

DYNAMIQUE DES HOMÉOMORPHISMES DU PLAN AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE

PAR PATRICE LE CALVEZ

RÉSUMÉ. – Nous étudions la dynamique d'un homéomorphisme d'une surface au voisinage d'un point fixe et cherchons à calculer la suite des indices de Lefschetz des itérés en ce point. Nous en déduisons l'existence d'une infinité d'orbites périodiques pour certains homéomorphismes conservatifs de surfaces.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – We study the dynamics of a homeomorphism of a surface near a fixed point. We compute the sequence of the Lefschetz indices of the iterates of the map. We deduce the existence of an infinite number of periodic orbits for some conservative homeomorphisms of surfaces.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

L'objet de cet article est l'étude des homéomorphismes de surfaces au voisinage d'un point fixe dans le but de montrer l'existence d'infinité d'orbites périodiques pour certains homéomorphismes conservatifs. Plus précisément nous montrerons les deux résultats suivants.

THÉORÈME 1. – *Si $f : S^2 \rightarrow S^2$ est un homéomorphisme qui a au moins trois points fixes et qui n'a pas de point errant, alors f a une infinité d'orbites périodiques.*

THÉORÈME 2. – *Soit f un homéomorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$ homotope à l'identité et \tilde{f} un relèvement de f à \mathbf{R}^2 . On suppose que f préserve une mesure borélienne de probabilité μ chargeant les ouverts et ayant un vecteur de rotation*

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbf{T}^2} \tilde{f} - Id \, d\mu$$

égal à 0. Alors f a une infinité d'orbites périodiques.

Le premier résultat était déjà connu pour les homéomorphismes topologiquement transitifs (voir M. Handel [18]) et pour les homéomorphismes qui préservent une mesure de probabilité chargeant les ouverts (voir J. Franks [16]).

La formule de Lefschetz est un outil majeur dans la preuve de ces résultats. Ainsi, les problèmes locaux qui nous intéresseront seront les suivants :

- si $z \in \mathbf{R}^2$ est un point fixe d'un homéomorphisme (non nécessairement conservatif) localement défini au voisinage de z , que peut-on dire de la suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ (quand elle est définie) des indices de Lefschetz des itérés de f ?

- quel est le lien entre la structure de cette suite et la dynamique de f au voisinage de 0 ?

Il y a des cas où la suite des indices de Lefschetz des itérés est déjà connue, c'est le cas où le point fixe est accumulé par des orbites périodiques : la suite est alors constante égale à 1. Ceci

nous amène à faire une première classification entre les points fixes accumulés (par des orbites périodiques) et ceux qui ne le sont pas. Nous porterons une plus grande attention à ces derniers.

Un autre cas, celui-ci très simple, où la suite est connue et également constante égale à 1 est le cas où le point fixe admet un système de voisinages, formé de domaines attractifs ou répulsifs dont la frontière est une courbe de Jordan. Cette situation, qualifiée de dissipative, est bien sûr impossible pour un homéomorphisme sans point errant.

La suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ a été étudiée avec J.-C. Yoccoz (voir [24]) dans le cas où le point fixe z est localement maximal, c'est-à-dire dans le cas où il existe un voisinage U tel que z est le seul point d'orbite totale contenue dans U , et où z n'est pas de type dissipatif. La suite est alors périodique. Plus précisément, il existe des entiers $q \geq 1$ et $r \geq 1$ tels que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} i(f^k, z) = 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z}, \\ i(f^k, z) = 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ce résultat a été généralisé (voir [25]) dans le cas où z n'est pas dissipatif et où il existe un voisinage simplement connexe U ne contenant aucune orbite périodique autre que $\{z\}$ et tel que

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}) \subset U.$$

Un point fixe admettant un système fondamental de voisinages simplement connexes U vérifiant

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}) \subset U$$

sera qualifié de point-selle.

Les points qui nous intéresseront particulièrement sont les points fixes non accumulés qui ne sont ni dissipatifs, ni des points-selles. Un exemple naturel est celui d'un point fixe indifférent d'une application holomorphe univalente (voir R. Perez-Marco [30]). Nous verrons comment la théorie des bouts premiers permet de ramener cette situation à celle des points dissipatifs et des points-selles.

Cette étude nous fera retrouver ou améliorer certains résultats locaux des homéomorphismes du plan que nous utiliserons alors dans la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Nous montrerons le résultat suivant, dû à S. Pelikan et E. Slaminka [31] (et aux arguments précis de M. Bonino [3]), et montré auparavant pour les difféomorphismes par N.A. Nikishin [29] et C.P. Simon [34].

THÉORÈME 3. – *Si $f : W \rightarrow W'$ est un homéomorphisme entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 qui préserve une mesure borélienne chargeant les ouverts et qui admet 0 comme unique point fixe, alors $i(f, 0) \leq 1$.*

Plus précisément nous montrerons :

THÉORÈME 4. – *Soit $f : W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 qui admet 0 comme unique point fixe, et tel que $i(f, 0) \geq 2$. On a alors les deux propriétés suivantes :*

(i) *il existe un domaine $V \subset W$ tel que la suite $(f^n(V))_{n \geq 0}$ est bien définie et formée de domaines disjoints deux à deux de W ;*

(ii) *il existe un domaine $V' \subset W'$ tel que la suite $(f^n(V'))_{n \leq 0}$ est bien définie et formée de domaines disjoints deux à deux de W' .*

Nous retrouverons ensuite le résultat de M. Brown [6] suivant :

THÉORÈME 5. – Soit $f : W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 qui admet 0 comme unique point fixe, et tel que $i(f, 0) \neq 1$, alors l'indice $i(f^k, 0)$ est bien défini pour tout $k \neq 0$ et indépendant de k .

On précisera ce résultat :

THÉORÈME 6. – Soit $f : W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux voisinages de 0 dans \mathbf{R}^2 qui fixe 0. Si la suite $(i(f^k, 0))_{k \in \mathbf{Z}}$ est bien définie, il existe $q \geq 1$ et $r \in \mathbf{Z}$ tels que pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{cases} i(f^k, 0) = 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z}, \\ i(f^k, 0) = r & \text{si } k \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Une approche différente de l'étude locale des homéomorphismes au voisinage d'un point fixe a permis également à F. Le Roux [26] de retrouver les résultats précédents.

Les neuf premiers paragraphes de l'article portent sur la dynamique locale, les trois derniers sur la dynamique globale.

Au paragraphe 1 nous introduisons les premières définitions et énonçons quelques lemmes fréquemment utilisés par la suite.

Au paragraphe 2, nous donnons deux classifications distinctes des points fixes, en particulier nous introduisons précisément la notion de point indifférent, de point dissipatif et de point-selle.

Au paragraphe 3, nous rappelons ce qui est connu sur la suite des indices de Lefschetz en un point fixe pour les itérés d'un homéomorphisme.

Aux paragraphes 4 et 5 nous rappelons certains résultats de la théorie des bouts premiers, en particulier le lien entre la dynamique et les bouts premiers.

Les paragraphes 6, 7 et 8, consacrés à l'étude des points indifférents non accumulés, sont les paragraphes principaux. Nous définissons le nombre de rotation d'un tel point, puis nous introduisons la notion d'éclatement. Nous montrons alors comment construire, à partir d'un éclatement convenablement choisi, un homéomorphisme dont tous les points périodiques sont dissipatifs ou de type selle et comment calculer les indices de Lefschetz des itérés au point fixe initial en utilisant les résultats de [25] sur les nouveaux points périodiques.

Nous prouvons les théorèmes 3, 4, 5 et 6 au paragraphe 9.

Nous débutons l'étude globale des homéomorphismes au paragraphe 10, où nous rappelons quelques résultats sur les homéomorphismes conservatifs de l'anneau. Nous utilisons ces résultats globaux ainsi que les résultats locaux montrés auparavant pour donner une preuve du théorème 1 au paragraphe 11, du théorème 2 au paragraphe 12.

1. Rappels, notations

1.1. Domaines de Jordan

On rappelle qu'une *courbe de Jordan* est une partie du plan euclidien homéomorphe au cercle unité S^1 et qu'un *domaine de Jordan* est la composante connexe bornée du complémentaire d'une courbe de Jordan. Tout domaine de Jordan est homéomorphe à la boule unité \mathbf{D} et son adhérence à $\overline{\mathbf{D}}$. Si on oriente le plan \mathbf{R}^2 , on a une orientation naturelle sur toute courbe de Jordan.

1.2. Indices

Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux parties ouvertes de \mathbf{R}^2 et $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f .

Si C est une courbe de Jordan contenue dans W ne rencontrant pas $\text{Fix}(f)$, on appelle *indice de f le long de C* , le degré $i(f, C)$ de l'application

$$\begin{aligned} \chi: S^1 &\rightarrow S^1, \\ t &\mapsto \frac{f(\gamma(t)) - \gamma(t)}{\|f(\gamma(t)) - \gamma(t)\|}, \end{aligned}$$

où $\gamma: S^1 \rightarrow C$ est une paramétrisation préservant l'orientation (l'indice est indépendant de l'orientation choisie sur \mathbf{R}^2).

Si z est un point fixe isolé de f , et si U est un domaine de Jordan qui est un voisinage suffisamment petit de z , alors l'entier $i(f, \partial U)$ est bien défini et indépendant de U : c'est par définition l'*indice de Lefschetz* de z , on le note $i(f, z)$.

Si $U \subset W$ est un domaine de Jordan ayant un nombre fini de points fixes et si sa frontière est contenue dans W et ne rencontre pas $\text{Fix}(f)$, on a

$$i(f, \partial U) = \sum_{z \in \text{Fix}(f) \cap U} i(f, z).$$

L'indice $i(f, z)$ ne dépend que du germe de f en z , plus précisément de la classe de conjugaison de ce germe. On peut donc définir l'indice de Lefschetz d'un point fixe isolé d'un homéomorphisme d'une surface.

1.3. Continus

On rappelle qu'un *continu* est une partie compacte et connexe d'un espace topologique. On dira qu'un continu K d'une surface M est *plein* si son complémentaire est connexe et qu'il est *contractile* s'il est contenu dans un domaine simplement connexe de M . Si K est plein et contractile, on obtient une nouvelle surface \widehat{M} homéomorphe à M en identifiant K à un point $\{K\}$.

Si $K \subset M$ est un continu plein contractile invariant par un homéomorphisme $f: W \rightarrow W'$ entre deux voisinages ouverts de K dans M , on obtient naturellement un homéomorphisme $\hat{f}: \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}'$ entre deux voisinages ouverts du point fixe $\{K\}$ dans \widehat{M} . S'il existe un voisinage $U \subset W$ de K tel que f n'a pas de point fixe dans $U \setminus K$, le point $\{K\}$ est un point fixe isolé de \hat{f} et on peut définir l'indice

$$i(f, K) = i(\hat{f}, \{K\}).$$

Si f n'a qu'un nombre fini de points fixes dans K , on a

$$i(f, K) = \sum_{z \in \text{Fix}(f) \cap K} i(f, z).$$

1.4. Lemme de Brouwer

On utilisera souvent le résultat suivant, dû à L.E.J. Brouwer [4] (voir également [5,10] ou [17]).

PROPOSITION 1.1. – Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ un homéomorphisme préservant l'orientation. Si f a un point non errant qui n'est pas un point fixe (par exemple un point périodique de période $q \geq 2$), alors il existe une courbe de Jordan C , disjointe de $\text{Fix}(f)$, telle que $i(f, C) = 1$.

1.5. Homéomorphismes semi-stables

Notons

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbf{R} &\rightarrow S^1, \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

le revêtement universel de S^1 . On dira qu'un homéomorphisme préservant l'orientation φ de S^1 est *semi-stable à droite* (resp. *semi-stable à gauche*) si, étant donné un relèvement $\tilde{\varphi}$ de φ à \mathbf{R} , il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$ tels que la fonction $\tilde{\varphi}^q - 2p\pi$ s'annule et garde un signe positif ou nul (resp. négatif ou nul). Plus concrètement un homéomorphisme est semi-stable à droite (resp. à gauche) si son nombre de rotation $p/q + \mathbf{Z}$ est rationnel et si aucun point n'est envoyé "à gauche" (resp. "à droite") par φ^q . Les homéomorphismes semi-stables à la fois à droite et à gauche sont les homéomorphismes périodiques.

1.6. Ensembles isolants

Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux parties ouvertes W et W' d'une surface. On dit qu'un ensemble ouvert V , d'adhérence contenue dans W , est *isolant* si on a

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{V}) \subset V.$$

1.7. Un lemme de connexité

Nous utiliserons souvent le lemme suivant (voir par exemple [20], p. 47).

LEMME 1.2. – Soit X un espace topologique compact et connexe et Y une partie fermée de X . Alors l'adhérence de toute composante connexe de $X \setminus Y$ rencontre Y .

2. Classifications des points fixes

Nous donnerons dans ce paragraphe deux classifications des points fixes d'un homéomorphisme local du plan. Nous supposerons toujours que les homéomorphismes préservent l'orientation.

2.1. Points accumulés et non accumulés

Soit $f: W \rightarrow W'$ un homéomorphisme entre deux voisinages W et W' de 0 dans \mathbf{R}^2 , préservant l'orientation et laissant fixe 0. On dira que 0 est *accumulé* si tout voisinage de 0 inclus dans W contient une orbite périodique autre que 0, on dira qu'il est *non accumulé* dans le cas contraire. Dans le cas particulier où il existe $q \geq 1$ tel que tout voisinage de 0 inclus dans W contient une orbite périodique de période q autre que 0, on dira que 0 est *dégénéré*. On a donc une première classification entre les points fixes non accumulés, les points fixes accumulés non dégénérés et les points fixes dégénérés. Cette classification ne dépend que du germe de f en 0 et plus précisément de la classe de conjugaison de ce germe.

2.2. Points indifférents

On rappelle que si $f:W \rightarrow W'$ est une application holomorphe univalente entre deux voisinages W et W' de 0 dans \mathbf{C} , le point 0 est *indifférent* si $|f'(0)| = 1$. Un tel point vérifie la propriété suivante, montrée par R. Perez-Marco [30] :

Si U est un domaine de Jordan contenant 0 et d'adhérence contenue dans W , alors la composante connexe K de l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0 rencontre ∂U .

