PAUL VINCENSINI

Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 61 (1944), p. 119-147
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__119_0>

SUR

LES CONGRUENCES DES CORDES DE CONTACT

DES

ENVELOPPES DE SPHÈRES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction. — Les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères à deux paramètres ont été introduites dans la théorie des congruences de sphères par Ribaucour (¹). Ces congruences jouissent, vis-à-vis de la surface déférente (lieu des centres des sphères) d'un ensemble remarquable de propriétés que le lecteur trouvera exposées en détail dans les *Leçons* de G. Darboux (t. II et IV). G. Darboux les a utilisées systématiquement dans un certain nombre de théories géométriques, et notamment dans ses recherches sur la représentation sphérique des surfaces. Après Ribaucour et Darboux, L. Bianchi a été amené à envisager les congruences en question en les associant surtout à des problèmes concernant la déformation de la déférente (²). Plus récemment M. J. Drach (³) a fait une étude systématique de la déformation des congruences de sphères par déformation de la déférente, et parmi les résultats qu'il a obtenus, plusieurs se rapportent précisément à la congruence des cordes de contact.

C'est de cette congruence qu'il va être question dans le présent travail. Une congruence rectiligne arbitrairement donnée peut toujours être regardée (d'une infinité de façons) comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères. Cette remarque permet de mettre (d'une infinité de façons) les équations de *toute* congruence rectiligne, sous une forme invariante analogue à celle sous laquelle Weingarten a mis les équations d'une congruence normale

(¹) A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journ. de Math.*, 4ᵉ série, t. VII, 1891.

(²) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, 1ʳᵉ partie, 3ᵉ édition.

(³) J. DRACH, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* (*C. R. Congrès des Sociétés Savantes*, 1925).

quelconque. La forme en question se prête aisément à des transformations des congruences des cordes de contact relatives à une déférente déterminée, en congruences analogues relatives à la même déférente en relation simple avec les premières. A ces transformations on peut rattacher, entre autres choses, une interprétation géométrique des formes différentielles secondes covariantes, et une mise sous forme invariante de l'équation d'un intéressant réseau découvert par M. J. Drach.

Le cas où la congruence des cordes de contact est normale et la déférente sphérique est examiné plus spécialement. Les congruences normales de contact relatives à une déférente quelconque dépendent d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à laquelle on peut toujours donner la forme de Laplace. Cette équation est identiquement vérifiée si la déférente est sphérique, ce qui signifie, conformément d'ailleurs à une remarque de Ribaucour, que toute congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères à déférente sphérique est nécessairement normale. Mais si l'on déforme la sphère déférente l'indétermination disparaît, et l'on est conduit à envisager, pour les congruences normales de contact des enveloppes de sphères dont la déférente est à courbure totale constante positive, un procédé de transformation en relation étroite avec la transformation d'Hazzidakis des surfaces applicables sur la sphère.

Le problème général de la recherche des enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales restant normales (et de contact) pour une déformation *finie*, *continue* ou *arbitraire* de la déférente est étudié d'une façon complète. Il existe des congruences de sphères déformables avec conservation de l'orthogonalité de la congruence des cordes de contact appartenant à chacun des trois types de déformation ci-dessus. Le cas de la déformation finie conduit à choisir les couples de déférentes déformées associées, parmi les surfaces ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les déformées de la sphère. Le cas de la déformation *arbitraire* conduit à choisir comme déférentes les surfaces applicables sur les surfaces de révolution et, pour chacune de ces surfaces, la loi de variation du rayon de la sphère génératrice de la congruence correspondante est susceptible d'une élégante interprétation géométrique.

Le problème de la recherche des enveloppes de sphères à congruence des cordes de contact normales, est en liaison intime et bien connue avec diverses questions concernant les systèmes triples orthogonaux ou les systèmes cycliques. L'examen de cette liaison, fait du point de vue adopté dans le présent travail conduit, en particulier, à des procédés de transformation des systèmes cycliques normaux, soit à une sphère, soit à la surface la plus générale.

