$NX = 1 + (p - 1)p^i + (p - 1)p^{i+1} + \ldots + (p - 1)p^{h-1} + (p - \lambda - 2)p^h$$
$$+ (p - 1)p^{h+1} + \ldots + (p - 1)p^{h+i-1} + \lambda p^{h+i}.$$

Pour la valeur limite $\lambda = p - 1$, le coefficient de p^h devient égal à -1 et la formule est en défaut. On la corrige immédiatement en écrivant ce terme et le suivant

$$\overline{p - 1}.p^h + \overline{p - 2}.p^{h+1},$$

sans changer les autres termes, sauf le dernier qui devient

$$(p - 1)p^{h+i}.$$

Notons ici

$$\lambda = p - 1, \qquad N = p^{h+1} - 1, \qquad \sum N = (h + 1)(p - 1),$$
$$n_0 = (p - 1)p^h, \qquad \sum n_0 = p - 1, \qquad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = p^h - 1,$$
$$NX = (p^{h+1} - 1)(p^i - 1) = 1 - p^i - p^{h+1} + p^{h+i+1},$$

et l'on a bien

$$\begin{aligned}NX = 1 + (p-1)p^{i} + (p-1)p^{i+1} + \ldots + (p-1)p^{h} + (p-2)p^{h+1}\\ + (p-1)p^{h+2} + \ldots + (p-1)p^{h+i}.\end{aligned}$$

Procédant, nous trouvons

$$\lambda < p - 1, \qquad \sum NX = h(p-1),$$

$$\lambda = p - 1, \qquad \sum NX = (h+1)(p-1).$$

Évaluons maintenant dans les deux cas la quantité K qui correspond au produit NX par la formule

$$\sum NX = \sum N . \sum X - K(p-1).$$

On trouve d'abord

$$\begin{aligned}&\lambda < p - 1,\\ &\qquad h(p-1) = [h(p-1)+\lambda].i(p-1) - K(p-1),\\ &\qquad K = i[h(p-1)+\lambda] - h,\end{aligned}$$

et la condition $K < \mu \dfrac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$ est

$$(7) \qquad i[h(p-1)+\lambda] - h < \mu\lambda \frac{p^{h}-1}{p-1}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}&\lambda = p - 1,\\ &\qquad (h+1)(p-1) = (h+1)(p-1).i(p-1) - K(p-1),\\ &\qquad K = i(h+1)(p-1) - (h+1),\end{aligned}$$

et la condition $K < \mu \dfrac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$ est ici

$$(7^{a}) \qquad i(h+1)(p-1) - (h+1) < \mu(p^{h}-1).$$

Or, en faisant $\lambda = p - 1$ dans l'inégalité (7), on aurait

$$i(h+1)(p-1) - h < \mu(p^{h}-1),$$

et il est clair que si cette dernière inégalité est satisfaite, l'inégalité (7^{a}) le sera *a fortiori*. Il suffit donc d'examiner l'inégalité (7) en y comprenant la valeur limite $\lambda = p - 1$. De la sorte, le cas exceptionnel rentre dans le cas général.

L'inégalité (7) contient deux nouvelles indéterminées h et λ. Montrons d'abord que si elle est satisfaite avec deux valeurs particulières h, λ, elle le sera encore avec toutes valeurs supérieures de ces deux quantités.

Nous procéderons comme avant, changeant successivement h en $h + 1$ et λ en $\lambda + 1$, et comparant les accroissements des deux membres.

Changement de h en h + 1 *dans* (7). — L'inégalité (7) peut s'écrire

$$h[i(p-1)-1] + i\lambda < \mu\lambda \frac{p^h - 1}{p - 1},$$

d'où

$$\text{Accroissement du } 1^{\text{er}} \text{ membre} = i(p-1) - 1,$$

$$\text{»} \quad 2^{\text{e}} \quad \text{»} \quad = \mu\lambda p^h.$$

La condition à remplir est

$$i(p-1) \leqq \mu\lambda p^h + 1,$$

et si elle est satisfaite pour une valeur quelconque de h, elle le sera *a fortiori* pour une valeur plus grande. Il suffit donc de la vérifier pour $h = i$, valeur minima. Elle devient alors

$$i(p-1) \leqq \mu\lambda\, p^i + 1,$$

et comme on a toujours

$$ip \leqq p^i,$$

la condition est, *a fortiori*, toujours satisfaite.