On va généraliser cette notion. Si $f:W \rightarrow W'$ est un homéomorphisme entre deux voisinages W et W' de 0 dans \mathbf{R}^2 , préservant l'orientation et laissant fixe 0, on dira que 0 est *indifférent* s'il vérifie la condition suivante :

Il existe un voisinage V de 0 d'adhérence contenue dans W , tel que pour tout domaine de Jordan $U \subset V$ contenant 0, la composante connexe K de l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0 rencontre ∂U .

Cette propriété ne dépend que de la classe de conjugaison du germe de f en 0.

On peut caractériser les points indifférents par la condition équivalente :

Il existe un voisinage V de 0 d'adhérence contenue dans W , tel que pour tout domaine de Jordan $U \subset V$ contenant 0, l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ rencontre ∂U .

Pour vérifier que ces deux conditions sont équivalentes, il suffit de remarquer que si U ne vérifie pas la première condition, les ensembles K et ∂U appartiennent à deux composantes connexes distinctes de l'ensemble fermé

$$X = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}) \cup \partial U,$$

et peuvent donc être séparés par une courbe de Jordan disjointe de X (voir [28], p. 143). Le domaine de Jordan U' bordé par cette courbe est alors contenu dans U et il est isolant puisque

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}') \subset \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}).$$

2.3. Points non indifférents

D'après la remarque précédente, le point fixe 0 de $f:W \rightarrow W'$ est non indifférent si et seulement s'il admet un système fondamental de voisinages qui sont des domaines de Jordan isolants. Comme cas particulier, on peut supposer que 0 admet un système fondamental de voisinages qui sont des domaines de Jordan dont la frontière est disjointe de leur image par f , c'est-à-dire de domaines attractifs ou répulsifs : on dira alors que 0 est *dissipatif*. Les cas les plus simples de points dissipatifs sont les puits et les sources. En dynamique complexe ce sont d'ailleurs les seuls cas possibles de points non indifférents.

2.4. Points-selles

En dynamique réelle l'exemple le plus simple d'un point non indifférent non dissipatif est le cas d'une selle (éventuellement avec $p \geq 3$ demi-variétés stables alternant avec p demi-variétés instables). Il est tentant d'appeler simplement *point-selle* tout point fixe qui est non indifférent et non dissipatif, c'est ce que nous ferons par la suite car la classification entre points fixes indifférents, points fixes dissipatifs et points-selles est la classification topologique qui nous intéressera dans cet article. Il faut cependant noter la remarque importante suivante :

Un point fixe elliptique générique d'un C^k -difféomorphisme préservant l'aire, k assez grand, est un point-selle.

En effet, sous des hypothèses génériques, on peut appliquer la théorie KAM des courbes invariantes (voir M. Herman [19]), puis la théorie de Birkhoff sur les régions d'instabilité (voir [2]). On peut trouver dans chaque voisinage de 0 une région d'instabilité bordée par deux courbes invariantes C^- et C^+ bordant des domaines de Jordan U^- et U^+ vérifiant $0 \in U^- \subset \overline{U^-} \subset U^+$. Pour tout domaine de Jordan U dont la frontière est contenue dans la région d'instabilité, c'est-à-dire vérifiant $\overline{U^-} \subset U \subset \overline{U} \subset U^+$, la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0 est égale à $\overline{U^-}$, c'est une conséquence de la théorie de Birkhoff.

Pour conclure, remarquons qu'en dynamique holomorphe, il n'y a pas de point-selle et qu'en dynamique hamiltonienne générique tous les points sont des points-selles.

3. Calcul des $i(f^k, 0)$, $k \geq 1$, dans le cas où 0 est accumulé ou non indifférent

On se donne dans ce paragraphe un homéomorphisme $f: W \rightarrow W'$ entre deux voisinages W et W' de 0 préservant l'orientation et laissant fixe 0. On s'intéresse aux indices de Lefschetz $i(f^k, 0)$ des itérés de f , quand ils sont définis. On va rappeler ce qu'on sait sur ces indices.

3.1. Le cas accumulé

La démonstration du résultat suivant est due à S. Pelikan et E. Slaminka mais se trouve de façon un peu cachée dans [31].

PROPOSITION 3.1. – *Si 0 est accumulé et si c'est un point fixe isolé de f^k , alors $i(f^k, 0) = 1$.*

Démonstration. – Il suffit de montrer le résultat pour $k = 1$. On peut trouver un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 laissant fixe 0 et ayant même germe que f en 0 que l'on note également f pour ne pas alourdir les notations. L'ensemble

$$X = \{z \in \mathbf{R}^2 \mid f(z) = z \text{ et } z \neq 0\}$$

est fermé puisque 0 est isolé. On note U la composante connexe de $\mathbf{R}^2 - X$ contenant 0 et $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$ le revêtement universel de U . L'ensemble \tilde{U} est alors homéomorphe à \mathbf{R}^2 . On choisit $z_0 \in \pi^{-1}(\{0\})$ et on note \tilde{f} le relèvement de $f|_U$ fixant z_0 . Le germe de \tilde{f} en chaque point fixe z est conjugué au germe de f en 0 et on a $i(\tilde{f}, z) = i(f, 0)$. L'indice de \tilde{f} le long de toute courbe de Jordan sans point fixe C est donc égal à $mi(f, 0)$, où m est le nombre de points fixes de \tilde{f} appartenant au domaine de Jordan bordé par C . Le point z_0 étant accumulé par hypothèse, l'homéomorphisme \tilde{f} a une orbite périodique de période $q \geq 2$. D'après la proposition 1.1, on sait qu'il existe une courbe de Jordan $C \subset \tilde{U} \setminus \text{Fix}(\tilde{f})$ telle que $i(\tilde{f}, C) = 1$: on en déduit que $i(f, 0) = 1$. \square

3.2. Le cas dissipatif

On sait également calculer les entiers $i(f^k, 0)$ dans le cas dissipatif.

PROPOSITION 3.2. – Si 0 est dissipatif, alors $i(f^k, 0) = 1$ si 0 est un point fixe isolé de f^k .

Démonstration. – La démonstration est très simple. On considère un domaine de Jordan contenant 0, inclus dans $f^{-k}(W)$, ne contenant aucun autre point fixe de f^k que 0, et dont la frontière C est disjointe de son image par f . Elle est également disjointe de son image par f^k : l'indice de f^k le long de C est donc égal à 1. \square

3.3. Le cas des points-selles

Le troisième cas, où l'on sait déterminer la suite $(i(f^k, 0))_{k \in \mathbf{Z}}$ est le cas d'un point-selle non accumulé. Cette situation a été étudiée avec J.-C. Yoccoz [25] :

PROPOSITION 3.3. – Si 0 est un point-selle non accumulé, il existe des entiers $q \geq 1$ et $r \geq 1$ tels que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} i(f^k, 0) = 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z}, \\ i(f^k, 0) = 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

En conclusion, le cas où 0 est un point fixe indifférent non accumulé est le seul cas où la suite $(i(f^k, 0))_{k \geq 1}$ (qui est bien définie) est encore indéterminée. C'est ce cas que nous étudierons principalement.

4. Rappels sur les bouts premiers

Dans ce paragraphe, et d'ailleurs dans tous ceux qui suivent, on se donne un homéomorphisme $f: W \rightarrow W'$ entre deux voisinages W et W' de 0 dans \mathbf{R}^2 préservant l'orientation et laissant fixe 0. On supposera que W et W' sont simplement connexes et on notera \mathcal{D} l'ensemble des domaines de Jordan contenant 0 et dont l'adhérence est incluse dans W .

On note \mathcal{K} l'ensemble des continus invariants par f , inclus dans W et contenant 0. On munit cet ensemble de la distance de Hausdorff. On définit également $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{\{0\}\}$, qui est éventuellement vide.

4.1. Compactification par bouts premiers

Pour tout $K \in \mathcal{K}^*$ la composante connexe non bornée de $\mathbf{R}^2 - K$, que l'on notera U_K , est annulaire, c'est-à-dire homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}$. Il existe une compactification naturelle du bout de U_K correspondant à K , obtenue en ajoutant un ensemble homéomorphe à S^1 , due à Carathéodory, appelée *compactification par bouts premiers* [7]. Cette compactification se définit de façon purement topologique, mais peut se comprendre par l'analyse complexe (voir [12] par exemple). On identifie \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} de la façon usuelle. On considère un difféomorphisme conforme

$$h: U_K \rightarrow \mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}},$$

(par exemple l'unique difféomorphisme tangent à l'identité à l'infini) et on munit $U_K \sqcup S^1$ de la topologie image réciproque de la topologie naturelle de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$ par l'application

$$\bar{h}: U_K \sqcup S^1 \rightarrow \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$$

égale à h sur U_k et à l'identité sur S^1 . L'espace topologique obtenu est homéomorphe à la compactification par bouts premiers de U_K , par abus de langage nous dirons que c'est la compactification par bouts premiers.

4.2. Nombre de rotation

Une propriété essentielle de la compactification par bouts premiers est le fait que la restriction de f à $U_K \cap W$ se prolonge en un homéomorphisme défini au voisinage de S^1 (voir [27] par exemple). On note φ_K l'homéomorphisme restreint au cercle, il préserve l'orientation et on peut définir son nombre de rotation $\rho_K \in \mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

4.3. Nombre de rotation réel

On notera

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbf{R} \times]0, +\infty[&\rightarrow \mathbf{R}^2 - \{0\}, \\ (\theta, r) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

le revêtement universel de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et

$$T: (\theta, r) \mapsto (\theta + 2\pi, r)$$

la transformation de recouvrement. On notera également

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbf{R} &\rightarrow S^1, \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

le revêtement universel de S^1 . Enfin, on définira

$$\widetilde{W} = \Pi^{-1}(W), \quad \widetilde{W}' = \Pi^{-1}(W'),$$

et

$$\widetilde{U}_K = \Pi^{-1}(U_K)$$

pour tout $K \in \mathcal{K}$.

L'application

$$\Pi: \widetilde{U}_K \sqcup \mathbf{R} \mapsto U_K \sqcup S^1,$$

à valeurs dans le compactifié par bouts premiers de U_K , est le revêtement universel de celui-ci si on munit $\widetilde{U}_K \sqcup \mathbf{R}$ de la topologie image réciproque. À chaque relèvement $\tilde{f}: \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{W}'$ de $f|_{W-\{0\}}$ est associé naturellement un relèvement $\tilde{\varphi}_K$ de φ_K à \mathbf{R} et son nombre de rotation réel $\tilde{\rho}_K$, qui est un représentant réel de ρ_K .

4.4. Arcs d'accès

Rappelons d'abord quelques définitions.

Un *arc d'accès* de K est un arc continu $\gamma: [0, 1[\rightarrow U_K$ ayant une limite en 1 appartenant à K . On dit que le point limite est un *point accessible* de K . On sait alors – c'est une propriété de la compactification par bouts premiers – que l'arc γ a également une limite dans S^1 (pour cette compactification). Deux arcs d'accès ayant même limite dans S^1 sont *équivalents*.

Les propriétés qui suivent sont classiques dans la théorie de Carathéodory.

• Deux arcs d'accès γ_0 et γ_1 sont équivalents si et seulement s'ils ont même limite z dans K et s'il existe un arc d'accès γ_2 ayant également même limite dans K et dont l'image rencontre l'image de γ_0 et de γ_1 dans tout voisinage de z .

- Tout arc d'accès est équivalent à un arc d'accès simple.
- L'ensemble des points accessibles est dense dans ∂U_K .
- L'ensemble des éléments de S^1 , limites d'arcs d'accès de K , est dense dans S^1 .
- L'ensemble des éléments de S^1 , limites d'arcs d'accès de K aboutissant en un point de K différent de 0, est également dense dans S^1 .

4.5. Arcs d'accès relevés

Chaque arc d'accès de K se relève en un arc à valeurs dans $\tilde{U}_K = \pi^{-1}(U_K)$ et cet arc a une limite dans \mathbf{R} . Si $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont des relèvements d'arcs d'accès de K et si $\tilde{x}_1 \in \mathbf{R}$ et $\tilde{x}_2 \in \mathbf{R}$ sont les limites respectives, on posera $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2$ si $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ et $\tilde{\gamma}_1 \leq \tilde{\gamma}_2$ si $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2$. Cette dernière relation définit un préordre sur l'ensemble des relèvements d'arcs d'accès et un ordre sur l'ensemble des "relèvements" des classes d'équivalence.

On peut définir de façon analogue un arc d'accès de $\tilde{K} = \Pi^{-1}(K \setminus \{0\})$ à valeurs dans \tilde{U}_K , c'est en particulier le relèvement d'un arc d'accès de K . La partie de \mathbf{R} formée des points limites de tels arcs est également dense, on ne perd que les limites des relèvements d'arcs d'accès de K aboutissant en 0.

On utilisera les résultats suivants

LEMME 4.1. – Si $(\tilde{\gamma}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de relèvements d'arc d'accès de K vérifiant

$$\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_n,$$

on peut trouver une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels vérifiant

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n,$$

et une famille $(\tilde{\Gamma}_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'arcs définis sur $]-\infty, 1[$, à valeurs dans \tilde{U}_K , d'images disjointes deux à deux, tels que chaque $\tilde{\Gamma}_i$ coïncide avec $\tilde{\gamma}_i$ au voisinage de 1 et s'écrit $\tilde{\Gamma}_i(t) = (a_i, -t)$ pour $-t$ assez grand.

LEMME 4.2. – Si $(\tilde{\gamma}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de relèvements d'arcs d'accès de K à laquelle on peut associer une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels et une famille $(\tilde{\Gamma}_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'arcs vérifiant les propriétés ci-dessus, on a alors :

$$\tilde{\gamma}_1 \leq \tilde{\gamma}_2 \leq \dots \leq \tilde{\gamma}_n,$$

avec des inégalités strictes si les points limites sont tous distincts.