1. *Les congruences des cordes de contact d'une enveloppe de sphères.* — Étant donnée une congruence de sphères, nous désignerons par Σ la sphère

génératrice, par $P(x, y, z)$ son centre, par S la déférente (lieu de P), et par $R(u, v)$ le rayon de Σ, u et v étant les deux paramètres fixant les différentes sphères Σ. Les coefficients du ds^2 de S et de sa deuxième forme fondamentale seront (E, F, G) et (D, D′, D″). La notation φ_{ij} représentera les dérivées secondes covariantes de la fonction $\varphi(u, v)$ relatives au ds^2 de S; $\Delta\varphi$, $\Delta_2\varphi$, $\Delta_{22}\varphi$ seront les paramètres différentiels de cette même fonction, et $\Delta(\varphi, \psi)$ le paramètre différentiel mixte des deux fonctions φ et ψ. L'enveloppe de Σ se composera, en général, de deux nappes distinctes σ et σ' que la sphère touchera respectivement aux points M et M′. (MM′) est la corde des contacts de Σ avec son enveloppe; elle perce le plan tangent en P à S en un point I (milieu de MM′) dont les coordonnées seront désignées par ξ, η, ζ. Il est bien connu que les points M, M′, et par suite le point I et la corde des contacts (MM′), restent invariablement liés au plan tangent en P à S lorsque S se déforme en entraînant les sphères Σ centrées en ses différents points et les plans tangents en ces points.

Dès que l'on se donne la déférente S d'une enveloppe de sphères et le rayon $R(u, v)$ de la sphère génératrice, l'enveloppe est déterminée et il en est de même de la congruence des cordes de contact. On peut prendre comme surface de départ, pour définir cette congruence, la surface lieu du point I (ξ, η, ζ); un rayon quelconque (MM′) sera alors défini par le point I correspondant et par ses cosinus directeurs X, Y, Z qui sont ceux de la normale en P à la déférente. Les expressions de ξ, η, ζ s'obtiennent sans difficulté; ce sont (*voir* L. Bianchi, *loc. cit.*)

$$\xi = x - R\Delta(x, R),$$
$$\eta = y - R\Delta(y, R),$$
$$\zeta = z - R\Delta(z, R),$$

que nous écrirons en posant $R^2 = -2\rho$

$$(1) \qquad \xi = x + \Delta(x, \rho), \qquad \eta = y + \Delta(y, \rho), \qquad \zeta = z + \Delta(z, \rho).$$

Des relations (1) on déduit aussitôt l'expression suivante, qui nous sera utile plus loin, de la distance PI de la corde des contacts au point P

$$PI = \sqrt{S(\xi - x)^2} = \sqrt{S\overline{\Delta(x, \rho)}^2} = \sqrt{\Delta\rho}.$$

On peut se demander si les formules (1) définissent la congruence rectiligne la plus générale de l'espace; autrement dit, si une congruence rectiligne arbitrairement donnée peut être considérée comme la congruence des cordes de contact d'une certaine enveloppe de sphères. Les propositions suivantes de Ribaucour (*loc. cit.*) prouvent qu'il en est bien ainsi :

A. La congruence C de la corde des contacts d'une enveloppe de sphères de déférente S *admet pour représentation sphérique de ses développables la représentation sphérique d'un réseau conjugué de* S. En outre, les deux plans focaux issus d'un rayon quelconque de C sont perpendiculaires aux tangentes du réseau au point correspondant.

B. Si les points d'une surface S et les droites d'une congruence C se correspondent de telle façon, que chaque droite de C soit perpendiculaire au plan tangent au point correspondant de S, et qu'aux développables de C corresponde un réseau conjugué de S, C *est la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur* S [1].

Il résulte de ces propositions que si C est une congruence rectiligne quelconque, et (γ) l'ensemble des deux familles de courbes de la sphère unitaire image des développables de C, toute surface S admettant un réseau conjugué de représentation sphérique (γ) est la déférente d'une congruence de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact. En outre, l'ensemble des surfaces S admettant (γ) comme image sphérique d'un réseau conjugué fournit la totalité des congruences de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact. Il est bien connu que l'ensemble des surfaces S admettant un réseau conjugué de représentation sphérique donnée, est défini par une équation aux dérivées partielles de Laplace du type hyperbolique.

Dans le cas, dont il va être spécialement question dans la suite, où C est une congruence normale, l'image sphérique de ses développables est un réseau orthogonal de la sphère unitaire, et les déférentes des congruences de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact sont les surfaces admettant (γ) pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Il est à noter que dans ce cas particulier toutes les sphères sont des déférentes possibles : une sphère quelconque peut, en effet, être considérée comme une surface admettant (γ) pour représentation sphérique. D'ailleurs, les seules congruences rectilignes de contact associées à une déférente sphérique sont les congruences normales, comme cela résulte de la proposition A : les deux plans focaux issus d'un même rayon d'une telle congruence sont, en effet, perpendiculaires à deux tangentes conjuguées de la sphère, et sont par suite rectangulaires.

