BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. GOURSAT

Sur la théorie des fonctions implicites

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 184-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__184_1>

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS IMPLICITES;

Par M. E. Goursat.

On connaît les beaux résultats obtenus par M. E. Picard dans l'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, grâce à sa méthode des approximations successives. Cette méthode s'applique également avec une grande facilité à la théorie des fonctions implicites. Pour fixer les idées, je resterai d'abord dans le domaine réel, quoiqu'il soit bien aisé d'étendre les résultats aux fonctions définies par des équations dont le premier membre est analytique.

1. Soit $f(x,y)$ une fonction des deux variables indépendantes réelles x et y, continue dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Pour préciser, nous supposerons que cette fonction est continue dans un domaine D défini par les inégalités

$$(1) \qquad x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \qquad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b,$$

a et b étant deux nombres positifs. Nous admettrons de plus que l'on peut choisir les nombres a et b assez petits pour que l'on ait

$$(2) \qquad |f(x,y')-f(x,y'')| < K|y'-y''|,$$

x étant une valeur quelconque comprise entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$, y', y'' étant de même deux valeurs quelconques de y comprises entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$, et K un nombre positif constant *plus petit que l'unité*. Cette dernière condition sera certainement vérifiée si la fonction $f(x,y)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulant pour $x = x_0, y = y_0$, et continue dans le voisinage.

Ces conditions étant supposées satisfaites, nous allons démontrer que l'*équation*

$$(3) \qquad y - y_0 = f(x,y),$$

où l'on regarde x comme une variable indépendante et y comme l'inconnue admet une racine, et une seule, qui tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0.

Il est clair que l'on peut, dans la démonstration, supposer $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. L'équation (3) prend la forme

$$(3') \qquad y = f(x,y),$$

la fonction $f(x,y)$ s'annulant pour $x = y = 0$, et restant continue lorsque x varie de $-a$ à $+a$, et y de $-b$ à $+b$. Posons

$$(4) \qquad y_1 = f(x,0), \qquad y_2 = f(x,y_1), \quad \ldots, \quad y_n = f(x,y_{n-1}), \quad \ldots;$$

il faut d'abord montrer qu'en prenant x assez petit, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, restent inférieurs à b en valeur absolue. Par hypothèse, si $|x| < a$ et $|y| < b$, on a

$$|f(x,y)-f(x,0)| < K|y|,$$

K étant plus petit que l'unité; on a donc *a fortiori*

$$|f(x,y)| < |y_1| + K|y|.$$

Comme y_1 tend vers zéro avec x, nous pourrons prendre un nombre $a' \leq a$ tel que, x restant compris entre $-a'$ et $+a'$, on ait

$$|y_1| < b(1-K).$$

Si $|y|$ est inférieur à b, on aura donc

$$|f(x,y)| < b(1-K) + Kb,$$

ou $|f(x,y)| < b$, pourvu que x soit compris entre $-a'$ et $+a'$. Il s'ensuit que $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ seront tous inférieurs à b en valeur absolue, si la valeur absolue de x est moindre que a'.

Pour prouver que y_n tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment, considérons la série

$$(5) \qquad y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots.$$

Des relations

$$y_n = f(x, y_{n-1}), \qquad y_{n-1} = f(x, y_{n-2})$$

on tire, d'après la condition (2),

$$|y_n - y_{n-1}| < K\,|y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

Les termes de la série (5) sont donc plus petits en valeur absolue que les termes d'une progression géométrique de raison $K < 1$. La somme S_n des n premiers termes, ou y_n, tend par conséquent vers une limite Y lorsque n augmente indéfiniment. Cette limite Y est une racine de l'équation (3), car, si l'on fait croître n indéfiniment, les deux membres de la relation

$$y_n = f(x, y_{n-1})$$

tendent respectivement vers Y et $f(x, Y)$, et l'on a à la limite

$$Y = f(x, Y).$$

Cette racine Y est une fonction de la variable x, définie dans l'intervalle $(-a', +a')$. C'est une fonction continue, car la série (5) est, d'après ce qui précède, uniformément convergente dans cet intervalle; et tous les termes sont aussi des fonctions continues. On a d'ailleurs

$$|Y| < \frac{|y_1|}{1-K},$$

ce qui montre que la racine Y tend vers zéro en même temps que x.

L'équation (3') *n'admet pas d'autre racine tendant vers zéro avec* x. D'une façon plus précise, lorsque x est compris entre $-a'$ et $+a'$, il n'existe pas d'autre racine que Y, dont la valeur absolue soit inférieure à b. Soit en effet Z une racine, inférieure à b en valeur absolue, de l'équation (3'); des deux relations

$$Z = f(x, Z), \qquad y_n = f(x, y_{n-1})$$

on déduit, en appliquant toujours la condition (2),

$$|Z - y_n| < K\,|Z - y_{n-1}|,$$

et par suite

$$|Z - y_n| < K^{n-1}\,|Z - y_1|.$$

La différence $Z - y_n$ tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et Z est identique à Y.