LEMME 4.3. – On ne peut pas trouver quatre arcs d'accès $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$ de \tilde{K} vérifiant

$$\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \tilde{\gamma}_3 < \tilde{\gamma}_4,$$

tels que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_3$ aient même limite $z \in \tilde{K}$ et tels que $\tilde{\gamma}_3$ et $\tilde{\gamma}_4$ aient même limite $z' \in \tilde{K}$.

Démonstration. – Les deux premiers résultats se démontrent facilement. Limitons-nous à montrer la troisième. Considérons une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de réels et une famille $(\tilde{\Gamma}_i)_{1 \leq i \leq 4}$ d'arcs donnés par le premier lemme. La réunion X de $\{z\}$ et des images de $\tilde{\Gamma}_1$ et $\tilde{\Gamma}_3$ sépare $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ en deux parties connexes, la réunion X' de $\{z'\}$ et des images de $\tilde{\Gamma}_2$ et $\tilde{\Gamma}_4$ est connexe, disjointe de X et rencontre chaque composante connexe de $\mathbf{R} \times]0, +\infty[\setminus X$. □

5. Dynamique et bouts premiers

5.1. Arcs positifs et négatifs

On se fixe un relèvement $\tilde{f} : \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}'$ de $f|_{W \setminus \{0\}}$.

On dira qu'un arc d'accès γ de K à valeurs dans W est un arc *positif* de \tilde{f} si tout relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ vérifie $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma} \geq \tilde{\gamma}$. On dira de même qu'un arc d'accès $\tilde{\gamma}$ de \tilde{K} à valeurs dans \tilde{W} est un arc *positif* de \tilde{f} si $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma} \geq \tilde{\gamma}$. De façon analogue, on parlera d'arc d'accès *négatif*, *strictement positif* et *strictement négatif*.

Le nombre de rotation $\tilde{\rho}_K$ est alors uniquement déterminé par les propriétés suivantes :

- Si $\frac{p}{q} < \tilde{\rho}_K$, alors tout arc d'accès de K à valeurs dans $f^{-q+1}(W)$ est un arc strictement positif de $\tilde{f}^q \circ \tilde{T}^{-p}$;
- Si $\frac{p}{q} > \tilde{\rho}_K$, alors tout arc d'accès de K à valeurs dans $f^{-q+1}(W)$ est un arc strictement négatif de $\tilde{f}^q \circ \tilde{T}^{-p}$.

5.2. Un critère d'existence d'orbites périodiques

Nous utiliserons le résultat suivant, classique dans la théorie des bouts premiers.

LEMME 5.1. – Si le nombre de rotation $\rho_K = p/q + \mathbf{Z}$ de φ_K , $K \in \mathcal{K}^*$, est rationnel et si φ_K est semi-stable, alors la frontière de U_K contient un point fixe de f^q .

Démonstration. – Choisissons un bout premier périodique de K . On sait qu'on peut trouver une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ de "cross-cuts" de ce bout premier dont le diamètre tend vers 0 (un "cross-cut" est un arc continu défini sur $]0, 1[$, à valeurs dans U_K admettant une limite en 0 et en 1 dans K et dont les limites dans le cercle des bouts premiers sont proches du bout premier considéré et entourent celui-ci. Comme la dynamique est semi-stable, on a $f^q(\gamma_n) \cap \gamma_n \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. Toute valeur d'adhérence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$, pour la distance de Hausdorff est un point fixe de f^q appartenant à $\partial(U_K)$. \square

Rappelons également le résultat suivant, conséquence immédiate de la densité dans ∂U_k des points accessibles.

LEMME 5.2. – Si l'application φ_K , $K \in \mathcal{K}^*$, est périodique de période q , alors tout point de la frontière de U_K est un point fixe de f^q .

5.3. Ensembles \mathcal{K}_ρ^- et \mathcal{K}_ρ^+

Pour tout nombre rationnel $\rho = \frac{p}{q}$, écrit sous forme irréductible, on note \mathcal{K}_ρ^- (resp. \mathcal{K}_ρ^+) l'ensemble des continus $K \in \mathcal{K}^*$ tels que tout arc d'accès de K à valeurs dans $f^{-q+1}(W)$ est un arc négatif (resp. positif) de $\tilde{f}^q \circ T^{-p}$. Un continu $K \in \mathcal{K}$ est donc dans \mathcal{K}_ρ^- (resp. \mathcal{K}_ρ^+) si et seulement si $\tilde{\varphi}_K^q(x) \leq x + p$ (resp. $\tilde{\varphi}_K^q(x) \geq x + p$) pour tout $x \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire si et seulement si $\tilde{\rho}_K < \rho$ (resp. $\tilde{\rho}_K > \rho$) ou si $\tilde{\rho}_K = \rho$ et si la dynamique de φ_K est semi-stable à gauche (resp. à droite).

PROPOSITION 5.3. – Pour tout $\rho \in \mathbf{Q}$ les ensembles \mathcal{K}_ρ^- et \mathcal{K}_ρ^+ sont des parties fermées de \mathcal{K}^* , stables par réunion finie.

Démonstration. – Il suffit d'établir le résultat quand $\rho = 0$. Montrons d'abord que $\mathcal{K}^* \setminus \mathcal{K}_0^-$ est ouvert dans \mathcal{K}^* . Si $K \notin \mathcal{K}_0^-$ on peut trouver un arc d'accès γ de K strictement positif à valeurs dans W . Puisque l'ensemble des points limites dans S^1 des arcs d'accès n'aboutissant pas en 0 est dense dans S^1 , on peut toujours supposer que γ aboutit en un point $z \neq 0$. Choisissons alors

un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ et notons $\tilde{z} \in \tilde{K}$ le point limite. D'après le lemme 4.1, on peut trouver deux réels a_0 et a_1 , avec $a_0 < a_1$ et deux arcs d'accès de \tilde{K} , notés $\tilde{\Gamma}_0$ et $\tilde{\Gamma}_1$, définis sur $]-\infty, 1[$, d'images disjointes, coïncidant respectivement avec $\tilde{\gamma}$ et $f \circ \tilde{\gamma}$ sur $]1 - \alpha, 1[$, où $\alpha \in]0, 1[$, et vérifiant

$$\tilde{\Gamma}_0(t) = (a_0, -t) \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}_1(t) = (a_1, -t),$$

si $-t$ est grand.

Munissons $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ de la distance euclidienne usuelle et considérons $\varepsilon > 0$ tel que :

- $B(\tilde{z}, \varepsilon) \subset \tilde{W}$,
- $B(\tilde{f}(\tilde{z}), \varepsilon) \subset \mathbf{R} \times]0, +\infty[$,
- $\tilde{\Gamma}_0(]-\infty, 1 - \alpha]) \cap B(\tilde{z}, \varepsilon) = \emptyset$,
- $\tilde{\Gamma}_1(]-\infty, 1 - \alpha]) \cap B(\tilde{f}(\tilde{z}), \varepsilon) = \emptyset$,
- $(\tilde{\Gamma}_0(]-\infty, 1]) \cup B(\tilde{z}, \varepsilon) \cap (\tilde{\Gamma}_1(]-\infty, 1]) \cup B(\tilde{f}(\tilde{z}), \varepsilon) = \emptyset$.

Choisissons ensuite $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ tel que :

$$\tilde{f}(B(\tilde{z}, \varepsilon')) \subset B(\tilde{f}(\tilde{z}), \varepsilon)$$

et notons $\tilde{\Gamma}_0(t')$ le premier point où $\tilde{\Gamma}_0$ atteint $\overline{B(\tilde{z}, \varepsilon')}$.

Si $K' \in \mathcal{K}^*$ est assez proche de K , alors \tilde{K}' est disjoint de $\tilde{\Gamma}_0(]-\infty, t'])$ et de $\tilde{\Gamma}_1(]-\infty, t'])$ et on a $\tilde{K}' \cap B(\tilde{z}, \varepsilon') \neq \emptyset$. Choisissons un point dans $\tilde{K}' \cap B(\tilde{z}, \varepsilon')$, considérons le segment joignant $\tilde{\Gamma}_0(t') = \gamma(t')$ à ce point. Ce segment définit naturellement un arc affine $\tilde{\gamma}'$ défini sur $[t', 1[$, à valeurs dans $\tilde{U}_{K'}$, et aboutissant au premier point de \tilde{K}' rencontré par le segment. Prolongeons cet arc par $\tilde{\Gamma}_0$ sur $]-\infty, t']$. Prolongeons de même l'arc $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}'$ par $\tilde{\Gamma}_1$ sur $]-\infty, t']$. Les deux arcs maintenant définis sur $]-\infty, 1[$ sont d'images disjointes et leurs points limites distincts. D'après le lemme 4.2, on en déduit que $\tilde{\gamma}'$ est un arc d'accès strictement positif de \tilde{K}' , ainsi $K' \notin \mathcal{K}_0^-$.

La seconde partie de la proposition est presque évidente. Soient K_1 et K_2 deux éléments de \mathcal{K}^* dont la réunion K n'appartient pas à \mathcal{K}_0^- . On construit comme précédemment des arcs $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Gamma}_0$ et $\tilde{\Gamma}_1$. Le point z appartient à K_1 ou à K_2 . S'il appartient à K_1 (resp. à K_2), l'arc $\tilde{\gamma}$ est alors un arc d'accès de K_1 (resp. K_2) strictement positif. \square

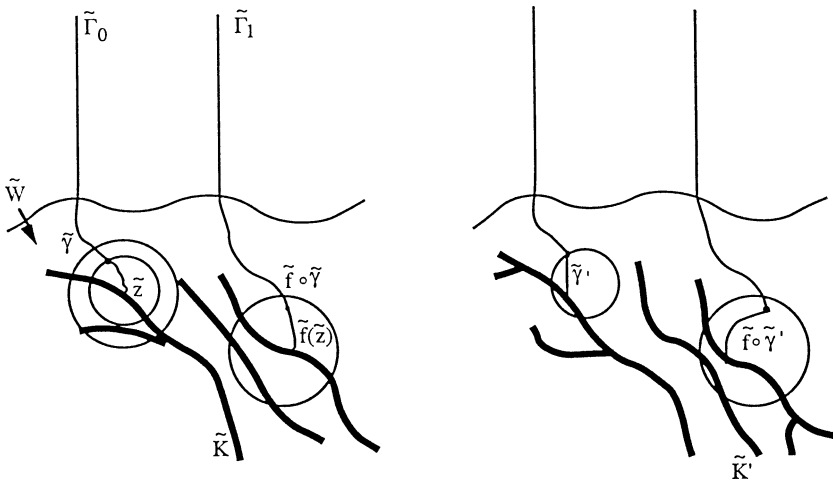


Fig. 1.



Fig. 2.

Remarque. – Du dernier raisonnement, on déduit que si K_1 est inclus dans K_2 , alors tout arc d'accès strictement positif de K_2 aboutissant en un point de K_1 est un arc d'accès positif de K_1 (mais non nécessairement strictement positif). En particulier si $K_1 \subset K_2$ et si K_1 et K_2 ont un arc d'accès en commun, alors $\tilde{\rho}_{K_1} = \tilde{\rho}_{K_2}$.

5.4. Applications

On déduit immédiatement de la proposition 5.3 :

COROLLAIRE 5.4. – L'application $K \rightarrow \tilde{\rho}_K$ est continue sur \mathcal{K}^* .

On en déduit également :

COROLLAIRE 5.5. – Si \mathcal{K}' est une partie compacte de \mathcal{K} stable par réunion finie et si $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{K}_\rho^- \cap \mathcal{K}'$, alors $\overline{\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha} \in \mathcal{K}_\rho^- \cap \mathcal{K}'$.

Démonstration. – L'ensemble $\overline{\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha}$ est limite, suivant le filtre des parties finies I de A , des ensembles $\bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$, qui appartiennent tous à $\mathcal{K}_\rho^- \cap \mathcal{K}'$. \square

Par le lemme de Zorn, on en déduit alors :

COROLLAIRE 5.6. – Toute partie compacte de \mathcal{K} stable par réunion finie, qui contient un élément de \mathcal{K}_ρ^- (resp. de \mathcal{K}_ρ^+), contient un élément de \mathcal{K}_ρ^- (resp. de \mathcal{K}_ρ^+) maximal pour l'inclusion.

6. Une propriété des points indifférents non accumulés

On supposera dans ce paragraphe que 0 est un point fixe indifférent non accumulé. On fixe alors un domaine de Jordan $U \in \mathcal{D}$ ne contenant aucune orbite périodique autre que $\{0\}$, et tel que pour tout domaine de Jordan U' inclus dans U et contenant 0, la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U}')$ qui contient 0 rencontre $\partial U'$. On note K_0 la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0. On fixe ensuite un relèvement $\tilde{f}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}'$ de $f|_{W \setminus \{0\}}$. On va montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1. – Si K est un élément de \mathcal{K}^* inclus dans \overline{U} , alors $\tilde{\rho}_K = \tilde{\rho}_{K_0}$.

Si $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ est une famille d'homéomorphismes de S^1 dépendant continûment de t et si la famille des nombres de rotation n'est pas constante, on peut trouver des valeurs de t pour lesquelles φ_t est semi-stable à gauche. On aura ici une situation analogue. On utilisera dans la démonstration

- la continuité de la fonction $K \mapsto \rho_K$;
- un argument de “connexité” ;
- le lemme 5.1 qui étudie le cas où φ_K est semi-stable.

LEMME 6.1. – Si $K \in \mathcal{K}^*$ est un continu plein inclus dans U , il existe alors une suite $(K_n)_{n \geq 0}$ strictement décroissante d’éléments de \mathcal{K}^* tels que

$$K = \bigcap_{n \geq 0} K_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n.$$

Démonstration. – On peut écrire $K = \bigcap_{n \geq 0} \overline{U}_n$ où U_n est une suite de domaines de Jordan vérifiant $U_0 = U$ et $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit que $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ où K_n est la composante connexe de 0 dans $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U}_n)$. Cette suite est strictement décroissante puisque $K_n \cap \partial U_n \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. \square

Démonstration de la proposition 6.1. – Supposons que $K \in \mathcal{K}^*$ soit inclus dans \overline{U} (et donc dans K_0) et que l’on ait $\tilde{\rho}_K < \tilde{\rho}_{K_0}$. Choisissons alors deux nombres rationnels $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ vérifiant

$$\tilde{\rho}_K < \tilde{\rho}_1 < \tilde{\rho}_2 < \tilde{\rho}_{K_0},$$

et tels que q_1 et q_2 soient premiers entre eux, si on écrit $\tilde{\rho}_1 = p_1/q_1$ et $\tilde{\rho}_2 = p_2/q_2$ sous forme irréductible.