Changement de λ *en* $\lambda + 1$ *dans* (7).

$$\text{Accroissement du } 1^{\text{er}} \text{ membre} = i,$$

$$\text{»} \quad 2^{\text{e}} \quad \text{»} \quad = \mu \frac{p^h - 1}{p - 1}.$$

La condition est

$$i \leqq \mu \frac{p^h - 1}{p - 1}.$$

et il suffit encore d'y remplacer h par i; elle devient alors

$$i \leqq \frac{p^i - 1}{p - 1}.$$

Le premier membre est indépendant de p; le second, qui est égal à $1 + p + p^2 + \ldots + p^{i-1}$, croît avec p; on peut donc y remplacer p par son minimum 2, et il vient finalement

$$i \overset{=}{<} \mu(2^i - 1),$$

condition qui est satisfaite avec $i = 2$, $\mu \overset{=}{>} 1$.

Elle le sera encore avec $i > 2$; car, changeant i en $i + 1$, l'accroissement du premier membre est 1, celui du second est $\mu\, 2^i$, toujours supérieur.

Notre assertion est donc justifiée, et il suffit, pour déterminer μ dans (7), d'y faire $h = i$, $\lambda = 1$.

L'inégalité est alors

$$i[i(p-1)+1] - i < \mu \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

ou

$$(8) \qquad i^2(p-1) < \mu(1 + p + p^2 + \ldots + p^{i-1}).$$

En la comparant avec l'inégalité (4), qui se rapporte au cas particulier $n = X = p^i - 1$, on voit que si (4) est satisfaite, (8) le sera *a fortiori*. Il en sera donc de même de (7). Un nouvel examen est, par suite, inutile, et nous pouvons prendre $\mu = 4$ comme limite inférieure valable dans tous les cas.

Première conclusion. — Quels que soient, dans le Tableau général ci-dessus, x, n, i et p, on trouvera dans le produit nx

$$(9) \qquad k < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

x et n étant donnés, si l'on fait parcourir à p la suite des nombres premiers non supérieurs à x, on obtiendra pour chaque nombre premier un nouveau tableau, et, quelle que soit la subdivision à laquelle n appartienne dans ces différents tableaux, la condition (9) sera toujours satisfaite.

Cela étant, elle subsistera aussi lorsque le nombre premier p sera un de ceux pour lesquels $\sum x$ est minimum. Mais dans ce cas, c'est-à-dire avec $\sum x = 6$, il a été expliqué en détail dans ce Paragraphe, notamment dans l'exposé de la méthode d'investigation, que l'inégalité (9) est un criterium de non-divisibilité du nombre

$$\mathrm{E} = \frac{1 \,.\, 2 \ldots nx}{(1 \,.\, 1 \ldots x)^n}$$

par $(1 \,.\, 2 \ldots n)^{\sigma+4}$ et il en résulte enfin que le nombre E sera divisible tout au plus par la puissance $\sigma + 3$ de la factorielle $1 \,.\, 2 \ldots n$.

Toutefois $\mu = 4$ n'est qu'une première approximation et il est possible d'abaisser cette limite.

Cas dans lesquels $\mu = 1$. Faisant $\mu = 1$ dans l'inégalité (7) qui exprime la condition générale

$$\mathrm{K} < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1},$$

on obtient

$$i[h(p-1)+\lambda] - h < \lambda(1+p+p^2+\ldots+p^{h-1}) \tag{10}$$
$$(h \geqq i;\; 1 \leqq \lambda \leqq p-1).$$

Rappelons que la quantité maxima K correspond ici aux valeurs maxima $\mathrm{X} = p^i - 1$, $\mathrm{N} = (\lambda+1)p^h - 1$ (*voir* généralisation).

Nous avons vu que si cette inégalité est satisfaite pour certaines valeurs i, p, h, λ elle sera satisfaite pour toutes valeurs supérieures de h et de λ, les autres quantités restant constantes.

Introduisant dans l'inégalité l'hypothèse

$$h = i + 1$$

elle devient

$$i[(i+1)(p-1)+\lambda] - (i+1) < \lambda(1+p+\ldots+p^i).$$

Pour les valeurs minima $i = 2 = p$, ce qui implique $\lambda = 1$ il vient

$$5 < 7.$$

L'inégalité est donc satisfaite pour des valeurs quelconques de i, p, λ, avec $h \geqq i + 1$.

Conclusion. — Si l'on a

$$p^{i-1} \leqq x < p^i; \qquad p^{i+1} \leqq n$$

pour tout nombre premier non supérieur à x, σ sera la puissance la plus élevée de la factorielle $1 \,.\, 2 \ldots n$ qui divise le nombre $\frac{1 \,.\, 2 \ldots nx}{(1 \,.\, 2 \ldots x)^n}$.

