BULLETIN DE LA S. M. F.

M. POTRON

Sur quelques groupes d'ordres p^6

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 296-300

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__296_1>

SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE p^6 ;

Par M. M. Potron.

Cette Note a pour but de rectifier et de compléter les résultats obtenus dans ma Thèse de Doctorat touchant les g_{p^6} (groupes d'ordre p^6), et de réparer en particulier une omission de quelque importance, commise dans la détermination des types de figure (11) (1111) dans le cas de $p > 2$ (Thèse, p. 94, 95).

Il s'agit des types de $g_{p^6}G$ ayant pour commutant le central et ne contenant pas de g_{p^5} de figure (111) (11). Leurs équations peuvent toujours (Thèse, p. 92) être mises sous la forme

$$a^p = b^p = 1, \qquad c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'}, \qquad e^p = b^{\beta''}, \qquad f^p = b^{\beta'''},$$
$$(\alpha = 0,\ 1),$$
$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = db^N,$$
$$f^{-1}df = da, \qquad f^{-1}ef = e.$$

Nous n'avons à nous occuper ici que du cas (Thèse, p. 93) $\alpha = 1$, β' ou β'' ou $\beta''' \not\equiv 0$.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme (Thèse, p. 76)

$$a_1 = b^\eta a^\xi, \qquad b_1 = b^{\eta'} a^{\xi'},$$
$$c_1 = f^u e^z d^y c^x b^k a^h, \qquad d_1 = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'} b^{k'} a^{h'},$$
$$e_1 = f^{u''} e^{z''} d^{y''} c^{x''} b^{k''} a^{h''}, \qquad f_1 = f^{u'''} e^{z'''} d^{y'''} c^{x'''} b^{k'''} a^{h'''},$$

avec les conditions (Thèse, p. 89, 90, 91, N désigne un non carré arbitraire) :

$$\xi' \equiv \omega\eta, \qquad \eta' \equiv \omega N\xi, \qquad \omega N = \pm 1,$$
$$x' \equiv \omega N^2 y, \qquad y' \equiv \omega N x, \qquad z' \equiv \omega N u, \qquad u' \equiv \omega N^2 z,$$
$$x''' \equiv \omega N y'', \qquad y''' \equiv \omega x'', \qquad z''' \equiv \omega u'', \qquad u''' = \omega N z'',$$
$$\xi \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', \qquad \eta \equiv xu'' - ux'' + N(yz'' - zy''),$$
$$(\xi^2 - N\eta^2)[(x^2 - Ny^2)(Nz''^2 - u''^2)$$
$$+ (x''^2 - Ny''^2)(Nz^2 - u^2) + 2N(xy'' - yx'')(zu'' - uz'')] \not\equiv 0,$$

et il opère sur les exposants des équations de G une transformation définie (Thèse, p. 94) par

$$\begin{aligned}
\xi + \beta_1\omega\eta &\equiv x, & \eta + \beta_1\omega N\xi &\equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u,\\
\beta_1'\eta &\equiv N^2 y, & \beta_1'\xi &\equiv \beta N y + \beta' x + \beta'' u + \beta''' N z,\\
\beta_1''\omega\eta &\equiv x'', & \beta_1''\omega N\xi &\equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \beta''' u'',\\
\beta_1'''\eta &\equiv N y'', & \beta_1'''N\xi &\equiv \beta N y'' + \beta' x'' + \beta'' u'' + \beta''' N z''.
\end{aligned}$$

Si l'on fait $\beta_1'' = \beta_1''' = 0$, il vient

$$x'' \equiv y'' \equiv \beta'' z'' + \beta''' u'' \equiv \beta'' u'' + \beta''' N z'' \equiv 0,$$

donc $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$; ainsi on peut faire $\beta_1'' = \beta_1''' = 0$ toujours et seulement si $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$.

Supposons d'abord β'' ou $\beta''' \not\equiv 0$; en prenant

$$\eta = y = x'' = y'' = u'' = 0, \qquad \xi = x = z'' = 1,$$
$$\beta + \beta'' z + \beta''' u \equiv \beta' + N\beta''' z + \beta'' u \equiv 0,$$

on peut faire $\beta_1 = \beta'_1 = 0$, et le calcul s'achève comme dans la Thèse (p. 94, 95).