L’ensemble

$$\mathcal{K}' = \{K' \in \mathcal{K} \mid K \subset K' \subset K_0\}$$

est compact, stable par réunion finie et intersecte $\mathcal{K}_{\tilde{\rho}_1}^-$ puisqu’il contient K : il contient donc un élément maximal K_1 , d’après le corollaire 5.6. Celui-ci est plein puisqu’il est maximal et que K_0 est plein, de plus il est contenu dans U d’après la remarque qui suit la proposition 5.3. De la continuité de l’application $K \mapsto \tilde{\rho}_K$ et du lemme 6.1, on déduit que l’on a $\tilde{\rho}_{K_1} = \tilde{\rho}_1$ et que la dynamique de φ_{K_1} est semi-stable à gauche. De façon analogue on peut trouver $K_2 \in \mathcal{K}^*$, compact plein vérifiant

$$K_1 \subset K_2 \subset K_0$$

avec $\tilde{\rho}_{K_2} = \tilde{\rho}_2$ et tel que la dynamique de $\tilde{\varphi}_{K_2}$ soit semi-stable à gauche. Remarquons que K_1 et K_2 n’ont pas d’arcs d’accès en commun puisque $K_2 \subset K_1$ et que $\tilde{\rho}_2 \neq \tilde{\rho}_1$.

Identifions là encore \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} et notons $h : U_{K_1} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{D}}$ le difféomorphisme conforme tangent à l’identité en l’infini. L’homéomorphisme $h \circ f \circ h^{-1}$, défini sur $h(W \setminus K_1)$ se prolonge sur S^1 en φ_{K_1} , on le prolonge de façon arbitraire sur \mathbf{D} : on a alors un homéomorphisme \hat{f} entre $h(W \setminus K_1) \cup \overline{\mathbf{D}}$ et $h(W' \setminus K_1) \cup \overline{\mathbf{D}}$ conjugué à $f|_{W \setminus K_1}$ en dehors de $\overline{\mathbf{D}}$.

On sait, d’après le lemme 1.2, que l’adhérence de toute composante connexe de $K_2 \setminus K_1$ rencontre K_1 . On en déduit que l’ensemble

$$\widehat{K}_2 = h_1(K_2 \setminus K_1) \cup \overline{\mathbf{D}}$$

est un continu invariant par \hat{f} .

LEMME 6.2. – L’ensemble des points limites, dans le cercle des bouts premiers de \widehat{K}_2 , des arcs d’accès de \widehat{K}_2 aboutissant en un point de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{\mathbf{D}}$, est dense.

Démonstration. – Remarquons d’abord que tout point de $S^1 \subset \widehat{K}_2$ est adhérent à $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$. En effet dans le cas contraire on peut trouver une boule ouverte V disjointe de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$ et intersectant S^1 en un intervalle ouvert non trivial I . Puisque l’ensemble des points limites, dans le cercle des bouts premiers de K_1 , des arcs d’accès de K_1 est dense, il existe un arc d’accès de K_1 dont l’image par h_1 est contenue dans U et aboutit en un point de I . Cet arc est alors un arc d’accès commun à K_1 et K_2 , ce qui est impossible.

Donnons-nous maintenant un intervalle ouvert non trivial I du cercle des bouts premiers de \widehat{K}_2 et choisissons dans cet arc deux points distincts, chacun point limite d’un arc d’accès de \widehat{K}_2 . Nous allons montrer que dans l’intervalle fermé $J \subset I$ délimité par ces deux points, il existe un point limite d’un arc d’accès de \widehat{K}_2 aboutissant en un point de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$. Si aucune des deux extrémités n’a cette propriété, on peut trouver un arc simple $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2 \setminus \widehat{K}_2$ ayant une limite en 0 et en 1 (dans \mathbf{R}^2) appartenant à S^1 et ayant les deux extrémités de J comme limites dans le cercle des bouts premiers de \widehat{K}_2 . L’arc γ sépare $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{U}_{\widehat{K}_2}$ en deux composantes connexes et nous venons de montrer que chacune d’entre elles rencontre $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$. On peut choisir dans chacune de ces composantes un arc d’accès de \widehat{K}_2 aboutissant en un point de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$: le point limite, dans le cercle des bouts premiers de \widehat{K}_2 , de l’un de ces deux arcs doit être dans I . \square

Fin de la démonstration de la proposition 6.1. – Si γ est un arc d’accès de K_2 , à valeurs dans $W \setminus K_2$, son image par h est un arc d’accès de \widehat{K}_2 , puisque le point limite n’appartient pas à K_1 . L’ensemble des arcs images obtenus de cette façon est formée des arcs d’accès de \widehat{K}_2 à valeurs dans $h(W \setminus K_2)$ et aboutissant en un point de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$.

Cette application entre arcs d’accès de K_2 à valeurs dans $W \setminus K_2$ et arcs d’accès de \widehat{K}_2 est compatible avec les relations d’équivalences sur les arcs d’accès et définit une application naturelle entre les classes d’équivalence d’arcs d’accès de K_2 et les classes d’équivalences d’arcs d’accès de \widehat{K}_2 . Pour s’en convaincre, il suffit d’utiliser la propriété caractéristique donnée au paragraphe 4 de deux arcs équivalents. Cette propriété nous dit également que l’application induite sur les classes d’équivalence est injective et que son image est formée des classes d’équivalence d’arcs aboutissant en un point de $\widehat{K}_2 \setminus \overline{D}$. Cette application induit donc une injection naturelle H entre une partie dense du cercle des bouts premiers en K_2 et une partie du cercle des bouts premiers en \widehat{K}_2 , qui est également dense d’après le lemme 6.2.

Utilisant la caractérisation liée à l’ordre donnée au paragraphe 4, il est facile de voir que cette application se relève naturellement aux revêtements universels des cercles et que ce relèvement est une application strictement croissante.

Si on note respectivement φ_{K_2} et $\widehat{\varphi}_{\widehat{K}_2}$ les applications définies naturellement par f et \widehat{f} sur les cercles de bouts premiers. On a alors

$$\widehat{\varphi}_{\widehat{K}_2} \circ H = H \circ \varphi_{K_2}.$$

On déduit de tout ceci que $\widehat{\varphi}_{\widehat{K}_2}$ a même nombre de rotation que φ_{K_2} et comme H est d’image dense, on en déduit que la dynamique de $\widehat{\varphi}_{\widehat{K}_2}$ est semi-stable à gauche.

On utilise maintenant le lemme 5.1. On sait que \widehat{f}^{q_2} a un point fixe sur $\partial U_{\widehat{K}_2}$. Comme q_1 et q_2 sont premiers entre eux, ce point appartient à $h(K_2 \setminus K_1)$ et on en déduit que $K_2 \setminus K_1$ contient un point périodique et donc une orbite périodique. Ceci contredit les hypothèses. \square

Une démonstration en tout point analogue donne le résultat suivant :

PROPOSITION 6.2. – *Si 0 est un point indifférent non dégénéré, alors l’application $K \mapsto \tilde{\rho}_K$ admet une limite quand K tend vers $\{0\}$.*

On déduit de ce paragraphe que l'on peut définir le nombre de rotation, élément de \mathbf{T}^1 , d'un point fixe indifférent non dégénéré, c'est la limite de ρ_K quand K tend vers $\{0\}$. Ce nombre est égal à la valeur commune des ρ_K , K proche de $\{0\}$, dans le cas où 0 est non accumulé.

7. Éclatements

7.1. Éclatements, symétrisé d'un éclatement

On appelle *éclatement* de $K \in \mathcal{K}$, ou *K-éclatement* toute compactification du bout de l'anneau U_K correspondant à K , obtenue en ajoutant le cercle S^1 , telle que f se prolonge en un homéomorphisme au voisinage de S^1 . La restriction φ de f à S^1 préserve alors l'orientation et admet un nombre de rotation.

Tout homéomorphisme φ' de S^1 vérifiant $\varphi' \circ h = h \circ \varphi$, où $h : S^1 \rightarrow S^1$ est une application continue de degré 1, définit naturellement un nouvel éclatement dont φ' est l'application au bord. On dira que cet éclatement est un *facteur* de l'éclatement initial (par abus de langage, on dira que l'éclatement φ' est un facteur de l'éclatement φ). En particulier, φ' à même nombre de rotation que φ .

On a rencontré les éclatements par bouts premiers, on peut aussi dans le cas où f est un difféomorphisme, éclater le point fixe en ajoutant le cercle des demi-droites issues de ce point. On peut également construire des facteurs de tels éclatements, par exemple si l'homéomorphisme au bord a un nombre de rotation rationnel ou alors s'il a un nombre de rotation irrationnel et s'il n'est pas minimal.

Étant donné un éclatement, on peut construire un espace topologique A en prenant deux copies du compactifié que l'on recolle par l'identité sur le cercle S^1 . On obtient un ensemble homéomorphe à un anneau ouvert et un homéomorphisme F , le *symétrisé* de l'éclatement, défini au voisinage d'une courbe fermée invariante non homotope à zéro. On notera σ l'involution naturellement définie sur A .

7.2. Éclatements non indifférents

On dira qu'un éclatement est *fini* si l'application au bord φ a un nombre fini d'orbites périodiques.

On dira qu'un éclatement φ est *indifférent* s'il n'est pas fini ou alors s'il est fini et s'il existe un point périodique de φ qui est un point fixe indifférent de F^q , où q est la période commune de ces orbites périodiques. Dans le cas contraire on dira qu'il est non indifférent. Un éclatement est donc non indifférent s'il est fini et si chaque point périodique de φ est un point fixe non indifférent de F^q .

S'il est clair que tout facteur d'un éclatement fini est encore fini, nous avons le résultat suivant :

LEMME 7.1. – *Tout facteur φ' d'un K-éclatement fini indifférent φ est indifférent.*

Démonstration. – Supposons que φ' ne soit pas indifférent et montrons qu'il en est de même de φ . La semi-conjugaison $h : S^1 \rightarrow S^1$ entre φ et φ' se prolonge en une semi-conjugaison de même nom $h : A \rightarrow A'$ entre les symétrisés des compactifiés, égale à l'identité sur les deux copies de U_K . Soit z un point fixe de φ , qui est isolé puisque φ est fini, et z' l'image de z par h . On peut considérer un système (topologique) de coordonnées polaires $(\theta, r) \in \mathbf{T}^1 \times [-1, +1]$ au voisinage du cercle $S^1 \in A$ vérifiant $\sigma(\theta, r) = (\theta, -r)$. Notons $(\theta_0, 0)$ les coordonnées de z et fixons $\varepsilon_0 > 0$ petit.

Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe $\varepsilon' = \nu(\varepsilon) > 0$ tel que l'image ou l'image inverse par F de chacun des segments

$$\{\theta_0 - \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

et

$$\{\theta_0 + \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

est disjointe du rectangle

$$[\theta_0 + \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \times [-\varepsilon', \varepsilon'].$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Puisque z' n'est pas indifférent, on peut trouver un domaine de Jordan Δ' , voisinage isolant de z' tel que $h^{-1}(\Delta') \subset \mathbf{T}^1 \times]-\nu(\varepsilon), +\nu(\varepsilon)[$. Puisque les points du cercle $S^1 \subset A'$, dont la préimage est un intervalle non trivial de $S^1 \subset A$, est dénombrable, on peut supposer, quitte à perturber la frontière de Δ' , que celle-ci rencontre le cercle $S^1 \subset A'$ en un nombre fini de points et que chacun d'eux n'a qu'un antécédent par h . L'ensemble $h^{-1}(\Delta')$ est alors un domaine de Jordan et il est isolant. Un résultat de Kérékjártó [22] (voir également [24]) nous dit que toute composante connexe de l'intersection de deux domaines de Jordan est un domaine de Jordan, en particulier la composante connexe Δ de

$$h^{-1}(\Delta') \cap]\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$$

qui contient z . La frontière de Δ est formée de points de la frontière de $h^{-1}(\Delta')$ et de points des segments

$$\{\theta_0 - \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

et

$$\{\theta_0 + \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Puisque $h^{-1}(\Delta')$ est isolant, aucun point de sa frontière n'a son orbite entièrement contenue dans $\bar{\Delta}$. Comme il en est de même de tout point appartenant aux segments

$$\{\theta_0 - \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

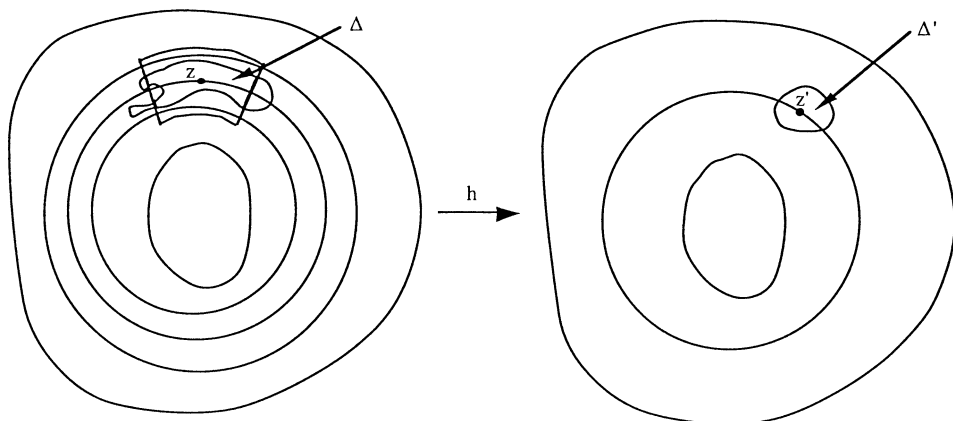


Fig. 3.

et

$$\{\theta_0 + \varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon],$$

le domaine de Jordan Δ est isolant. On a montré que z est non indifférent. \square

7.3. Construction d'éclatements non indifférents

Il est facile de construire un éclatement fini à partir d'un éclatement φ qui n'est pas périodique. Si l'éclatement φ n'est pas fini et a un nombre de rotation p/q , avec p et q premiers entre eux, on considère un ensemble invariant par φ de nq composantes connexes distinctes I_k , $1 \leq k \leq nq$, du complémentaire de l'ensemble des points périodiques. On a une semi-conjugaison naturelle envoyant chaque composante connexe de $S^1 - \bigcup_{1 \leq k \leq nq} I_k$ sur un point périodique. Le résultat qui suit indique comment construire un éclatement non indifférent.