2. Il est facile de passer de la proposition précédente au théorème d'existence des fonctions implicites, sous la forme qu'on lui donne ordinairement. Nous l'énoncerons de la façon suivante :

Soit $F(x, y)$ *une fonction continue des deux variables* x, y, *dans le voisinage d'un système de valeurs* $x = x_0$, $y = y_0$, *pour lequel* $F(x_0, y_0) = 0$, *et admettant une dérivée partielle* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *continue dans le voisinage du même système de valeurs, mais différente de zéro pour* $x = x_0$, $y = y_0$. *L'équation*

$$F(x, y) = 0, \tag{6}$$

admet une racine et une seule tendant vers y_0 *lorsque* x *tend vers* x_0.

Soit en effet m la valeur de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}$ pour $x = x_0$, $y = y_0$; m est par hypothèse différent de zéro, et l'équation (6) est équivalente à l'équation

$$y - y_0 = y - y_0 - \frac{1}{m} F(x, y) = f(x, y).$$

Or la fonction $f(x, y)$ du second membre est nulle, ainsi que $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, et ces deux fonctions sont continues dans le voisinage. On peut donc appliquer à cette équation le théorème démontré plus haut; ce qui conduit à la proposition énoncée.

Remarque. — La démonstration précédente ne suppose rien sur l'existence de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot$ On peut se rendre compte aisément que l'existence de cette dérivée n'est nullement nécessaire. Soit par exemple $\varphi(x)$ une fonction continue sans dérivée, prenant une valeur positive b pour $x=a$. L'équation $y^2=\varphi(x)$ admet deux racines qui tendent respectivement vers $\pm\sqrt{b}$ lorsque x tend vers a, et qui sont aussi des fonctions continues de x dans le voisinage.

3. Considérons maintenant le cas général d'un nombre quelconque d'équations. Soient

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p), \quad \ldots, \quad f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

p fonctions des $n+p$ variables x_i, y_k, continues et admettant des dérivées partielles continues $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ dans le voisinage des valeurs $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0, y_1=0, \ldots, y_p=0$. Si de plus les p fonctions f_i, ainsi que les p^2 dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, s'annulent pour ce système de valeurs, *les p équations*

$$(7) \qquad y_1=f_1, \quad y_2=f_2, \quad \ldots, \quad y_p=f_p$$

admettent un système de solutions et un seul de la forme

$$y_1=\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad y_2=\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad \ldots, \quad y_p=\varphi_p(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ étant des fonctions continues des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui tendent vers zéro lorsque toutes ces variables tendent vers zéro.

Supposons les fonctions f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ continues pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p$ satisfaisant aux inégalités

$$(8) \quad |x_1|\leqq a_1, \quad |x_2|\leqq a_2, \quad \ldots, \quad |x_n|\leqq a_n, \quad |y_1|\leqq b_1, \quad \ldots, \quad |y_p|\leqq b_p.$$

Comme on peut toujours remplacer les nombres a_i, b_k par des nombres positifs plus petits, nous supposerons que l'on a choisi ces nombres assez petits pour que la valeur absolue de l'une quelconque des dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ soit inférieure à $\frac{K}{p}$ dans le domaine défini par les inégalités (8), K étant un nombre positif inférieur à l'unité. Cela est toujours possible, puisque les dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ s'annulent pour $x_1 = x_2 = \ldots = y_p = 0$. Nous pouvons aussi admettre pour simplifier que l'on a $b_1 = b_2 = \ldots = b_p$; car il suffit de remplacer les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ par le plus petit d'entre eux b.

Cela étant, nous poserons, en appliquant la même méthode que dans le cas simple traité plus haut,

$$(9)\qquad \begin{cases} y_1^{(1)} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ 0, 0, \ldots, 0), \\ y_2^{(1)} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ 0, 0, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p^{(1)} = f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ 0, 0, \ldots, 0), \end{cases}$$

puis

$$(10)\qquad \begin{cases} y_1^{(2)} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}), \\ y_2^{(2)} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p^{(2)} = f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}), \end{cases}$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, on posera

$$y_i^{m} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \ldots, y_p^{(m-1)}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, p; \qquad m = 2, 3, \ldots.$$

Si les valeurs absolues de $y_1^{(m-1)}, \ldots, y_p^{(m-1)}$ sont inférieures à b, on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(1)}| < \frac{K}{p}|y_1^{(m-1)}| + \frac{K}{p}|y_2^{(m-1)}| + \ldots + \frac{K}{p}|y_p^{(m-1)}|,$$

et par suite

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(1)}| < Kb,$$

et, à plus forte raison,

$$(11)\qquad |y_i^{(m)}| < |y_i^{(1)}| + Kb.$$

Mais les fonctions $y_i^{(1)}$ sont des fonctions continues de x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui s'annulent pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Nous pouvons donc supposer encore les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ assez petits pour que la valeur absolue de $y_i^{(1)}$ soit inférieure à $(1 - K)\,b$ lorsqu'on a

$$|x_1| \leqq a_1, \quad |x_2| \leqq a_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq a_n.$$