Dans le problème général de la recherche des enveloppes de sphères admettant une déférente donnée pour lesquelles la congruence des cordes de contact est normale, le cas de la déférente sphérique, pour lequel la solution est formée par l'ensemble de *toutes* les congruences normales de l'espace, va donc se présenter comme un cas d'indétermination. C'est ce que nous constaterons au numéro 3, où nous mettrons le problème en équation, en vue de l'étude des enveloppes de sphères à congruences de contact normales et de leurs transformations ou déformations possibles. La détermination de l'équation des déve-

---

(1) Et évidemment aussi de toutes celles que l'on obtient en ajoutant une constante quelconque aux carrés des rayons des différentes sphères.

loppables de la congruence générale définie par les équations (1) n'offre pas de difficultés. Si l'on suppose la déférente rapportée à ses lignes de courbure ($F = D' = 0$), on obtient

$$\rho_{12} D\, du^2 + [D(\rho_{22} + G) - D''(\rho_{11} + E)]\, du\, dv - \rho_{12} D''\, dv^2 = 0. \tag{2}$$

La forme (2) de l'équation des développables fournit aussitôt un certain nombre de propositions dues à Ribaucour. Ainsi, par exemple, la proposition A précédemment énoncée résulte immédiatement de la comparaison de (2) et de l'équation des asymptotiques ($D\, du^2 + D''\, dv^2 = 0$). On voit de même que la condition pour que la congruence des cordes de contact soit normale est

$$\rho_{12} = 0.$$

En développant ρ_{12} on obtient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

qui définit toutes les enveloppes de sphères à congruences de contact normales admettant une déférente S donnée.

Si S est une sphère (de rayon 1 par exemple), les coordonnées x, y, z d'un point quelconque P de S ne sont autre chose que les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale. Les formules (1) définissant la congruence de contact la plus générale associée à S s'écrivent alors

$$\xi = X + \Delta(X, \rho), \qquad \eta = Y + \Delta(Y, \rho), \qquad \zeta = Z + \Delta(Z, \rho),$$

et expriment (Weingarten) que cette congruence est la congruence normale la plus générale de l'espace, comme nous l'avions déjà observé.

2. *Remarques sur les formules* (1). — Nous venons de voir qu'en se donnant arbitrairement les quatre fonctions (x, y, z, ρ) qui figurent dans les formules

$$\xi = x + \Delta(x, \rho), \qquad \eta = y + \Delta(y, \rho), \qquad \zeta = z + \Delta(z, \rho), \tag{1}$$

ces formules représentent la congruence rectiligne la plus générale de l'espace; le rayon générateur est issu du point $I(\xi, \eta, \zeta)$ situé dans le plan tangent en $P(x, y, z)$ à la surface S, ses cosinus directeurs (X, Y, Z) sont ceux de la normale en P à S, et le paramètre différentiel Δ se rapporte au ds^2 de S. Il y a là une généralisation des formules que Weingarten a données pour représenter la congruence *normale* la plus générale

$$\mathfrak{X} = \Delta(M, X), \qquad \mathfrak{Y} = \Delta(M, Y), \qquad \mathfrak{Z} = \Delta(M, Z). \tag{3}$$

Dans ces dernières formules X, Y, Z sont les cosinus directeurs d'un rayon quelconque, M la distance algébrique (comptée positivement suivant la direction X, Y, Z) de l'origine O des coordonnées au plan tangent correspondant à l'une quelconque S des surfaces orthogonales aux rayons, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les coordonnées de la projection orthogonale de O sur le rayon envisagé, et Δ le paramètre différentiel mixte relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence. Si I désigne le point où le rayon générateur de la congruence normale considérée perce le plan tangent à la sphère unitaire au point P(X, Y, Z) (parallèle au plan tangent correspondant à S), et si l'on prend pour surface de départ, non plus le lieu des projections ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) de O sur les différents rayons, mais celui du point I, les équations (3) sont à remplacer par

$$(4) \qquad \xi = X + \Delta(M, X), \qquad \eta = Y + \Delta(M, Y), \qquad \zeta = Z + \Delta(M, Z).$$

Les formules (4), identiques aux formules (1), fournissent une nouvelle interprétation géométrique de la fonction M. D'après Weingarten, M représente la distance algébrique de l'origine au plan tangent de normale (X, Y, Z) à l'une des surfaces orthogonales à la congruence; au point de vue actuel $-2M = R^2$ représente le carré du rayon de la sphère qu'il faut centrer en chaque point P de la sphère unitaire, pour que l'enveloppe de l'ensemble de sphères ainsi obtenues admette la congruence normale envisagée comme congruence de ses cordes de contact.