PROPOSITION 7.2. – *Soit $U \in \mathcal{D}$. On suppose que la composante connexe K de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ contenant 0 rencontre ∂U et que ∂U ne contient aucun point périodique dont l'orbite est contenue dans \overline{U} . Alors l'éclatement φ_K défini par les bouts premiers a un facteur non indifférent.*

Démonstration. – Si le nombre de rotation ρ_K de φ_K n'appartient pas à \mathbf{Q}/\mathbf{Z} , il n'y a pas de point périodique et φ_K est non indifférent. On supposera donc que $\rho_K = 0$, le cas rationnel se traitant de même. Grâce au théorème de Schoënfliès, on peut toujours supposer que ∂U est le cercle S^1 .

Pour tout $z \in K \cap \partial U$, le rayon externe

$$\begin{aligned} \gamma_z : [0, 1[&\rightarrow \mathbf{R}^2, \\ t &\mapsto (2 - t)z \end{aligned}$$

est un arc d'accès de K aboutissant en z . Tout arc d'accès de K aboutissant en z et à valeurs dans $\mathbf{R}^2 \setminus U$ est clairement équivalent à γ_z . Notons $l(z) \in S^1$ le point limite de γ_z pour la compactification en bouts premiers. La fonction l définie sur $K \cap \partial U$ est alors continue et injective et induit un homéomorphisme entre la partie compacte $K \cap \partial U$ et une partie fermée de S^1 disjointe de l'ensemble $\text{Fix}(\varphi_K)$ des points fixes de φ_K , d'après les hypothèses faites sur ∂U . La continuité de l est une propriété classique des bouts premiers, on peut la montrer par exemple en passant au revêtement universel, en utilisant la relation d'ordre et les lemmes 4.1 et 4.2. De la même façon, on montre que la réunion de $\partial U \setminus K$ et de $l(K \cap \partial U)$ est une courbe fermée simple non homotope à zéro du compactifié par bouts premiers de U_K .

D'après les hypothèses, $l(K \cap \partial U)$ et $\text{Fix}(\varphi_K)$ sont deux parties fermées disjointes, il existe donc une famille finie $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ de composantes connexes disjointes de $S^1 \setminus \text{Fix}(\varphi_K)$ dont la réunion contient l'image de l . Nous considérons le facteur φ de φ_K défini naturellement par cette famille, nous allons montrer que l'éclatement fini φ est non indifférent.

Remarquons que la réunion de $\partial U \setminus K$ et de $l(K \cap \partial U)$ est encore une courbe fermée simple C dans le nouveau compactifié. Notons A l'anneau défini par recollement de deux copies du compactifié, σ l'involution naturelle définie sur A et F le symétrisé. Soit $z' \in S^1$ un point fixe de φ et V un voisinage de z disjoint de $C \cup \sigma(C)$, invariant par σ , assez petit pour que l'orbite de tout point de $V \cap S^1$ autre que z' , sorte de V . Si K' est une partie compacte connexe de A invariante par F , contenant z' , ne se réduisant pas à ce point, et contenue dans V , il en est de même de $K' \cup \sigma(K')$. Comme l'adhérence de toute composante connexe de $K' \cup \sigma(K') \setminus \{z'\}$ contient z' (c'est le lemme 1.2) et comme $K' \cup \sigma(K')$ ne rencontre S^1 qu'au point z' , on peut écrire

$$K' \cup \sigma(K') = K'' \cup \sigma(K'')$$

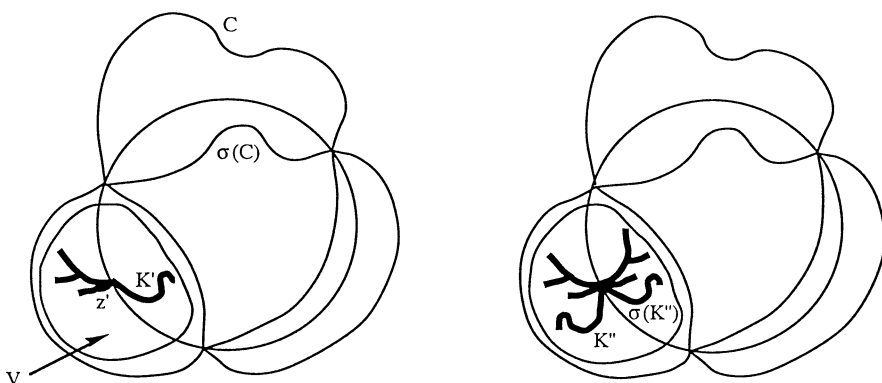


Fig. 4.

où $K'' = K' \cap (U_K \sqcup S^1)$ est un continu contenu dans le compactifié par bouts premiers original $U_K \sqcup S^1$ de U_K et ne rencontre S^1 qu'en z' . Toujours pour les mêmes raisons, l'ensemble $K'' \setminus \{z\} \cup K$ est une partie compacte connexe invariante par f . Comme elle est contenue dans \overline{U} et comme elle est strictement plus grande que K , on a une contradiction. \square

Remarquons en particulier que si φ_K est fini, il est non indifférent.

8. Éclatements et indices

8.1. Calcul d'indice

Commençons par un résultat classique :

PROPOSITION 8.1. – Soit φ un éclatement fini de $K \in \mathcal{K}$. Si $U \in \mathcal{D}$ contient K et si $\overline{U} \setminus K$ n'a pas de point fixe, alors on a :

$$i(f, \partial U) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{z \in \text{Fix } \varphi} i(F, z).$$

Démonstration. – On peut plonger dans \mathbf{R}^2 l'anneau A , défini par recollement des copies du compactifié, par une application h préservant l'orientation, envoyant U_K sur $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\mathbf{D}}$ et $\sigma(U_K)$ sur $\mathbf{D} \setminus \{0\}$. On note alors Γ_1 l'image de ∂U et Γ_2 l'image de $\sigma(\partial U)$. L'homéomorphisme $G = h \circ F \circ h^{-1}$ est alors défini sur un voisinage de l'anneau fermé délimité par Γ_1 et Γ_2 . On a

$$i(G, \Gamma_1) = i(f, \partial U)$$

et

$$i(G, \Gamma_2) = 2 - i(f, \partial U),$$

cette dernière relation étant conséquence du fait que la caractéristique d'Euler de la sphère S^2 est 2. La proposition est alors une conséquence des égalités

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \text{Fix}(\varphi)} i(F, z) &= \sum_{z' \in h(\text{Fix}(\varphi))} i(G, z') = i(G, \Gamma_1) - i(G, \Gamma_2) \\ &= i(f, \partial U) - (2 - i(f, \partial U)). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. – Si φ est un éclatement de $K \in \mathcal{K}$ et si $z \in \text{Fix}(\varphi)$ est un point fixe isolé du symétrisé F , c’est un puits, une source ou un point semi-stable de φ : dans les deux premiers cas, l’indice $i(F, z)$ est impair, dans le troisième cas il est pair. Si φ est fini et si tous les points fixes de φ sont des points isolés de $\text{Fix}(F)$, il y a un nombre identique de puits et de sources de φ : l’entier

$$\sum_{z \in \text{Fix } \varphi} i(F, z)$$

est bien pair. Il existe alors un voisinage $U \in \mathcal{D}$ de K tel que $\overline{U} \setminus K$ n’a pas de point fixe et on a

$$i(f, K) = i(f, \partial U) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{z \in \text{Fix } \varphi} i(F, z).$$

8.2. Étude des points fixes d’un éclatement

Commençons par montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 8.2. – *Soit φ un éclatement de $K \in \mathcal{K}$. Tout point $z \in \text{Fix}(\varphi)$, qui est un point fixe isolé du symétrisé F , est non accumulé.*

Démonstration. – Soit $z \in \text{Fix}(\varphi)$ un point fixe isolé de F . Fixons deux domaines simplement connexes V et V' de U_K , avec $V' \cup f(V') \subset V$, assez proches de z dans l’éclatement φ pour ne contenir aucun point fixe et dont les frontières dans l’éclatement sont des courbes de Jordan contenant un voisinage de z dans S^1 (en d’autres termes la moitié de “petits disques” de A centrés en z).

On reprend maintenant la démonstration de la proposition 3.1 en changeant quelques détails. On peut toujours supposer f définie sur \mathbf{R}^2 . On note cette fois-ci $X = \text{Fix}(f)$ et U la composante connexe de $\mathbf{R}^2 \setminus X$ qui contient V ; celle-ci est invariante car $f(V) \cap V \neq \emptyset$. On note alors $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ le revêtement universel de U ; on fixe une composante connexe V_0 de $\pi^{-1}(V)$, qui est homéomorphe à V puisque V est simplement connexe; on note V'_0 la composante connexe de $\pi^{-1}(V')$ contenue dans V_0 ; enfin on considère le relèvement \tilde{f} de $f|_U$ tel que $\tilde{f}(V'_0) \subset V_0$. Si V' contient une orbite périodique O , l’orbite par \tilde{f} de tout élément de $\pi^{-1}(O) \cap V'_0$ doit rester dans V'_0 et sera donc périodique. Ceci est impossible car \tilde{f} est un homéomorphisme du plan sans point fixe et préservant l’orientation. Toute orbite périodique de F proche de z doit être située du même côté de S^1 et peut donc être choisie dans V' si le point z est accumulé, cette situation est donc impossible. \square

PROPOSITION 8.3. – *Soit φ un éclatement de $K \in \mathcal{K}$. Pour tout point fixe z de φ qui est un point fixe isolé de type selle du symétrisé F , la suite $i(F^k, z)_{k \geq 1}$ est bien définie et constante, égale à un entier $s \leq 0$. Si, de plus, z est un puits ou une source de φ , on a $s \leq -1$.*

Démonstration. – La proposition 8.2 nous dit que cette suite est bien définie. Il reste alors à montrer que l’entier q qui apparaît dans la proposition 3.3 est égal à 1. Or le cas où $q \geq 2$ n’est possible qu’en présence d’une certaine rotation au voisinage du point z (par exemple pour un point fixe de type selle avec réflexion, voir [25]). Ceci ne se produit pas dans notre cas, à cause de l’invariance de S^1 et de chacun de ses côtés. On peut se référer à la démonstration originale de la proposition 3.3 pour obtenir le résultat. On peut également utiliser l’artifice suivant.

On considère un petit domaine de Jordan Δ de A centré en z , invariant par σ , ne contenant aucune orbite périodique. On peut définir un homéomorphisme local F_0 défini sur U , commutant avec σ , coïncidant avec F sur $S^1 \cap \Delta$, et conjuguée sur Δ au modèle standard d’une selle

dégénérée possédant r demi-variétés stables fixes alternant avec r demi-variétés instables fixes. On peut alors considérer l'homéomorphisme local F_1 défini sur Δ , égal à F d'un côté de S^1 et à F_0 de l'autre, ainsi que l'homéomorphisme $F_2 = \sigma \circ F_1 \circ \sigma^{-1}$ qui a des propriétés analogues. Il est facile de voir que z est un point fixe de type selle non accumulé pour chacune des applications F_0, F_1 et F_2 , plus précisément que Δ est isolant et ne contient pas d'orbites périodiques. On peut appliquer la proposition 3.3 à chacune de ces applications. Si on choisit r assez grand, chacun des indices

$$i(F_0, z), \quad i(F_1, z), \quad i(F_2, z)$$

sera négatif et chacune des suites

$$(i(F_0^k, z))_{k \geq 1}, \quad (i(F_1^k, z))_{k \geq 1}, \quad (i(F_2^k, z))_{k \geq 1}$$

sera donc constante. On en déduit que la suite $(i(F^k, z))_{k \geq 1}$ est constante en utilisant l'égalité

$$i(F^k, z) + i(F_0^k, z) = i(F_1^k, z) + i(F_2^k, z)$$

qui se démontre en calculant l'indice sur le bord d'un petit domaine de Jordan $\Delta' \subset \Delta$ invariant par σ . \square

9. Application à la dynamique locale au voisinage d'un point fixe

9.1. Indice d'un point fixe isolé dans le cas conservatif

Le paragraphe précédent permet de retrouver le résultat suivant de Pelikan et Slaminka [31], montré auparavant pour les difféomorphismes par N.A. Nikishin [29] et C.P. Simon [34].

THÉORÈME 9.1. – *Si $f : W \rightarrow W'$ préserve une mesure borélienne chargeant les ouverts et si 0 est un point fixe isolé, alors $i(f, 0) \leq 1$.*

Démonstration. – Grâce aux résultats du paragraphe 3, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où z est indifférent et non accumulé. On considère alors un domaine de Jordan U_0 , dont l'adhérence est contenue dans W et ne contient aucune orbite périodique, tel que pour tout domaine de Jordan $U \subset U_0$, la composante connexe K de $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0 rencontre ∂U . On choisit U vérifiant $\overline{U} \subset U_0$. Grâce à la proposition 7.2, on peut trouver un facteur non indifférent de l'éclatement φ_K défini par les bouts premiers. Puisque f préserve une mesure chargeant les ouverts, aucun des points fixes (s'il y en a) de φ n'est un point fixe dissipatif du symétrisé $F : c$ 'est donc un point-selle. En particulier, on a $i(F, z) \leq 0$ et on peut conclure par la proposition 8.1 puisque

$$i(f, z) = i(f, \partial U_0) \leq 1. \quad \square$$

9.2. Dynamique au voisinage d'un point fixe d'indice ≥ 2

On va préciser le théorème 9.1. On peut trouver une version plus faible du résultat qui suit dans [23], où l'on montre que l'une au moins des assertions (i) ou (ii) est vérifiée sous les hypothèses du théorème.