Dans le tableau des valeurs simultanées de x et de n la conclusion précédente qui résulte de l'hypothèse $h = i + 1$ s'applique à tout nombre n situé dans la troisième division du tableau ou dans une division supérieure. Avec $i = 2$, par exemple, le tableau est

$$\begin{array}{l} \left\{ \overline{p\;p+1\ldots p^2-1} \right\} \\ \left\{ \,|\,p^2\;p^2+1\ldots 2p^2-1\,|\,2p^2\ldots 3p^2-1\,|\,\ldots\,|\,(p-1)p^2\ldots p^3-1\,|\, \right\} \\ \left\{ \overline{|\,p^3\;p^3+1\ldots 2p^3-1\,|\,2p^3\ldots} \right. \end{array}$$

avec x au-dessus de la première ligne et n au-dessus de la troisième.

Examen du cas $h = i$. Le nombre n dans cette hypothèse appartient à la seconde division du Tableau, qui se réduit à

$$\begin{array}{l} \left\{ \overset{x}{\overline{p^{i-1}\;p^{i-1}+1\ldots p^i-1}} \right\} \\ \left\{ \overset{n}{\overline{|\,p^i\ldots 2p^i-1\,|\,2p^i\ldots 3p^i-1\,|\,\ldots\,|\,(p-1)p^i\ldots p^{i+1}-1\,|}} \right\}. \end{array}$$

Pour l'examen de ce cas il faut faire dans (10) $h = i$, d'où

$$(11) \qquad i^2(p-1) + i(\lambda-1) < \lambda(1+p+\ldots+p^{i-1}.$$

Cette inégalité doit être satisfaite avec $\lambda < p$, et son exactitude dépendra des valeurs relatives des indéterminées qui y figurent.

Ci-joint l'énumération de tous les cas possibles. Les valeurs correspondantes de p et de λ sont inscrites en dessous de ces deux quantités et en regard les unes des autres.

	p.	λ.	Inégalité (11).
$i = 2$	2	1	en défaut
	3	1, 2	id.
	$\geqq 5$	$\leqq 3$	id.
		$\geqq 4$	satisfaite
$i = 3$	2	1	en défaut
	3	1	id.
		2	satisfaite
	5	1	en défaut
		$\geqq 2$	satisfaite
	7	$\geqq 1$	id.
$i = 4$	2	1	en défaut
	$\geqq 3$	$\geqq 1$	satisfaite
$i \geqq 5$	$\geqq 2$	$\geqq 1$	d.

Si l'on remplace dans (11) λ par μ, on retombe sur l'inégalité (4), qui exprime la condition $K < \mu \dfrac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ dans le produit NX avec $n_0 = n = N = X = p^i - 1$; l'inégalité (4) est donc satisfaite avec $\mu = 1$, $i \geqq 5$ et la remarque en a déjà été faite en terminant l'examen du cas unique où n coïncide avec ses limites extrêmes.

En résumé, le Tableau des valeurs simultanées de x et de n, pour lesquelles l'inégalité (11) est toujours satisfaite, quel que soit p, est

$$
\begin{aligned}
&x = \left\{ p^{i-1} p^{i-1} + 1 \ldots p^i - 1 \right\}, \\
&i \geqq 5, \qquad n = p^i - 1 \; \left\{ \left| p^i, p^i + 1, \ldots 2p^i - 1 \right| 2p^i \ldots 3p^i - 1 \right| 3p^i \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 4p^i - 1 | \ldots | (p-1)p^i \ldots p^{i+1} - 1 \left| \right\}.
\end{aligned}
$$

En prolongeant ce Tableau indéfiniment, on retomberait sur le cas $h \geqq i + 1$ examiné tout d'abord, et la condition $i \geqq 5$ disparaîtrait.