Dans le cas d'une congruence rectiligne quelconque donnée *a priori*, le problème de la mise des équations qui la représentent sous la forme (1) ne présente évidemment pas la même simplicité que pour les congruences normales; ce problème exige, en dehors de la détermination des développables, l'intégration de l'équation de Laplace dont dépend la déférente $S(x, y, z)$, puis la détermination de ρ (une quadrature). Mais, telles qu'elles sont, les formules (1) sont loin de manquer d'intérêt. Une première remarque simple à faire à leur sujet est la suivante : Remplaçons dans les formules (1) relatives à une congruence C déterminée ρ par une fonction quelconque $F(\rho)$ de ρ, ce qui revient à dilater les rayons des sphères Σ dont l'enveloppe admet C pour congruence des cordes de contact d'une quantité fonction déterminée de ces rayons; les quantités $\Delta(x, \rho)$, $\Delta(y, \rho)$, $\Delta(z, \rho)$ se trouvent alors multipliées par un même facteur $F'(\rho)$, et les différents vecteurs $\overrightarrow{PI}$ sont multipliés par ce même facteur. La congruence C est donc transformée en une nouvelle congruence de contact C' relative à la même déférente S, deux rayons homologues quelconques (de même image sphérique) de C et C' *étant situés dans un même plan avec la normale à* S *au point correspondant*. Toutes les congruences de contact relatives aux enveloppes de sphères déduites d'une enveloppe de sphères donnée en modifiant le rayon de la sphère génératrice d'après une loi fonction du rayon seul, se correspondent donc *avec coplanéité des rayons homologues*. Il en est ainsi en particulier si la congruence C est *normale* et si on l'associe (comme congruence des cordes de contact) à une déférente sphérique (de centre O). La transformation ci-dessus revient alors à remplacer M (distance de O au plan tangent à l'une quelconque des surfaces normales à C) par une fonction de M. La congruence transformée C′ étant une congruence de contact relative à la même déférente sphérique, est *normale* comme toutes les congruences de contact relatives à des sphères. On peut donc énoncer le résultat suivant, qui découle d'ailleurs aussi des formules (3) de Weingarten :

Si l'on déplace chaque plan tangent d'une surface, parallèlement à lui-même, d'une quantité fonction de la distance de ce plan à un point fixe O *de l'espace, les nouveaux plans enveloppent une surface dont les normales sont, avec les normales homologues (parallèles) de la surface initiale, dans des plans passant tous par le point fixe* O.

Il est d'ailleurs facile de se rendre compte que l'opération géométrique précédente fournit *toutes* les congruences normales correspondant avec parallélisme des rayons homologues à une congruence normale C donnée, les rayons homologues de C et de toutes ses transformées étant situés dans des plans issus d'un point fixe O. Si C′ est une congruence normale présentant avec C la relation géométrique ci-dessus, et si M et M′ sont les distances de O à deux plans tangents homologues de deux surfaces normales à C et C′ respectivement, on a, d'après les formules (2) de Weingarten,

$$\frac{\Delta(M', X)}{\Delta(M, X)} = \frac{\Delta(M', Y)}{\Delta(M, Y)} = \frac{\Delta(M', Z)}{\Delta(M, Z)} = \lambda,$$

d'où, en supposant pour simplifier que l'on ait choisi comme représentation sphérique commune des deux congruences le système des génératrices rectilignes de la sphère unitaire

$$\frac{\partial X}{\partial u}\left(\frac{\partial M'}{\partial v} - \lambda\frac{\partial M}{\partial v}\right) + \frac{\partial X}{\partial v}\left(\frac{\partial M'}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M}{\partial u}\right) = 0,$$

et deux relations analogues en Y et Z. On déduit de ces relations

$$\frac{\partial M'}{\partial v} - \lambda\frac{\partial M}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial M'}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M}{\partial u} = 0,$$

et par suite

$$\frac{D(M', M)}{D(u, v)} = 0,$$

ce qui montre bien que M′ est fonction de M conformément au résultat annoncé [1].

---

[1] Un raisonnement analogue, fait en substituant à (X, Y, Z, M), (x, y, z, ρ), montre qu'étant donnée une congruence de contact (C) relative à une déférente déterminée S et correspondant à une fonction $\rho(u, v)$ déterminée, on obtient *toutes* les congruences de contact relatives à la même déférente, dont les rayons sont coplanaires avec les rayons homologues de (C) et de la congruence des normales à S, en remplaçant ρ par une fonction arbitraire $F(\rho)$ de ρ.