THÉORÈME 9.2. – *On suppose que 0 est un point fixe isolé de $f : W \rightarrow W'$ et que $i(f, 0) \geq 2$. On a alors les deux propriétés suivantes :*

(i) il existe un domaine $V \subset W$ tel que la suite $(f^n(V))_{n \geq 0}$ est bien définie et formée de domaines disjoints deux à deux de W ;

(ii) il existe un domaine $V' \subset W'$ tel que la suite $(f^n(V'))_{n \leq 0}$ est bien définie et formée de domaines disjoints deux à deux de W' .

Démonstration. – Sous les hypothèses du théorème, le point fixe est indifférent et non accumulé. On reprend alors la démonstration précédente en gardant les mêmes notations. On sait alors que l'on a

$$\sum_{z \in \text{Fix}(\varphi)} i(F, z) = 2(i(f, 0) - 1) \geq 2.$$

L'application φ a donc des points fixes, qui sont des points fixes non indifférents de F . Notons A_1 l'ensemble des puits de φ , A_2 l'ensemble des sources de φ et A_3 l'ensemble des points semi-stables. Chaque point fixe $z \in A_3$ est un point-selle de F puisqu'il n'est pas dissipatif : on a donc $i(F, z) \leq 0$. On en déduit que l'on a

$$\sum_{z \in A_1} i(F, z) + \sum_{z \in A_2} i(F, z) \geq 2.$$

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que l'un des puits et l'une des sources de φ sont un point fixe dissipatif de F . Ceci est une conséquence de l'égalité ci-dessus et des remarques suivantes :

- si $z \in A_1 \cup A_2$ est dissipatif, alors $i(F, z) = 1$;
- si $z \in A_1 \cup A_2$ est un point selle, alors $i(F, z) \leq -1$;
- les ensembles A_1 et A_2 ont même cardinal. \square

9.3. Un résultat de M. Brown

On peut retrouver le résultat suivant de M. Brown [6].

THÉORÈME 9.3. – Si 0 est un point fixe isolé de $f : W \rightarrow W'$ et si $i(f, 0) \neq 1$, alors l'indice $i(f^k, 0)$ est bien défini pour tout $k \neq 0$ et indépendant de k .

Démonstration. – On sait, grâce à la proposition 3.1 que 0 n'est pas accumulé et grâce à la proposition 3.2 que 0 n'est pas dissipatif. Si 0 est un point selle, le théorème est une conséquence de la proposition 3.3. Si 0 est indifférent, on reprend la démonstration du théorème 9.1 en gardant les mêmes notations. Pour chaque point fixe z de φ , la suite $(i(F^k, z))_{k \geq 1}$ est constante, que z soit un point fixe dissipatif de F ou un point-selle. On applique alors la proposition 8.1. \square

9.4. Détermination de la suite $i(f^k, 0)_{k \geq 1}$

En fait, on a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 9.4. – Si 0 est un point fixe indifférent non accumulé de f , alors il existe $q \geq 1$ et $r \in \mathbf{Z}$ tels que pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{cases} i(f^k, 0) = 1 & \text{si } k \notin q\mathbf{Z}, \\ i(f^k, 0) = r & \text{si } k \in q\mathbf{Z}. \end{cases}$$

L'entier q est le dénominateur du nombre de rotation de 0 , écrit sous forme irréductible, si celui-ci est rationnel ; il est égal à 1 si celui-ci est irrationnel.

9.5. Un résultat dans le cas conservatif

Terminons ce paragraphe par un résultat valable dans le cas conservatif. On suppose que $f : W \rightarrow W'$ préserve une mesure borélienne chargeant les ouverts ou plus généralement que la conclusion du théorème 9.2 n'est pas vérifiée. On suppose de plus que 0 est indifférent non accumulé. On considère un domaine de Jordan U_0 , dont l'adhérence est contenue dans W et ne contient aucune orbite périodique, tel que pour tout domaine de Jordan $U \subset U_0$, la composante connexe K de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0 rencontre ∂U . On note alors \mathcal{K}_0 (resp. \mathcal{K}'_0) l'ensemble des éléments de \mathcal{K} inclus dans \overline{U}_0 (resp. dans U_0) et on définit

$$\mathcal{K}_0^* = \mathcal{K}_0 \setminus \{\{0\}\}, \quad \mathcal{K}'_0^* = \mathcal{K}'_0 \setminus \{\{0\}\}.$$

PROPOSITION 9.5. – *Si la suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ est constante égale à 1, trois cas sont possibles :*

- (i) *le nombre de rotation $\rho \in \mathbb{T}^1$ de 0 est irrationnel, c'est le nombre de rotation de tout éclatement de $K \in \mathcal{K}'_0$;*
- (ii) *le nombre de rotation ρ est rationnel, tout éclatement de $K \in \mathcal{K}'_0$ a un nombre de rotation égal à ρ et est semi-stable à droite ;*
- (iii) *le nombre de rotation ρ est rationnel, tout éclatement de $K \in \mathcal{K}'_0$ a un nombre de rotation égal à ρ et est semi-stable à gauche.*

Démonstration. – Par définition, nous savons que ρ est le nombre de rotation commun des φ_K , $K \in \mathcal{K}_0^*$. Supposons d'abord que ce nombre est nul et démontrons la série d'assertions suivantes.

(a) *Les homéomorphismes φ_K , $K \in \mathcal{K}_0^*$, ne sont jamais égaux à l'identité.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.2.

(b) *L'ensemble des compacts $K \in \mathcal{K}_0^*$, avec φ_K semi-stable à droite (resp. semi-stable à gauche), est fermé dans \mathcal{K}_0^* .*

C'est un corollaire immédiat de la proposition 5.3.

(c) *Pour tout $U \in \mathcal{D}$ inclus dans U_0 , l'homéomorphisme φ_K est semi-stable, où K est la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ qui contient 0.*

Si ce n'est pas le cas, nous pouvons trouver un facteur fini φ de φ_K , plus fin que le facteur défini dans la proposition 7.1 (et donc non indifférent) qui admet au moins un puits et une source (dans S^1). Il suffit d'ajouter aux intervalles I_k définis dans cette proposition, dans le cas où la dynamique est toujours dans le même sens sur ces intervalles, un autre intervalle de $S^1 \setminus \text{Fix}(\varphi_K)$ où la dynamique est dans le sens contraire, puis de prendre le facteur naturellement défini. Puisque les puits et les sources de φ ne sont pas des points fixes dissipatifs de F mais des points-selles d'indice de Lefschetz au plus égal à -1 , nous en déduisons grâce à la proposition 8.1 que $i(f, 0) \leq 0$, ce qui est impossible.

(d) *Pour tout $K \in \mathcal{K}'_0^*$, l'homéomorphisme φ_K est semi-stable.*

C'est une conséquence des assertions (b) et (c), ainsi que du lemme 6.1 qui énonce que tout compact plein $K \in \mathcal{K}'_0$ est limite d'une suite strictement décroissante de compacts du type décrit dans (c).

(e) *L'ensemble des compacts $K \in \mathcal{K}'_0^*$, avec φ_K semi-stable à droite (resp. semi-stable à gauche), est ouvert dans \mathcal{K}'_0^* .*

C'est une conséquence des assertions (a), (b) et (d).

(f) *Les homéomorphismes φ_K , $K \in \mathcal{K}_0^*$, sont tous semi-stables à droites ou tous semi-stables à gauche.*

Notons K_0 la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\overline{U}_0)$ et supposons que φ_{K_0} est semi-stable à droite. S'il existe $K \in \mathcal{K}_0^*$ tel que φ_K soit semi-stable à gauche, nous pouvons considérer un

élément maximal K_1 , dans \mathcal{K}_0^* vérifiant cette propriété. De la remarque qui suit la proposition 5.3 et du fait que f n'a pas de point fixe sur ∂U_0 , on en déduit que K_1 ne peut pas rencontrer ∂U_0 et appartient donc à $\mathcal{K}_0'^*$. Il est plein et limite d'une suite strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{K}_0'^*$. La contradiction provient de l'assertion (e) et de la maximalité de K_1 .

On a une situation analogue si le nombre de rotation est rationnel. Pour montrer la proposition, on considère maintenant un éclatement φ de $K \in \mathcal{K}'_0$. On peut toujours supposer que K est plein et considérer une suite strictement décroissante $(K_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{K}_0 convergeant vers K . Le corollaire 5.4 et la construction faite dans la proposition 6.1 montre que la suite des nombres de rotation $(\rho_{K_n})_{n \geq 0}$ converge vers le nombre de rotation de φ et que celui-ci est donc égal à ρ . Si ce nombre est rationnel et si chaque φ_{K_n} est semi-stable à droite (resp. à gauche) il en sera de même de φ . On ne peut pas affirmer dans cette démonstration que φ est différent de l'identité car le lemme 5.2 n'est démontré que pour les éclatements par bouts premiers. \square

Remarques. – La proposition 9.4 nous dit en particulier que si $K \in \mathcal{K}$ contient z et admet un voisinage U_1 qui ne contient aucun point périodique autre que z , alors $\rho_K = \rho$ et la dynamique de φ_K est semi-stable à droite dans le cas (i) et semi-stable à gauche dans le cas (ii). En effet, d'après la remarque qui suit la proposition 3.3, aucun domaine de Jordan $U \subset U_1$ contenant 0 n'est isolant et par l'argument vu au paragraphe 2 sur les points indifférents, la composante connexe de $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{U})$ rencontre ∂U . On peut donc appliquer la proposition 9.4 avec $U_0 = U_1$.

Il n'est pas évident que les situations (ii) et (iii) soient elles-mêmes possibles. Si on peut montrer qu'elles sont impossibles, on obtiendra une preuve bien plus simple des résultats des paragraphes 11 et 12.

10. Rappels sur les homéomorphismes sans points errants de l'anneau compact

Nous commencerons dans ce paragraphe par rappeler certains résultats sur les homéomorphismes conservatifs de l'anneau compact, dus à J. Franks, dont nous aurons besoin plus tard. Nous rajouterons un énoncé qui nous sera nécessaire.

On note

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbf{T}^1 \times [0, 1], \\ (x, y) &\mapsto (x + \mathbf{Z}, y) \end{aligned}$$

le revêtement universel de l'anneau $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ et

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1], \\ (x, y) &\mapsto (x + 1, y) \end{aligned}$$

la transformation de recouvrement.

10.1. Ensemble de rotation

On se donne un homéomorphisme f de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ homotope à l'identité et un relèvement \tilde{f} de f au revêtement universel. Si O est une orbite périodique de f de période q et si $z \in \pi^{-1}(O)$, il existe un entier $p \in \mathbf{Z}$, indépendant de z , tel que $f^q(z) = T^p(z)$. Le nombre rationnel p/q est par définition le *nombre de rotation* de O . Plus généralement si μ est une mesure borélienne de probabilité invariante par f , son nombre de rotation (pour le relèvement \tilde{f}) est

$$\tilde{\rho}(\mu) = \int_{\mathbf{T}^1 \times [0, 1]} p_1 \circ \tilde{f} - p_1 \, d\mu,$$

où $p_1 : (x, y) \mapsto x$ est la première projection. L'ensemble de rotation de \tilde{f} est, par définition, l'ensemble des nombres de rotation des mesures boréliennes de probabilité invariantes de f , c'est un segment.

10.2. Disques positifs et négatifs

Un *disque positif* (resp. un *disque négatif*) de \tilde{f} est un domaine simplement connexe V de $\mathbf{R} \times]0, 1[$ vérifiant

$$\tilde{f}(V) \cap V = \emptyset$$

et

$$\tilde{f}^q(V) \cap T^p(V) \neq \emptyset$$

pour des entiers $q > 0$ et $p > 0$ (resp. $p < 0$).