Le produit nx de deux nombres quelconques, pris dans le Tableau ci-dessus, donnera

$$k < \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

car l'inégalité (11) exprime la condition générale $\mu = 1$, c'est-à-dire

$$K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1},$$

K se rapportant au produit NX dans lequel $X = p^i - 1$ est un nombre fixe, et N un nombre variable égal au maximum de n dans une subdivision quelconque du Tableau, tandis que n_0 représente le minimum de n dans la même subdivision, et nous avons vu que la condition $\mu = 1$ entraîne

$$k < \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque n_0, n, N étant pris dans la même subdivision, on a

$$k \leqq \mathrm{K}, \qquad \frac{n - \sum n}{p - 1} \geqq \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

Le nombre x étant choisi égal ou supérieur à 2^4, il y aura toujours un nombre premier p, tel que $p^{i-1} \leqq x < p^i$ avec $i \geqq 5$ qui conviendra par conséquent au Tableau ci-dessus. Il peut se faire que l'expression arithmétique de x au moyen de p

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \quad (a < p)$$

donne $\sum x = \sigma$. Dans ce cas, ainsi qu'il a été expliqué en détail au début de ce paragraphe, l'inégalité $k < \frac{n - \sum n}{p - 1}$ dans le produit nx où $n \geqq x$ est le criterium de la non-divisibilité du nombre $\mathrm{E} = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ par $p^{\sigma+1}$ et, par suite aussi, par $(1.2\ldots n)^{\sigma+1}$.

Donc si p, dans le Tableau ci-dessus, est un des nombres premiers pour lesquels $\sum x = \sigma$, le nombre E ne sera pas divisible par la puissance $\sigma + 1$ de la factorielle $1.2\ldots n$.

Bien que, n_0, n, N appartenant à une même subdivision du Tableau, l'inégalité $\mathrm{K} < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$, relative au produit NX, entraîne $k < \frac{n - \sum n}{p - 1}$ dans le produit nx, il pourra arriver que, la première inégalité n'étant pas satisfaite, la seconde le soit; on en rencontrera de nombreux exemples.

Cas particuliers et exemples. — Notons d'abord

$$x = p^h,$$
$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots.$$

Dans le produit nx, on aura évidemment $0 = k < \frac{n - \sum n}{p - 1}$. (Voir *Remarque*, § 2.)

Mêmes conclusions avec $n = p^h$, x quelconque.

Dans le premier cas, on a évidemment $\sigma = 1$, et l'on en conclut que le nombre $E = \frac{1.2\ldots np^h}{(1.2\ldots p^h)^n}$ n'est pas divisible par le carré de la factorielle $1.2\ldots n$.

Exemple 1. — Soit maintenant

$$x = 1 + p, \qquad n_0 = p^2, \qquad N = 2p^2 - 1.$$

Nous écartons les hypothèses $p = 2$ et $1 + p = 2^h$ qui ramènent au cas précédent.

Dans la Tableau qui correspond à p, on a $i = 2$; x est égal au deuxième nombre inscrit au Tableau, et n tombe dans la première subdivision qui correspond à $\lambda = 1$.

$$\Big\{\, p \quad \underset{x}{p+1}\ldots\underset{X}{p^2-1} \,\Big\} \; \overset{n}{\overline{\Big\{\,\Big|\,\underset{n_0}{p^2} \quad p^2+1\ldots\underset{N}{2p^2}-1\,\Big|\,\Big\}}}.$$

L'inégalité (11), qui exprime relativement au produit NX la condition $K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$, est en défaut (*voir* l'énumération). Mais il pourrait se faire qu'avec un autre produit on trouvât $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$. Prenons, à titre d'essai, le produit Nx. On peut l'évaluer directement.

On a

$$x = 1 + 1.p, \qquad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p-1)p + 1.p^2,$$

$$\sum x = 2, \qquad \sum N = 2p - 1, \qquad \frac{N - \sum N}{p-1} = p - 1 + \frac{p^2 - 1}{p-1} = 2p,$$

$$Nx = [p - 1 + (p-1)p + 1.p^2](1 + 1.p) = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + C_3 p^3,$$

dans les notations du Paragraphe 1. Ici

$$C_0 = p - 1, \qquad C_1 = 2(p-1), \qquad C_2 = p, \qquad C_3 = 1.$$

On ramènera cette expression à la forme exigée dans le système de numération de base p, savoir

$$Nx = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots \quad (c < p)$$

par les opérations indiquées au Paragraphe 1.

$$C_0 = p - 1 = c_0, \qquad C_1 = \underbrace{1 . p + p - 2}_{k_1 \qquad\qquad c_1}, \qquad C_1 + k_1 = \underbrace{1 . p + 1}_{k_2 \qquad c_2},$$

$$C_3 + k_2 = 2 = c_3 \quad \text{si} \quad p > 2.$$

On a donc

$$k = k_1 + k_2 = 2 \quad \text{avec} \quad p > 2;$$

on aurait

$$k = 3 \qquad\qquad \text{avec} \quad p = 2.$$

Dans tous les cas, on a

$$k < \frac{N - \sum N}{p - 1},$$

c'est-à-dire

$$2 < 2p \quad \text{avec} \quad p > 2,$$
$$3 < 2p \quad \text{avec} \quad p = 2.$$

De plus, on a

$$\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1,$$

d'où suit, avec $p > 2$,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

Soit maintenant n un nombre quelconque entre les limites n_0, N et k', la quantité qui correspond au produit nx. On aura certainement

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque k' est au plus égal à k et que $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ est au moins égal à $\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}$.