Nous ne développerons pas ici la remarque qui précède, relative à la substitution de $F(\rho)$ à ρ dans les équations de la congruence la plus générale, définie par les formules (1); nous en signalerons seulement les conséquences immédiates suivantes dont certaines nous seront utiles plus loin. Prenons $F(\rho) = k\rho$ ($k = \text{const.}$), ce qui revient à multiplier les rayons des sphères Σ centrées aux différents points P de S par un nombre fixe $(\sqrt{k})$. Un rayon quelconque D de la congruence de contact considérée, perpendiculaire au plan tangent à S en I, est remplacé par le rayon homologue D′ de la congruence des cordes de contact de l'enveloppe de sphères transformée. D′, qui est parallèle à D, est, comme on l'a vu, *situé dans le plan* (P, D), et perce le plan tangent en P à S en un point I′ situé sur la droite PI. L'expression de $\overline{\mathrm{PI}}$ donnée au numéro 2 $\left[\overline{\mathrm{PI}} = \sqrt{\Delta\rho}\right]$ montre que l'on a $\overrightarrow{\mathrm{PI}'} = k.\overrightarrow{\mathrm{PI}}$, ce qui revient à dire que, si (D) est une congruence de contact relative à S, et (N) la congruence des normales à S (qui est évidemment de contact pour les enveloppes de sphères de rayon constant centrées sur S), toute droite Δ du plan de deux rayons homologues (N, D) des deux congruences précédentes parallèle à ces rayons et partageant leur distance dans un rapport constant engendre, lorsque le couple (N, D) varie, une nouvelle congruence *de contact* relative à S [1].

Les développables des ∞^1 congruences (Δ) obtenues en faisant varier le facteur k ne se correspondent pas comme le montre l'équation de ces développables donnée au numéro 1, mais, conformément à la proposition (A) de Ribaucour, *aux développables de chacune de ces congruences correspond un réseau conjugué de* S. Cela étant, imaginons que l'on fasse subir à S une homothétie de centre O et de rapport λ, et qu'en même temps on multiplie les rayons des sphères dont l'enveloppe admet (D) pour congruence des cordes de contact par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, donc ρ par $\frac{1}{\lambda}$. On obtiendra ainsi une nouvelle enveloppe de sphères admettant pour déférente la surface S_1 homothétique de S dans l'homothétie (O, λ), et dont la congruence des cordes de contact (D_1) jouit évidemment de la propriété que les différents vecteurs $\overrightarrow{P_1I_1}$ sont équipollents aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PI}}$ relatifs à (D). La congruence (D_1) admettant d'après (A) pour représentation sphérique de ses développables l'image d'un réseau conjugué de S_1, et par suite de S, peut être regardée comme une *congruence de contact relative à la déférente* S. Si l'on fait tendre λ vers zéro, P_1 tend vers O, $\overrightarrow{P_1I_1}$ reste équipollent à $\overrightarrow{\mathrm{PI}}$, et I_1 tend vers le point J extrémité du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ équipollent à $\overrightarrow{\mathrm{PI}}$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

---

[1] Les congruences des normales aux enveloppes de sphères transformées par la transformation $\rho \to k.\rho$ (ou, si l'on a égard aux rayons des sphères, $R \to \sqrt{k}.R$), sont dans la relation du théorème de Malus-Dupin sur la réfraction des congruences normales, la déférente jouant le rôle de surface dirimante.

Étant donnée une congruence de contact quelconque (D) relative à une déférente donnée S, si I est le point où l'un quelconque D de ses rayons (correspondant au point P de S) perce le plan tangent en P à S, si l'on mène par un point fixe O de l'espace le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, et si l'on construit la droite Δ parallèle à D issue de J, *l'ensemble des droites Δ ainsi obtenues constitue une nouvelle congruence* (Δ) *de contact pour la même déférente* S.

Le réseau conjugué de S correspondant aux développables de (Δ) est distinct de celui qui correspond aux développables de la congruence de contact initiale (D). On l'obtient évidemment, d'après l'exposition de la construction géométrique qui précède dans laquelle les rayons des sphères de la congruence initiale ont été multipliés par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\left(\text{donc } \rho \text{ par } \frac{1}{\lambda}, \lambda \text{ tendant vers zéro}\right)$, en remplaçant dans l'équation (2) ρ_{ij} par $\frac{\rho_{ij}}{\lambda}$ et en faisant tendre λ vers zéro, ce qui donne

$$(5) \qquad \rho_{12} D\, du^2 + (D\rho_{22} - D''\rho_{11})\, du\, dv - \rho_{12} D''\, dv^2 = 0,$$

la déférente étant toujours supposée rapportée à ses lignes de courbure.