10.3. Critères d'existence d'orbites périodiques

Le lemme crucial, dans cette étude, est la proposition 10.1 due à J. Franks, qui est conséquence du théorème d'indice de Brouwer (Proposition 1.1). On utilisera également les corollaires 10.2 et 10.3 et la proposition 10.4 (voir Franks [13–15]) :

PROPOSITION 10.1. – *On suppose que f n'a pas de point errant. Si \tilde{f} admet un disque positif et un disque négatif, alors \tilde{f} a un point fixe.*

Appliquant ce lemme aux applications $f^q \circ T^{-p}$, on obtient :

COROLLAIRE 10.2. – *Si f n'a pas de points errants, l'ensemble des nombres de rotation des orbites périodiques de f est un intervalle de \mathbf{Q} .*

En utilisant, de plus, le théorème ergodique de Birkhoff, on a :

COROLLAIRE 10.3. – *On suppose que f n'a pas de point errant. Tout nombre rationnel $\tilde{\rho}$, appartenant à l'intérieur de l'ensemble de rotation de \tilde{f} est nombre de rotation d'une orbite périodique de période q de f , l'entier q étant le dénominateur de $\tilde{\rho}$, écrit sous forme irréductible.*

Énonçons maintenant la variante suivante du théorème de Poincaré–Birkhoff, due également à Franks :

PROPOSITION 10.4. – *On suppose que toute courbe non homotope à zéro de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1[$ rencontre son image par f . Tout nombre rationnel, compris entre les nombres de rotation définis sur les deux bords par le relèvement \tilde{f} est nombre de rotation d'une orbite périodique de f .*

10.4. Un nouveau critère d'existence d'orbites périodiques

PROPOSITION 10.5. – *On suppose que f n'a pas de point errant. Si \tilde{f} a un point fixe et s'il existe un arc simple joignant le bord $\mathbf{R} \times \{0\}$ au bord $\mathbf{R} \times \{1\}$ dont l'image Γ vérifie $\tilde{f}(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$, alors l'ensemble des nombres de rotation des orbites périodiques de f est un intervalle non trivial de \mathbf{Q} .*

Démonstration. – On peut toujours supposer que $\tilde{f}(\Gamma)$ est à droite de Γ . On considère alors un domaine simplement connexe V_0 compris entre Γ et $f(\Gamma)$. Puisque f n'a pas de point errant, on peut considérer le premier entier strictement positif, noté q_0 , tel que

$$f^{q_0}(\pi(V_0)) \cap \pi(V_0) \neq \emptyset,$$

puis le plus petit entier, noté $p_0 \in \mathbf{Z}$, tel que

$$\tilde{f}^{q_0}(V_0) \cap T^{p_0}(V_0) \neq \emptyset.$$

Le fait que V_0 soit compris entre Γ et $\tilde{f}(\Gamma)$ nous dit que $p_0 \geq 1$. Si l'application $\tilde{f}^{q_0} \circ T^{-1}$ a un point fixe, la démonstration est terminée d'après le corollaire 10.2. Dans le cas contraire, on va voir que l'on peut toujours choisir V_0 pour que l'entier p_0 soit supérieur ou égal à 2. Supposons que p_0 soit égal à 1, fixons $z \in V_0 \cap \tilde{f}^{-q_0}(T(V_0))$ puis un domaine simplement connexe $V_1 \subset V_0$, voisinage de z assez petit pour avoir

$$\tilde{f}^{q_0}(V_1) \cap T(V_1) = \emptyset$$

et

$$\tilde{f}^{q_0}(V_1) \subset T(V_0),$$

ce qui est possible puisque $\tilde{f}^{q_0}(z) \neq z$. On considère le premier entier strictement positif, noté q_1 , tel que

$$F^{q_1}(\pi(V_1)) \cap \pi(V_1) \neq \emptyset,$$

puis le plus petit entier, noté p_1 , tel que

$$f^{q_1}(V_1) \cap T^{p_1}(V_1) \neq \emptyset.$$

On voit immédiatement que l'on a $q_1 \geq q_0$ et même $q_1 \geq 2q_0$. De l'inclusion

$$\tilde{f}^{q_1}(V_1) \subset \tilde{f}^{q_1 - q_0}(T(V_0))$$

on déduit que l'on a

$$\tilde{f}^{q_1}(V_1) \cap T^p(V_1) = \emptyset,$$

si $p \leq 1$. Ainsi on a $p_1 \geq 2$.

Le domaine V_1 est un disque positif du relèvement $\tilde{g} = \tilde{f}^{q_1} \circ T^{-1}$ de f^{q_1} . On obtient un disque négatif de g en choisissant un domaine de Jordan, voisinage assez petit du point fixe z de f si celui-ci n'est pas sur le bord de l'anneau ; en choisissant un domaine de Jordan assez proche de z et dont la frontière contient un voisinage de z dans le bord de l'anneau, si ce point fixe est sur le bord de l'anneau. Comme g n'a pas de point errant, on en déduit que \tilde{g} a un point fixe. Le corollaire 10.2 nous dit que l'ensemble des nombres de rotation des orbites périodiques de f contient l'intervalle $[0, 1/q_1]$. \square

11. Application aux homéomorphismes conservatifs de la sphère

On va montrer dans ce paragraphe le théorème suivant, qui généralise un résultat de M. Handel [18] (cas où f est topologiquement transitif) ainsi qu'un résultat de J. Franks [16] (cas où f préserve une mesure de probabilité chargeant les ouverts).

THÉORÈME 11.1. – *Si $f: S^2 \rightarrow S^2$ a au moins trois points fixes et n'a pas de point errant, alors f a une infinité d'orbites périodiques.*

Commençons par quelques compléments sur les résultats obtenus jusqu'au paragraphe 9.

Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation d'une surface orientable M et K un continu plein et contractile dans M . On dira que K est un continu accumulé, non accumulé, indifférent, dissipatif, de type selle si le point fixe $\{K\}$ de l'homéomorphisme f défini naturellement sur la surface \widehat{M} obtenue en identifiant K à un point, a la propriété correspondante. On peut définir également la compactification par bouts premiers de K , ainsi que l'élément $\rho_K = \rho_{\widehat{K}} \in \mathbf{T}^1$ et l'homéomorphisme $\varphi_K = \varphi_{\widehat{K}}$ de S^1 . Les résultats locaux montrés pour les points fixes se généralisent immédiatement à ces ensembles.

Démonstration du théorème 11.1. – On suppose que f vérifie les hypothèses du théorème et a un nombre fini d'orbites périodiques. Quitte à prendre un itéré pair assez grand de f , on peut supposer que f préserve l'orientation et que tous les points périodiques sont des points fixes. Ces points n'étant pas accumulés, on peut utiliser la proposition 3.3 et le théorème 9.4 : quitte à prendre un itéré plus grand de f , on peut toujours supposer que, pour tout point fixe z , la suite $i(f^k, z)_{k \geq 1}$ est constante. Le théorème 9.2 nous dit que chaque indice $i(f, z)$ est inférieur ou égal à 1 : on en déduit, par la formule de Lefschetz, qu'il existe au moins deux points fixes z_0 et z_1 tels que

$$i(f, z_0) = i(f, z_1) = 1.$$

Puisque f n'a pas de points errants, ces points ne sont pas dissipatifs. Comme ils ne sont pas accumulés et comme les indices des itérés sont tous égaux à 1, ce ne sont pas des points-selles (Proposition 3.3) : ce sont donc des points indifférents non accumulés, en particulier on peut définir leurs nombres de rotation, éléments de \mathbf{T}^1 , notés respectivement ρ_0 et ρ_1 .

Supposons d'abord que l'un des nombres de rotation est non nul. On considère deux continus pleins disjoints K_0 et K_1 , invariants par f , contenant respectivement z_0 et z_1 et ne se réduisant pas à ces points, suffisamment proches, respectivement de z_0 et z_1 , pour ne contenir aucun autre point fixe de f et pour que les nombres de rotation définis par les bouts premiers sur $S^2 \setminus K_0$ et $S^2 \setminus K_1$ soient ρ_0 et ρ_1 . La restriction de f à l'anneau ouvert $S^2 \setminus (K_0 \cup K_1)$ se prolonge en un homéomorphisme du compactifié obtenu en ajoutant les cercles des bouts premiers en chaque continu. L'homéomorphisme obtenu n'a pas de point errant, il possède un point fixe (puisque f a au moins trois points fixes !) et l'un des nombres ρ_0 ou ρ_1 n'est pas nul. Ceci contredit le corollaire 10.2.

Supposons maintenant que ρ_0 et ρ_1 sont nuls. On sait que l'homéomorphisme défini sur le cercle des bouts premiers en K_0 n'est pas l'identité. On considère un éclatement φ de K_0 , facteur de l'éclatement par bouts premiers, qui possède exactement un point fixe z_2 . La restriction de f à $S^2 \setminus K_0$ se prolonge au compactifié défini par l'éclatement. On note F le symétrisé de f par rapport à S^1 , qui est donc défini sur une sphère topologique Σ . On considère un système de coordonnées polaires $(\theta, r) \in \mathbf{T}^1 \times [-1, 1]$ défini sur un voisinage de S^1 ne contenant aucun autre point fixe que z_2 , tel que :

- le cercle S^1 est le cercle d'équation $r = 0$;
- un point $z = (\theta, r)$ appartient à $S^2 - K_0$ si et seulement si $r > 0$;
- on a $z_2 = (0, 0)$;
- on a $\sigma(\theta, r) = (\theta, -r)$, où σ est l'involution naturellement définie sur Σ .

Fixons $\varepsilon_0 > 0$ assez petit pour que l'intersection de l'arc $] \varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0[\times \{0\}$ et de son image par F soit non vide. Fixons ensuite $\varepsilon_1 > 0$ assez petit pour que chaque segment $\{\theta\} \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ soit disjoint de son image si $\theta \in [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0]$. Considérons les domaines de Jordan

$$U =] \varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0[\times] -\varepsilon_1, \varepsilon_1[$$

et

$$V = \Sigma \setminus \overline{U}$$

et posons

$$X = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(\overline{V}).$$

Montrons maintenant les assertions suivantes :

(i) *L'ensemble X a un nombre fini de composantes connexe fixes.*

En effet, chaque composante connexe fixe de K est pleine, d'après le choix de ε_0 , et contient au moins un point fixe d'après le théorème de Cartwright–Littlewood [9] (rappelons en passant que ce théorème est une conséquence directe du théorème de translation de Brouwer, voir [4]). Remarquons également que chaque point fixe de F est contenu dans une composante connexe fixe de X .

(ii) *Pour chaque composante connexe fixe K de X , on a $i(F, K) \leq 1$.*

En effet, F n'a pas de point errant et on peut appliquer le théorème 9.2.

(iii) *Pour chaque composante connexe fixe de X , la suite $(i(F, K))_{k \geq 1}$ est constante.*

En effet, on a

$$i(F^k, K) = \sum_{z \in \text{Fix}(F) \cap K} i(F^k, z)$$

et on sait que la suite $(i(F^k, z))_{k \geq 1}$ est constante pour tout point fixe z de F (même pour z_2).

(iv) *Si K est une composante connexe fixe de X , il en est de même de $\sigma(K)$ et on a $i(F, K) = i(F, \sigma(K))$.*

C'est évident.

(v) *Il existe une composante connexe fixe K_2 de X , qui est incluse dans $S^2 \setminus K_0$ et qui vérifie $i(F, K_2) = 1$.*

Si on applique la formule de Lefschetz à la sphère obtenue en identifiant chacune des composantes fixes de X à un point, et si on utilise l'assertion (ii), on sait qu'il existe au moins deux composantes fixes d'indice 1, et donc au moins une qui ne contient pas z_2 . On peut toujours la supposer incluse dans $S^2 \setminus K_0$ d'après (iv).

(vi) *La composante K_2 rencontre la frontière de V .*

D'après (iii) on sait que le continu K_2 est indifférent et non accumulé. S'il était contenu dans V , on pourrait trouver un continu invariant K_3 contenant strictement K_2 et inclus dans V , ce qui contredirait le fait que K_2 est une composante connexe de X .

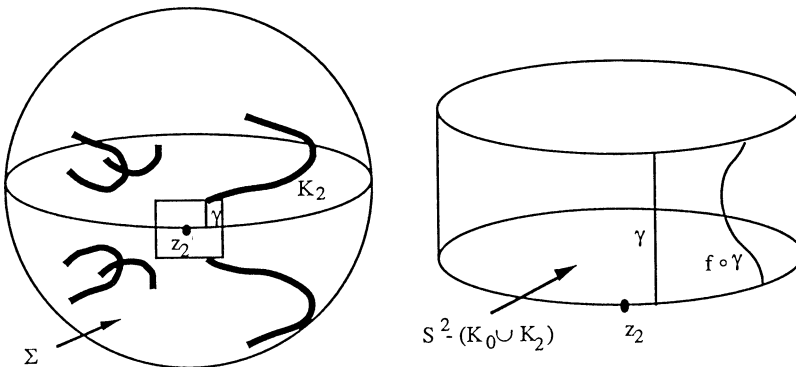


Fig. 5.

On va maintenant conclure. On peut toujours choisir le point $z = (\theta, r) \in K_2 \cap \partial V$ de telle façon que l'image de l'arc

$$\begin{aligned} \gamma: [0, r[&\rightarrow S^2 - K_0, \\ t &\mapsto (\theta, t) \end{aligned}$$

soit disjoint de K_2 . La partie ouverte annulaire $S^2 \setminus (K_0 \cup K_2)$ se compactifie par l'éclatement φ en K_0 et par l'éclatement par bouts premiers en K_2 . La restriction de F à cet anneau se prolonge en un homéomorphisme de l'anneau compact. Il n'a pas de point errant et il a un point fixe (à savoir le point fixe de φ). De plus l'arc γ a une limite en r et joint les deux bords de l'anneau. Les arcs γ et $f \circ \gamma$ ont des images disjointes. La contradiction provient de la proposition 10.5. \square

12. Application aux homéomorphismes conservatifs du tore

Nous allons démontrer dans ce paragraphe le résultat suivant.

THÉORÈME 12.1. – *Soit f un homéomorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ homotope à l'identité et \tilde{f} un relèvement de f à \mathbf{R}^2 . On suppose que f préserve une mesure de probabilité invariante μ chargeant les ouverts et ayant un vecteur de rotation*

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbf{T}^2} \tilde{f} - Id \, d\mu$$

égal à 0. Alors f a une infinité d'orbites périodiques.

Ce résultat était déjà connu dans les cas où f est un difféomorphisme générique : il existe alors une infinité d'orbites périodiques de f qui se relèvent en des orbites périodiques de \tilde{f} . C'est un résultat qui s'interprète et se généralise dans le cadre de la géométrie symplectique en dimension supérieure (voir Salamon–Zehnder [32], voir également Hofer–Zehnder [21] et Schwarz [33]). Dans la démonstration qui suit on ne montre pas ce résultat plus fort, bien que dans de nombreux cas que l'on étudiera, les orbites périodiques obtenues auront cette propriété. On peut se demander si on ne peut pas modifier la démonstration de façon à obtenir cette version plus forte du théorème.

Le théorème peut être énoncé pour un homéomorphisme homotope à l'identité f d'un tore abstrait, c'est-à-dire d'une variété topologique M homéomorphe à \mathbf{T}^2 , et pour un relèvement \tilde{f} au revêtement universel de \tilde{M} de M . L'homéomorphisme f préserve alors une mesure borélienne de probabilité chargeant les ouverts et le vecteur de rotation de cette mesure, qui est défini abstraitement par \tilde{f} comme élément du premier groupe d'homologie singulière $H_1(M, \mathbf{R})$, est nul. À partir d'un triplet (f, \tilde{f}, μ) vérifiant les hypothèses du théorème, on peut construire des triplets (f', \tilde{f}', μ') vérifiant également les hypothèses de la façon suivante :

(i) On pose $(f', \tilde{f}', \mu') = (f^q, \tilde{f}^q, \mu)$, pour un entier $q \geq 1$.