L'inégalité (11) montre que l'on aura aussi $|y_i^{(m)}| < b$, et l'on démontrera ainsi de proche en proche que toutes les valeurs absolues $|y_i^{(2)}|$, $|y_i^{(3)}|$, ..., $|y_i^{(m)}|$, ... seront inférieures à b, pourvu que l'on ait

$$|x_1| \leqq a_1, \qquad |x_2| \leqq a_2, \qquad \ldots, \qquad |x_n| \leqq a_n.$$

Des deux relations

$$\begin{aligned} y_i^{(m)} &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \ldots, y_p^{(m-1)}), \\ y_i^{(m-1)} &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(m-2)}, y_2^{(m-2)}, \ldots, y_p^{(m-2)}), \end{aligned}$$

on déduit de même

$$\begin{aligned} |y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}| < {} & \frac{K}{p} |y_1^{(m-1)} - y_1^{(m-2)}| \\ & + \frac{K}{p} |y_2^{(m-1)} - y_2^{(m-2)}| + \ldots + \frac{K}{p} |y_p^{(m-1)} - y_p^{(m-2)}|. \end{aligned}$$

Soit M_{m-1} la valeur maximum des valeurs absolues des différences $|y_i^{(m-1)} - y_i^{(m-2)}|$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$; l'inégalité précédente prouve que l'on aura

$$|y_i^{(m-1)} - y_i^{(m-2)}| < KM_{m-1}.$$

En particulier, si H est la valeur maximum de $|y_1^{(1)}|$, $|y_2^{(1)}|$ ..., $|y_p^{(1)}|$, la valeur maximum des valeurs absolues $|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}|$, ..., $|y_p^{(2)} - y_p^{(1)}|$ sera moindre que KH, et, en continuant de la sorte, on voit que la valeur absolue de $y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}$ sera inférieure à $K^{m-1}H$. La série

$$y_i^{(1)} + \{y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\} + \ldots + \{y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}\} + \ldots$$

a donc ses termes plus petits en valeur absolue que ceux d'une progression géométrique de raison $K < 1$. Il s'ensuit que $y_i^{(m)}$ tend vers une limite Y_i lorsque m augmente indéfiniment. Soient Y_1, Y_2, ..., Y_p les limites vers lesquelles tendent respectivement $y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots, y_p^{(m)}$ lorsque m croît indéfiniment. La relation

$$y_i^{(m)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1^{(m-1)}, \ldots, y_p^{(m-1)})$$

devient à la limite

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_p), \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

On démontre comme dans le premier cas que les racines Y_1, $Y_2, \ldots, Y_p$ sont des fonctions continues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et que le système (7) n'admet pas d'autre système de racines tendant vers zéro en même temps que $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4. Prenons enfin un système de la forme la plus générale

$$(12)\quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres sont des fonctions continues, et admettent des dérivées partielles $\frac{\partial F_i}{dy_k}$ continues, dans le voisinage d'un système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0;\ y_1^0, \ldots, y_p^0$, pour lequel on a $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\ldots$, $F_n = 0$.

Ces équations admettent un système de solutions, et un seul, de la forme

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *étant des fonctions continues qui tendent respectivement vers* $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$, *lorsque les variables* $x_1, \ldots, x_n$ *tendent elles-mêmes vers* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, *pourvu que le déterminant fonctionnel*

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

ne soit pas nul pour ce système de valeurs.

Pour simplifier, nous supposerons que l'on a effectué d'abord la transformation

$$x_i \,|\, x_i^0 + x_i, \quad y_k \,|\, y_k^0 + y_k,$$

de façon que toutes les valeurs initiales x_i^0, y_k^0 soient nulles. Soit a_{ik} la valeur de la dérivée $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ pour ces valeurs initiales; par hypothèse le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{p} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Le système des équations (12) est évidemment équivalent au système suivant .

$$(13)\quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1p}y_p = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1p}y_p - F_1 = \varphi_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2p}y_p = a_{21}y_1 + \ldots + a_{2p}y_p - F_2 = \varphi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{p1}y_1 + a_{p2}y_2 + \ldots + a_{pp}y_p = a_{p1}y_1 + \ldots + a_{pp}y_p - F_p = \varphi_p; \end{cases}$$

les seconds membres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont nuls, ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$ pour $x_i = 0$, $y_k = 0$. En résolvant ce nouveau système par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_p$, on obtiendra donc en définitive un système de la forme (7).