Il est clair que la construction géométrique qui a donné (Δ) à partir de (D), faite à partir de (Δ) considérée comme congruence de contact relative à S, donne une nouvelle congruence (Δ'), distincte de (D) et (Δ) et pouvant à son tour être regardée comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères de déférente S; la même construction appliquée à (Δ') fournira une nouvelle congruence de contact (Δ'') relative à S, et ainsi de suite. De là la possibilité, étant donnée une congruence de contact relative à une déférente déterminée, d'obtenir sans quadratures une suite illimitée de congruences de contact relatives à la même déférente. Comme la position du point O par rapport à S est arbitraire, en faisant varier ce point on obtiendra ∞^3 suites illimitées de congruences de contact distinctes relatives à une déférente S donnée, à partir d'une telle congruence (D) supposée connue.

Si (D) est normale, toutes les congruences transformées le sont aussi, et leurs développables se correspondent comme correspondant aux lignes de courbure de S.

La considération des formules définissant la congruence (Δ) transformée de (D) par la construction dont il vient d'être question, conduit à des remarques qu'il y a lieu de noter. Les coordonnées du point J, projection orthogonale de O sur le rayon Δ, homologue du rayon D de la congruence (D) définie par les formules (1) dont (Δ) dérive, sont, puisque $\overrightarrow{OJ}$ est équipollent à $\overrightarrow{PI}$,

$$(6) \qquad \mathfrak{X} = \Delta(x, \rho), \qquad \mathfrak{Y} = \Delta(y, \rho), \qquad \mathfrak{Z} = \Delta(z, \rho),$$

les cosinus directeurs du rayon Δ envisagé étant X, Y, Z, cosinus directeurs de la normale à la surface S au point $P(x, y, z)$. Si l'on tient compte des identités suivantes

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\Delta(x,\rho)}{\partial u}=\rho_{11},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\Delta(x,\rho)}{\partial v}=\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\Delta(x,\rho)}{\partial u}=\rho_{12},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\Delta(x,\rho)}{\partial v}=\rho_{22},$$

et si l'on forme la combinaison

$$\mathrm{S}\,dx.d\Delta(x,\rho),$$

on obtient une forme différentielle qui n'est pas autre chose que la *différentielle seconde covariante* de la fonction $\rho(u, v)$ relative au ds^2 de S, soit

$$\rho_{11}\,du^2+2\rho_{12}\,du\,dv+\rho_{22}\,dv^2.$$

En annulant la combinaison ci-dessus on obtiendra donc une équation

$$\mathrm{S}\,dx.d\Delta(x,\rho)=0, \tag{7}$$

qui exprimera une propriété du couple de congruences (D), (Δ) invariante par déformation arbitraire de la déférente. Or (7) exprime que les déplacements infiniment petits correspondants des points P et J sont orthogonaux. On peut donc dire que si l'on considère, sur S, le réseau constitué par les deux familles de courbes le long desquelles les déplacements infinitésimaux du point P sont orthogonaux aux déplacements correspondants de J, ce réseau est *invariant par déformation arbitraire de* S. Il faut entendre par là, que si S se déforme en entraînant l'ensemble des sphères admettant la congruence (D) pour congruence des cordes de contact, ce sont toujours les deux mêmes familles de courbes de S qui portent les déplacements infinitésimaux de P orthogonaux aux déplacements du point J correspondant.

La comparaison de l'équation

$$\rho_{11}\,du^2+2\rho_{12}\,du\,dv+\rho_{22}\,dv^2=0 \tag{8}$$

et de l'équation (5) des développables de la congruence (Δ), prouve que les courbes de S correspondant aux développables de (Δ) forment un réseau qui, en même temps que *conjugué*, est *harmonique* par rapport au réseau *invariant* dont nous venons d'établir l'existence.

Un ds^2 et une fonction arbitraire $\rho(u, v)$ des deux variables indépendantes (u, v) étant donnés, il suffit, comme l'on voit, d'envisager la fonction ρ comme définissant la loi de variation du rayon $\left(R=\sqrt{-2\rho}\right)$ d'une sphère centrée au point (u, v) d'une surface admettant le ds^2 considéré, pour avoir, par ce qui précède, une signification géométrique de la forme différentielle seconde covariante de ρ relative au ds^2 envisagé.