(ii) On suppose que $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de continus pleins contractiles invariants de M , disjoints deux à deux, tels que chaque composante connexe de $\pi^{-1}(K_i)$, $1 \leq i \leq n$, est invariante par f , où $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ est le revêtement universel. On considère l'homéomorphisme f' défini sur le tore topologique M' obtenu en identifiant chaque K_i à un point fixe, on considère le relèvement \tilde{f}' au revêtement universel \tilde{M}' de M' obtenu en identifiant chaque composante connexe de $\pi^{-1}(K_i)$ à un point fixe, on note μ' la mesure de probabilité conditionnelle sur $M - \bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i$.

Avant d'aborder la démonstration, rappelons le résultat suivant de Franks [15], qui est également une conséquence du théorème d'indice de Brouwer.

PROPOSITION 12.2. – *On suppose que le triplet (f, \tilde{f}, μ) vérifie les hypothèses du théorème 12.1 et que l'ensemble des points fixes de f qui se relèvent en des points fixes de \tilde{f} est fini. Il existe alors une courbe de Jordan $C \subset \tilde{M}$ telle que $i(\tilde{f}, C) = 1$ et donc un point fixe z de \tilde{f} tel que $i(\tilde{f}, z) = i(f, \pi(z)) = 1$.*

Démonstration du théorème 10.1. – On suppose que le triplet (f, \tilde{f}, μ) vérifie les hypothèses du théorème et a un nombre fini d'orbites périodiques. On va énoncer un certain nombre de résultats pour aboutir à une contradiction.

LEMME 12.3. – *Si $K \subset \mathbf{R}^2$ est un continu invariant par \tilde{f} non réduit à un point, le nombre de rotation ρ_K défini par les bouts premiers de U_K est nul.*

Démonstration. – La restriction de \tilde{f} à l'anneau ouvert U_K se prolonge en un homéomorphisme du compactifié obtenu en ajoutant le cercle des bouts premiers en K et le cercle des directions à l'infini. Il fixe tous les points du second cercle. De plus, il vérifie la propriété d'intersection énoncée dans la proposition 10.4, puisque f préserve une mesure qui charge les ouverts. Si le nombre de rotation ρ_K n'est pas nul, l'ensemble des nombres de rotation des orbites périodiques (pour un relèvement donné) est un intervalle non trivial de \mathbf{Q} : ceci est impossible puisque l'ensemble des périodes possibles est fini. \square

LEMME 12.4. – *Tout continu $K \subset \mathbf{R}^2$ invariant par \tilde{f} est plein et d'intérieur vide.*

Démonstration. – Supposons que K ne soit pas plein et considérons une composante connexe bornée U de $\mathbf{R}^2 \setminus K$. Elle est simplement connexe. Elle est également périodique car \tilde{f} préserve la mesure relevée. Quitte à remplacer \tilde{f} par \tilde{f}^q , on peut la supposer fixe. Le théorème de translation de Brouwer et le théorème 8.1 nous disent que U contient un point fixe z de F d'indice de Lefschetz 1. Deux cas sont alors possibles

(i) *Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $i(f^k, z) \neq 1$.*

Nous savons par le même raisonnement que f^k a un autre point fixe dans U . On compactifie U en une sphère en identifiant l'unique bout de U à un point fixe et on obtient un homéomorphisme d'une sphère ayant au moins trois points fixes, un nombre fini d'orbites périodiques et n'ayant pas de point errant : ceci contredit le théorème 11.1.

(ii) *La suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ est constante égale à 1.*

Le point z , qui est non accumulé, est alors indifférent et admet un nombre de rotation $\rho \in \mathbf{T}^1$ qui est nul d'après le lemme 12.3. On considère un continu invariant $K' \subset U$ et contenant z , proche de $\{z\}$ et distinct de $\{z\}$. On considère un K' -éclatement, facteur de l'éclatement par bouts premiers, ayant un unique point fixe. On prend le symétrisé de $U \setminus K'$ par rapport au cercle de l'éclatement, on ajoute un point fixe à chaque bout de l'anneau obtenu. Là encore on obtient un homéomorphisme d'une sphère ayant au moins trois points fixes, un nombre fini d'orbites périodiques et n'ayant pas de point errant.

Le fait que K est d'intérieur vide se démontre de la même façon. Toute composante connexe de l'intérieur de K est simplement connexe (car K est plein) et périodique. \square

LEMME 12.5. – *Tout continu $K \subset \mathbf{R}^2$ invariant par \tilde{f} se plonge injectivement par π dans le tore \mathbf{T}^2 .*

Démonstration. – Le continu $\pi(K)$ est invariant par f , il faut montrer qu'il est contractile. Le théorème de Baire nous dit que la réunion des translats de K par les translations entières est d'intérieur vide et qu'il en est donc ainsi de $\pi(K)$. En particulier $\pi(K)$ n'est pas le tore tout entier. Il suffit donc de démontrer que les composantes connexes U de $\mathbf{T}^2 \setminus \pi(K)$ ne sont ni simplement connexes, ni annulaires. Toute composante U est périodique et on peut la supposer fixe en remplaçant f par f^q . Elle ne peut pas être simplement connexe sinon f aura une infinité

d'orbites périodiques dans U suivant le raisonnement du lemme 12.3. Montrons par l'absurde qu'elle ne peut pas être annulaire.

Considérons un revêtement annulaire intermédiaire

$$\Pi : A \approx \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^2$$

tel que $\Pi^{-1}(U)$ soit réunion d'ensembles annulaires disjoints translétés, tous homéomorphes à U . On considère deux composantes connexes consécutives \tilde{U}_0 et \tilde{U}_1 de $\Pi^{-1}(U)$ et deux courbes fermées simples Γ_0 et Γ_1 non homotopes à zéro, contenues respectivement dans \tilde{U}_0 et \tilde{U}_1 . Le relèvement \tilde{f} de f à A , lui-même relevé par f , fixe chaque composante connexe de $\Pi^{-1}(U)$ car le vecteur de rotation est nul. On considère l'ensemble annulaire invariant obtenu comme réunion de \tilde{U}_0 de \tilde{U}_1 et de l'anneau délimité par Γ_0 et Γ_1 . Il contient un point fixe, puisque f admet un point fixe. On compactifie cet anneau ouvert en ajoutant deux points fixes en chaque bout. On a obtenu un homéomorphisme sans point errant admettant un nombre fini de points périodiques et qui a au moins trois points fixes. □

Suite de la démonstration du théorème 10.1. – Quitte à prendre un itéré de f on peut supposer que tous les points périodiques de f sont des points fixes et que pour tout point fixe z , la suite $(i(f^k, z))_{k \geq 1}$ est constante. Supposons qu'il existe un continu plein contractile K contenant au moins deux points fixes, la suite $i(f^k, K)_{k \geq 1}$ est alors constante. Si on identifie ce compact à un point, on garde les mêmes hypothèses. Ainsi, par une suite finie de telles opérations d'identification, on peut toujours supposer qu'il n'existe aucun continu plein contractile contenant au moins deux points fixes de f .

On peut supposer qu'aucune des deux courbes $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbf{T}^1$ ne contient de point fixe. Il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon δ centrée en un point du plan ayant au moins une coordonnée entière est disjointe de son image par \tilde{f} . Fixons un entier $N > 4\delta$ et considérons le domaine de Jordan $U =]0, N[^2$.

Toute composante connexe fixe de

$$X = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{f}^{-k}(\bar{U})$$

est pleine, d'intérieur vide et se projette injectivement dans le tore. Ainsi K contient un point fixe (d'après Cartwright–Littlewood) et un seul (d'après l'hypothèse faite ci-dessus). D'après la proposition 12.2, on sait qu'il existe un point fixe z de \tilde{f} d'indice 1. La suite $i(\tilde{f}^k, z)_{k \geq 1}$ est constante égale à 1 et le point z est indifférent non accumulé. Son nombre de rotation étant nul, on sait donc qu'il est de type semi-stable à droite ou semi-stable à gauche. Supposons le semi-stable à droite. En particulier, si K est un continu invariant qui ne contient que z comme point fixe, alors K est indifférent non accumulé et φ_K est semi-stable à droite, de nombre de rotation 0.

Il y a exactement N^2 translétés de z dans U . La composante connexe $K(z')$ de X qui contient chacun d'un translété z' de z est elle-même indifférente non accumulée et rencontre donc ∂U . Comme la longueur de ∂U est $4N$, on peut trouver deux translétés z_0 et z_1 et un arc simple

$$\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus K(z_0) \cup K(z_1)$$

tracé sur ∂U , de longueur $\leq \delta$ tel que γ a une limite dans $K(z_0)$ en 0 et une limite dans $K(z_1)$ en 1. Cet arc est disjoint de son image par définition de δ . C'est un arc d'accès de $K(z_0)$ et de $K(z_1)$. Si on compactifie $\mathbf{R}^2 \setminus K(z_0) \cup K(z_1)$ en ajoutant le point à l'infini et les cercles des bouts premiers en $K(z_0)$ et $K(z_1)$, on obtient un homéomorphisme d'un anneau compact et

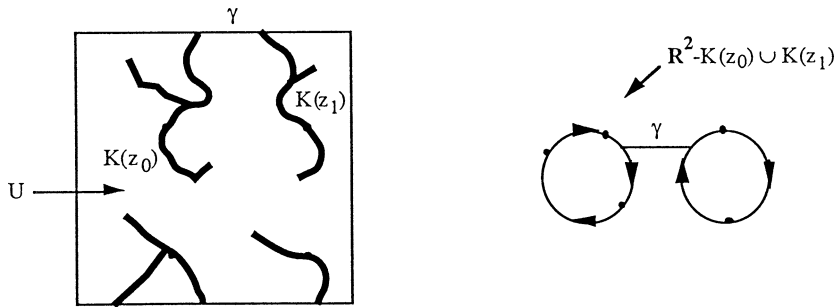


Fig. 6.

un arc joignant un point du bord à un point de l'autre bord qui est disjoint de son image. Ceci contredit le fait que $K(z_0)$ et $K(z_1)$ ont tous deux une dynamique semi-stable à droite. \square

RÉFÉRENCES

- [1] BIRKHOFF G.-D., An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.* **47** (1926) 297–311; in: *Collected Math. Papers, Vol. II*, Dover, pp. 252–260.
- [2] BIRKHOFF G.-D., Sur quelques courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. France* **80** (1932) 1–26; in: *Collected Math. Papers, Vol. II*, Dover, pp. 444–461.
- [3] BONINO M., Propriétés locales de l'espace des homéomorphismes de Brouwer, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999) 1405–1423.
- [4] BROUWER L.E.J., Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912) 37–54.
- [5] BROWN M., A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *Houston J. Math.* **10** (1984) 35–41.
- [6] BROWN M., On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990) 1109–1114.
- [7] CARATHÉODORY C., Über die begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete, *Math. Ann.* **73** (1913) 323–370.
- [8] CARTER P.H., An improvement of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982) 285–299.
- [9] CARTWRIGHT M.L., LITTLEWOOD J.C., Some fixed point theorems, *Ann. of Math.* **54** (1951) 1–37.
- [10] FATHI A., An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *L'Enseignement Math.* **33** (1987) 315–322.
- [11] FLUCHER M., Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms, *Manuscripta Math.* **68** (1990) 271–293.
- [12] FORD L.R., *Automorphic Functions*, Chelsea Publishing, New York, 1951.
- [13] FRANKS J., Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Ann. of Math.* **128** (1988) 139–151.
- [14] FRANKS J., A variation on the Poincaré–Birkhoff theorem, *Contemp. Math.* **81** (1988) 139–151.
- [15] FRANKS J., Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8*** (1988) 99–107.
- [16] FRANKS J., Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero, *New York J. Math.* **2** (1996) 1–19.
- [17] GUILLOU L., Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré–Birkhoff, *Topology* **33** (1994) 331–351.
- [18] HANDEL M., There are no minimal homeomorphisms of the multipunctured plane, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12** (1992) 75–83.
- [19] HERMAN M., Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, vol. 2, *Astérisque, Soc. Math. de France* **144** (1986).
- [20] HOCKING J., YOUNG G., *Topology*, Dover Publications, New York, 1961.
- [21] HOFER H., ZEHNDER E., *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, 1994.

- [22] KÉRÉKJÁRTÓ B. V., *Vorlesungen über Topologie (I)*, Springer-Verlag, Berlin, 1923.
- [23] LE CALVEZ P., Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice > 1 , *Topology* **38** (1999) 23–35.
- [24] LE CALVEZ P., YOCCOZ J.-C., Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, *Ann. of Math.* **146** (1997) 241–293.
- [25] LE CALVEZ P., YOCCOZ J.-C., Suite des indices de Lefschetz des itérés pour un domaine de Jordan qui est un bloc isolant, Manuscrit.
- [26] LE ROUX F., *Dynamique des homéomorphismes de surfaces, versions topologiques des théorèmes de la fleur de Leau–Fatou et de la variété stable*, Prépublication, Orsay.
- [27] MATHER J., Invariant subsets of area-preserving homeomorphisms of surfaces, *Adv. Math. Suppl. Stud.* **7B** (1994) 331–351.
- [28] NEWMAN M.H.A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, Cambridge, 1951.
- [29] NIKISHIN N.A., Fixed points of diffeomorphisms of two-dimensional spheres preserving an oriented plane, *Funktional Anal. i Priložen.* **8** (1974) 84–85.
- [30] PEREZ-MARCO R., Fixed points and circles maps, *Acta Math.* **179** (1997) 243–294.
- [31] PELIKAN S., SLAMINKA E., A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1987) 463–479.
- [32] SALAMON D., ZEHNDER E., Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992) 1303–1360.
- [33] SCHWARZ M., On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds, *Pacific J. Math.* **193** (2) (2000) 419–461.
- [34] SIMON C.P., A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics, *Inventiones Math.* **26** (1974) 187–200.

(Manuscrit reçu le 26 juin 2001 ;
accepté, après révision, le 5 mars 2002.)

Patrice LE CALVEZ
Laboratoire Analyse,
Géométrie et Applications,
U.M.R. C.N.R.S. 7539,
Institut Galilée,
Université Paris Nord,
93430 Villetaneuse, France
E-mail : lecalvez@math.univ-paris13.fr