O. HESSE

Des relations analytiques entre six points situés sur une conique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 33-38
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__33_1>

MÉLANGES.

DES RELATIONS ANALYTIQUES ENTRE SIX POINTS SITUÉS SUR UNE CONIQUE;

PAR M. O. HESSE.

Traduit de l'allemand. (*Voir* p. 11.)

Le théorème de l'hexagone de Pascal fournit un moyen très-simple de reconnaître, par la Géométrie, quand six points sont situés sur une conique; mais on ne connaît pas encore de relation analytique simple entre les équations (tangentielles) de six points situés sur une conique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'établir de telles relations.

Soit $W = 0$ l'équation *tangentielle* d'un point pris arbitrairement sur une conique. Il est clair que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad W = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions linéaires des coordonnées. En effet tous les points définis par l'équation précédente, quand on fait varier λ, se trouvent sur la conique dont l'équation tangentielle est

$$B^2 - 4AC = 0.$$

D'après cela, six points situés sur une conique, 1, 2,..., 6 peuvent être déterminés par les équations

$$(2) \qquad W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \ldots, \quad W_6 = 0,$$

où $W_1, W_2, \ldots, W_6$ désignent les expressions suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} W_1 = A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2, \\ W_2 = A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ W_6 = A + B\lambda_6 + C\lambda_6^2, \end{cases}$$

les six quantités λ_i désignant six valeurs tout à fait arbitraires de la variable λ qui figure dans l'équation (1).

Il existe entre les six expressions W de remarquables relations qui se déduisent toutes d'un théorème bien connu de la théorie des fractions rationnelles.

Si l'on désigne par $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$ les produits des six quantités λ définis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\ldots(\lambda_2 - \lambda_6), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2)\ldots(\lambda_6 - \lambda_5); \end{aligned}$$

et si d'ailleurs $\varphi(\lambda)$ désigne une fonction quelconque, du quatrième degré au plus, de λ, on sait qu'on aura identiquement

$$(4)\qquad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \ldots + \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.$$

Posons dans cette formule $\varphi(\lambda) = W^2$, nous serons conduits au théorème suivant :

Si $W_1 = 0, W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations tangentielles de six points d'une conique, on peut toujours déterminer six grandeurs* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$ *telles, que l'on ait identiquement*

$$(5)\qquad \frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

Il est vrai que, d'après les équations (3), les six expressions W ont une forme tout à fait déterminée; mais, sous quelque forme que soient écrites les équations de nos six points, il est clair qu'elles ne diffèrent des six équations (3) que par des multiplicateurs constants, en sorte que les équations les plus générales des six points seraient de la forme

$$V_1 = a_1 W_1 = 0, \quad V_2 = a_2 W_2 = 0, \ldots, \quad V_6 = a_6 W_6 = 0.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{V_1^2}{a_1^2\pi_1}+\frac{V_2^2}{a_2^2\pi_2}+\ldots+\frac{V_6^2}{a_6^2\pi_6}=0,$$

et l'on voit qu'*elle conserve la même forme*. Toutefois les facteurs constants $a_1^2\pi_1$ n'ont plus la signification simple qui leur avait été attribuée, et ne représentent plus les produits des différences des six quantités λ. On peut d'ailleurs donner du théorème qui précède une démonstration directe qui permettra d'établir la réciproque.

A cet effet considérons six points d'une conique, dont les coordonnées homogènes soient : $x_1\, y_1\, z_1,\ x_2\, y_2\, z_2, \ldots,\ x_6\, y_6\, z_6$. Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

l'équation de la conique, on aura les six équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} Ax_1^2 + A'y_1^2 + \ldots = 0,\\ Ax_2^2 + A'y_2^2 + \ldots = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ Ax_6^2 + A'y_6^2 + \ldots = 0,\end{array}\right.$$

qui expriment que les six points sont sur la conique.

On peut toujours évidemment déterminer six grandeurs $\pi_1, \ldots, \pi_6$, telles, que cinq des six équations suivantes soient satisfaites :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{x_1^2}{\pi_1}+\dfrac{x_2^2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{x_6^2}{\pi_6}=0,\\[2mm]
\dfrac{y_1^2}{\pi_1}+\dfrac{y_2^2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{y_6^2}{\pi_6}=0,\\[2mm]
\dfrac{z_1^2}{\pi_1}+\dfrac{z_2^2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{z_6^2}{\pi_6}=0,\\[2mm]
\dfrac{y_1z_1}{\pi_1}+\dfrac{y_2z_2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{y_6z_6}{\pi_6}=0,\\[2mm]
\dfrac{x_1y_1}{\pi_1}+\dfrac{x_2y_2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{x_6y_6}{\pi_6}=0,\\[2mm]
\dfrac{z_1x_1}{\pi_1}+\dfrac{z_2x_2}{\pi_2}+\ldots+\dfrac{z_6x_6}{\pi_6}=0.
\end{array}\right.$$

Or, si l'on divise les équations (6) respectivement par $\pi_1, \ldots, \pi_6$ et qu'on les ajoute par lignes verticales, on voit que de cinq équations du système (7) résulte toujours la sixième.