Le réseau invariant (8) est en relation avec un réseau, également invariant, porté par S et découvert par M. J. Drach (*Mém. cité*), dont il peut d'ailleurs être considéré comme un cas limite au sens que nous allons préciser. M. J. Drach, dans son Mémoire, a été amené à choisir, sur la déférente, un système de coordonnées orthogonal particulièrement commode, lié à la loi de variation du rayon de la sphère génératrice de la congruence étudiée. Nous allons ici laisser aux coordonnées curvilignes choisies sur la déférente toute leur généralité; cela nous permettra de mettre l'équation du réseau de M. Drach sous une forme invariante particulièrement remarquable, et d'inclure ce réseau dans un faisceau de réseaux analogues de S admettant pour réseaux de base, d'une part le réseau (8) que nous avons introduit plus haut, et d'autre part le réseau des lignes de longueur nulle de S.

Considérons une enveloppe quelconque de sphères centrées sur S, et la congruence (D) de ses cordes de contact. M. J. Drach a montré que le réseau conjugué de S correspondant aux développables de (D) est harmonique par rapport à un certain réseau invariant par déformation de S, ce réseau pouvant être défini par la propriété que les courbes qui le constituent correspondent, par orthogonalité des éléments linéaires, aux courbes homologues décrites par le point I où D perce le plan tangent à S. Exprimons analytiquement cette dernière propriété. Les coordonnées de P étant (x, y, z), et celles de $I(\xi, \eta, \zeta)$ étant données par les formules (1), l'orthogonalité des déplacements infinitésimaux correspondants de P et I se traduit par la relation

$$\mathrm{S}\,dx.d\xi = \mathrm{S}\,dx.d\big(x + \Delta(x, \rho)\big) = 0,$$

soit, en introduisant l'élément linéaire de S, et en tenant compte de ce que, comme nous l'avons vu, $\mathrm{S}\,dx.d\Delta(x, \rho)$ est la forme différentielle seconde covariante de ρ, forme que nous représenterons par $\delta^2\rho$

$$ds^2 + \delta^2\rho = 0. \tag{9}$$

Telle est la forme invariante simple annoncée de l'équation du réseau invariant de M. J. Drach.

Nous avons observé plus haut, au sujet de la substitution de $k\rho$ à ρ dans les équations (1) de (D), que cette substitution revenait à remplacer (D) par une nouvelle congruence *de contact* relative à la même déférente S, un rayon quelconque D′ de cette congruence (parallèle au rayon D correspondant) étant situé dans le plan (P, D) et coupant le plan tangent en P à S au point I′ tel que $\overrightarrow{\mathrm{PI'}} = k.\overrightarrow{\mathrm{PI}}$. L'ensemble des congruences de contact relatives aux différentes valeurs de k forme un faisceau de congruences à rayons homologues parallèles et coplanaires, et l'ensemble des réseaux invariants de M. Drach relatifs à ces diverses congruences constitue un faisceau de tels réseaux. Le réseau général de ce faisceau s'obtient évidemment en remplaçant ρ par $k\rho$

dans (9), ce qui donne

$$ds^2 + k\,\delta^2\rho = 0.$$

Pour $k = \infty$ on obtient le réseau $\delta^2\rho = 0$, ce qui est conforme à la construction géométrique exposée plus haut qui nous a conduit à la considération de ce réseau. Pour $k = 0$, on obtient le réseau des lignes de longueur nulle de S; ce réseau est bien un réseau de M. Drach particulier, puisque pour $k = 0$ la congruence (D) se réduit à celle des normales à S et que, I étant ici confondu avec P, les déplacements de ces deux points ne peuvent être orthogonaux que sur les lignes de longueur nulle de S.

Les aperçus géométriques qui précèdent mettent suffisamment en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir, dans certains cas, à envisager la congruence rectiligne la plus générale de l'espace comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères. L'adjonction d'une enveloppe de sphères à la congruence rend parfois intuitifs certains résultats qui, une fois obtenus, peuvent être dégagés de la considération des sphères qui ont servi à les établir, et présentés dans le style ordinaire de la théorie des congruences rectilignes. Il en est ainsi, par exemple, du résultat obtenu dans le paragraphe actuel relativement aux transformations des congruences de contact déduites de la substitution de $k\rho$ à ρ. Dire qu'une congruence est la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères de déférente S, c'est dire qu'elle est *orthogonale* (¹) à un réseau conjugué porté par S, et le résultat en question peut être ainsi présenté :

Si une congruence (D) et un réseau conjugué (P) sont orthogonaux, toute congruence obtenue en transformant chaque rayon D par l'homothétie (P, k), $k =$ const., *est orthogonale à un certain réseau conjugué ayant même surface support que* (P). En outre, si l'on déplace chaque système (P, D) par la translation qui amène P en un point fixe O, l'ensemble des droites Δ transformées *décrit encore une congruence orthogonale à un réseau conjugué de même support que les précédents*.