D'autre part, on a $\sum x = 2$ et l'on peut être sûr que 2 est le minimum $\sum x$, c'est-à-dire σ. Car, en supposant toujours $p > 2$, le nombre $x = 1 + 1 . p$ est un nombre pair, donc un autre nombre premier P ne donnera pas $x = P^h$ (seul cas dans lequel on trouverait $\sigma = 1$), à moins que $P = 2$, d'où $x = 1 + 1 . p = 2^h$, hypothèse écartée au début.

Cela étant, d'après une remarque souvent répétée, la condition

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

est un criterium de la non-divisibilité du nombre $E = \frac{1.2\ldots nx}{(1.2\ldots x)^n}$ par $p^{\sigma+1}$, d'où l'on conclut que ce même nombre E avec $x = p + 1$, $p > 2$, et $n = | p^2, p^2 + 1 \ldots 2p^2 - 1 |$ est divisible par le carré de la factorielle $1.2\ldots n$, mais non par une puissance supérieure.

Exemple 2.

$$x = 2p, \qquad n_0 = p^2, \qquad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p - 1)p + 1 . p^2;$$

$$\sum x = 2, \qquad \sum N = 2p - 1, \qquad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = p + 1, \qquad \frac{N - \sum N}{p - 1} = 2p.$$

On a encore $i = 2$ dans le Tableau, et l'inégalité (11) est en défaut.

Évaluons le produit Nx.

$$Nx = (2p^2 - 1)2p = -2p + 4p^3 = (p - 2)p + (p - 1)p^2 + 3p^3,$$

développement exact en admettant $p > 3$.

Dans cette hypothèse,

$$\sum Nx = 2p,$$

et la formule

$$\sum Nx = \sum N . \sum x - k(p - 1)$$

donne

$$2p = (2p - 1)2 - k(p - 1); \qquad k = 2,$$

et l'on a, comme dans l'exemple 1,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} < \frac{N - \sum N}{p - 1}.$$

On en conclut, comme dans cet exemple, que dans tout produit nx où $x = 2p$ et $p^2 \leqq n \leqq 2p^2$, on a $k' < \frac{n - \sum n}{p - 1}$.

D'ailleurs, ici encore, $\sigma = 2$, et il en résulte que le nombre $E = \frac{1.2.3 \ldots 2p.n}{(1.2.3 \ldots 2p)^n}$ avec $p > 3$ et $n = |p^2, p^2 + 1 \ldots 2p^2 - 1|$ n'est pas divisible par une puissance de la factorielle $1.2 \ldots n$ supérieure à 2.

On pourrait multiplier les exemples de ce genre, qui montrent que l'on trouvera $k < \frac{n - \sum n}{p - 1}$ avec des valeurs de n plus rapprochées de x que ne l'indique la méthode générale, et il est possible que σ soit dans tous les cas l'exposant maximum de la puissance de $1.2 \ldots n$ qui divise $\frac{1.2 \ldots nx}{(1.2 \ldots x)^n}$; mais il ne serait pas facile de resserrer les limites n_0, N, de manière à obtenir une certitude à cet égard.

Sauf le cas isolé $\mathrm{n}_0 = \mathrm{N} = \mathrm{X} = p^i - 1$, les résultats obtenus jusqu'ici ne s'appliquent qu'aux nombres x et n, qui ne sont pas compris dans les mêmes puissances consécutives d'un même nombre premier. S'il en était autrement, c'est-à-dire si x et n se trouvaient tous deux dans la première division du Tableau, la méthode générale ne pourrait plus s'appliquer sans modification. La difficulté consisterait dans le choix de limites n_0, N susceptibles de conduire à un maximum numérique pour μ dans l'inégalité $\mathrm{K} < \mu \frac{n^0 - \sum n.}{p - 1}$, et il faudrait avoir recours à d'autres moyens. Dans son étendue actuelle, le présent travail suffit néanmoins peur montrer le parti que l'on peut tirer théoriquement de la quantité k dont la nature n'indique *a priori* autre chose qu'un élément matériel de calcul numérique.