Les systèmes (6) et (7), sont donc équivalents et le second, aussi bien que le premier, suffit à exprimer que les six points $1, 2, \ldots, 6$ sont sur une conique.

Cela posé, multiplions les équations (7) par u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2uv$, $2wu$ respectivement, et ajoutons-les par lignes verticales. Le coefficient de $\frac{1}{\pi_i}$ sera $(ux_i + vy_i + wz_i)^2$. Posons $W_i = ux_i + vy_i + wz_i$, $W_i = 0$ sera l'équation tangentielle du point $x_i y_i z_i$, et l'on aura *identiquement*

$$\frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

C'est l'équation de condition (5). Si l'on exprime d'ailleurs que cette équation est identique, c'est-à-dire vérifiée, qu'elles que soient les valeurs du u, v, w, elle se décompose dans les six équations (7). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points, et si les premiers membres de ces équations satisfont à une équation identique de la forme* (5), *les six points sont sur une conique.*

L'équation (5) a été obtenue en remplaçant, dans l'équation (4), $\varphi(\lambda)$, qui est une fonction du quatrième degré au plus, par W^2. On peut encore remplacer $\varphi(\lambda)$ par W ou λW ou $\lambda^2 W$, et l'on obtient les nouvelles équations identiques

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0,\\ &\frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0,\\ &\frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points d'une conique, on peut toujours trouver six arbitraires* λ *et six arbitraires* π, *telles, que les trois équations* (8) *aient lieu identiquement.*

La réciproque de cette proposition est encore vraie :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points, et* *si l'on peut trouver six arbitraires λ, et six autres constantes π, telles, que les équations* (8) *aient lieu identiquement, les six points seront sur une conique.*

Pour établir cette réciproque, nous montrerons que, lorsque les équations (8) ont lieu, les six points forment un hexagone de Pascal, c'est-à-dire un hexagone dont les côtés opposés se rencontrent en trois points p, q, r situés sur une même droite.

A cet effet, nous remarquerons qu'en éliminant deux des symboles W, les équations (8) fournissent de nouvelles identités, ne contenant que quatre de ces symboles. Multiplions, par exemple, pour éliminer W_5, W_6, les trois équations respectivement par

$$\lambda_5 \lambda_6, \quad -(\lambda_5+\lambda_6), \quad 1,$$

et ajoutons. Nous obtenons

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1}+(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_6)\frac{W_3}{\pi_3}+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}=0. \end{aligned} \right.$$

On obtient de cette manière, en éliminant W_3 et W_6, W_1 et W_4, W_2 et W_5, les équations identiques

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1}+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}+(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5}=0, \\ &(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2}+(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} \\ &+(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_1)\frac{W_5}{\pi_5}+(\lambda_6-\lambda_4)(\lambda_6-\lambda_1)\frac{W_6}{\pi_6}=0, \\ &(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3}+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} \\ &+(\lambda_6-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_2)\frac{W_6}{\pi_6}+(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_2)\frac{W_1}{\pi_1}=0. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant les trois équations suivantes, *qui ne sont plus* *des identités* et qui représentent trois points en coordonnées tangentielles:

$$p)\qquad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1}+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2}=0,$$

$$q)\qquad (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2}+(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3}=0,$$

$$r)\qquad (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3}+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4}=0.$$

Considérons l'un de ces points, le premier par exemple. En vertu de la première des identités (10), son équation pourrait s'écrire

$$(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}+(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5}=0.$$

On voit donc que ce point est à la fois sur les côtés (12) d'après la première équation, et (45) d'après la seconde. C'est donc le point d'intersection des deux cotés opposés (12) et (45) de l'hexagone. On verrait de même que le point q) est à l'intersection des cotés (23) et (56) et le point r) à l'intersection des cotés (34) et (61).

D'ailleurs si l'on multiplie les trois équations p), q), r), par

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5),\quad (\lambda_2-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_5),\quad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6),$$

et qu'on les ajoute, on retrouve l'équation identique (9), multipliée par $(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)$. Puisque les équations des trois points ont une somme identiquement nulle, les trois point sont en ligne droite, ce qui est le théorème de Pascal (*).