Supposons maintenant $\beta''_1 = \beta'''_1 = \beta'' = \beta''' = 0$ donc $\beta'\beta'_1 \not\equiv 0$ et

$$x'' \equiv y'' \equiv 0, \qquad \xi \equiv xz'' + yu'', \qquad \eta \equiv xu'' + Nyz'',$$
$$(\xi^2 - N\eta^2)(Nz''^2 - u''^2)(x^2 - Ny^2) \not\equiv 0,$$
$$\xi + \beta_1\omega\eta \equiv x, \qquad \eta + \beta_1\omega N\xi \equiv \beta x + \beta' y,$$
$$\beta'_1\eta \equiv N^2 y, \qquad \beta'_1\xi \equiv \beta N y + \beta' x.$$

L'élimination de ξ, η puis de x, y entre les quatre dernières équations donne

$$(b) \qquad N(\beta'\beta_1^2 - \beta^2\beta'_1) + (N^2 - \beta'\beta'_1)(\beta'_1 - \beta') \equiv 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que (β_1, β'_1) fournisse le même type de G que (β, β').

Considérée comme une équation en β'_1, l'équation (b) a des solutions rationnelles toujours et seulement si

$$(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 + 4N\beta'^2(\beta_1^2 - N)$$

est carré ou $\equiv 0$. On pourra donc faire $\beta_1 = 0$ toujours et seulement si $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ que l'on peut écrire

$$[(\beta' + N)^2 - N\beta^2][(\beta' - N)^2 - N\beta^2]$$

est carré ou $\equiv 0$.

Supposons d'abord cette condition remplie et soit $\beta_1 = \beta = 0$, la condition (b) qui devient $(\beta'_1 - \beta')(\beta'\beta'_1 - N^2) \equiv 0$ montre qu'il y a pour G $\frac{p+1}{2}$ types qui, en prenant pour N une racine primitive i de p, correspondent à (Cf. *Thèse*, p. 94)

$$\beta = 0, \qquad \beta' = i,\ i^2,\ \ldots,\ i^{\frac{p+1}{2}}, \qquad \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons maintenant $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ non carré, donc $\beta\beta_1 \not\equiv 0$, les types distincts de G correspondent aux systèmes (β, β') vérifiant cette condition et tels que

$$N(\beta'_h\beta_k^2 - \beta_h^2\beta'_k) + (N^2 - \beta'_h\beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \not\equiv 0, \qquad h \neq k.$$

Pour trouver le nombre des types de G, cherchons d'abord le nombre des systèmes (β_1, β'_1) solutions de (b). En posant

$$x = \beta'_1 - \frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2\beta'}, \qquad y = \beta_1,$$

(b) devient

$$x^2 - N y^2 \equiv \frac{1}{4\beta'^2}[(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2]$$

et l'on sait ([1]) que cette équation admet $p+1$ systèmes de solutions. Cherchons ensuite le nombre des systèmes (β, β') tels que $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ soit non carré, c'est-à-dire tels que $\left(\frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2N\beta'}\right)^2$ soit précédé d'un non carré. L'équation

$$\beta'^2 - N\beta^2 - 2cN\beta' + N^2 = 0,$$

où $c^2 - 1$ désigne un non carré et qui, en posant

$$x = \beta' - cN, \qquad y = \beta,$$

devient

$$x^2 - Ny^2 \equiv N^2(c^2 - 1),$$

a comme précédemment $p+1$ systèmes de solutions pour une valeur donnée de c. Comme $c^2 - 1$ parcourt ([2]) $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$ (ε désignant le caractère quadratique de -1) valeurs distinctes auxquelles il faut ajouter la valeur -1 si $\varepsilon = -1$, il en résulte que c parcourt toujours $\frac{p-1}{2}$ valeurs distinctes. Les $\frac{p^2-1}{2}$ systèmes (β, β') que nous avons à considérer se répartissant en catégories de $p+1$ qui fournissent pour G le même type, il y a exactement pour G $\frac{p-1}{2}$ types distincts.

Dans la liste des g_{p^6} (Thèse, p. 164) il faut donc supprimer dans les types (27) celui qui correspond à $\beta' = 0$ et ajouter les $\frac{p-1}{2}$ types pour lesquels les seconds membres des équations sont

$$1, \quad 1, \quad b^{\beta_h}a, \quad b^{\beta_h}, \quad 1, \quad 1, \quad c, \quad ca, \quad cb, \quad db^N, \quad da, \quad e,$$

([1]) DE SÉGUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 44.

([2]) Il y a $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$ non carrés $\neq 0$ suivis d'un carré $\neq 0$ (DE SÉGUIER, *loc. cit.*).

β_h et β'_h parcourant pour $h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ les $\frac{1}{2}(p-1)$ systèmes de valeurs telles que l'on ait

$$(\beta_h'^2 N \beta_h^2 + N^2)^2 - 4 N^2 \beta_h'^2 \quad \text{non carré,}$$
$$N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \not\equiv 0 \text{ pour } h \neq k$$
$$\left(h, k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right).$$