Dans le cas particulier où (P) est un réseau de courbure, la proposition précédente n'est pas nouvelle; les différents réseaux conjugués relatifs aux diverses congruences transformées de (D) sont alors tous confondus avec le réseau de courbure (P); mais il n'en est pas de même dans le cas général que nous venons d'envisager, où les différents réseaux conjugués relatifs aux congruences de (D) sont tous distincts.

(¹) Rappelons qu'une congruence et un réseau sont dits orthogonaux, si les rayons de la congruence et les plans tangents du réseau sont en correspondance telle que la droite génératrice de la congruence est perpendiculaire au plan tangent correspondant du réseau, les développables de la congruence correspondant aux courbes du réseau.

3. *Congruences de contact normales.* — Nous avons déjà eu l'occasion de voir que, si une surface S est rapportée à ses lignes de courbure, la condition pour que la congruence des cordes de contact (MM′) d'une enveloppe de sphères centrées sur S et définies par leurs rayons $\rho(u, v)$ soit normale est

$$\rho_{12} = 0.$$

En vue des développements qui vont suivre nous avons besoin de rechercher la forme que prend l'équation précédente lorsque la déférente est rapportée au système (u, v) le plus général. La condition pour que (MM′) soit normale est (les notations étant toujours les mêmes)

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}. \tag{10}$$

Un calcul facile, fait en tenant compte des expressions (1) de ξ, η, ζ, des expressions de $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad (H = \sqrt{EG - F^2}),$$

et de celles des dérivées des paramètres différentiels $\Delta(x, \rho)$, $\Delta(y, \rho)$, $\Delta(z, \rho)$ qui sont

$$\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial u} = \frac{(G\rho_{11} - F\rho_{12})}{H_2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{(E\rho_{12} - F\rho_{11})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}$$
$$+ \frac{1}{H^2}\left[\left(G\frac{\partial \rho}{\partial u} - F\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)D + \left(E\frac{\partial \rho}{\partial v} - F\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)D'\right]X,$$
$$\frac{\partial \Delta(y, \rho)}{\partial u} = \ldots, \qquad \frac{\partial \Delta(z, \rho)}{\partial v} = \ldots,$$
$$\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial v} = \frac{(G\rho_{12} - F\rho_{22})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{(E\rho_{22} - F\rho_{12})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} +$$
$$+ \frac{1}{H^2}\left[\left(G\frac{\partial \rho}{\partial u} - F\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)D' + \left(E\frac{\partial \rho}{d v} - F\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)D''\right]X,$$
$$\frac{\partial \Delta(y, \rho)}{\partial v} = \ldots, \qquad \frac{\partial \Delta(z, \rho)}{\partial v} = \ldots,$$

transforme l'équation (10) en

$$\rho_{11}(FD'' - GD') + \rho_{12}(GD - ED'') + \rho_{22}(ED' - FD) = 0,$$

que nous écrirons sous la forme

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Telle est, S étant rapportée à un système de coordonnées curvilignes quelconques, la condition pour que la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S soit normale. De par la symétrie de sa forme, l'équation (11) se prête particulièrement à l'étude des congruences normales de contact; elle est d'ailleurs susceptible de rapprochements intéressants.

(11) redonne aussitôt des résultats antérieurement énoncés. Ainsi, si la déférente est rapportée à ses lignes de courbure, on a $F=0$, $D'=0$, et l'on retrouve l'équation $\rho_{12}=0$. De même, si la déférente est une sphère (de rayon 1 par exemple), on a

$$D=-E, \qquad D'=-F, \qquad D''=-G;$$

le déterminant (11) est identiquement nul, et l'on retrouve le résultat suivant lequel toute enveloppe de sphères à déférente sphérique admet comme congruence de ses cordes de contact une congruence normale.

On lit aussi sur l'équation (11) que, si ρ et ρ' définissent deux congruences de contact normales relatives à la même déférente S, il en est de même de $\rho''=a\rho+b\rho'+c$, (a, b, $c=$ const.), et que par suite, si deux enveloppes de sphères centrées sur la même déférente et de rayons générateurs respectifs R et R', ont des congruences de contact normales, il en est de même des enveloppes de sphères de même déférente dont les rayons générateurs R'' sont définis par $R''^2=aR^2+bR'^2+c$. Cette circonstance correspond au fait bien connu que si deux surfaces ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, il en est de même de toutes les surfaces obtenues en partageant dans un rapport constant arbitraire les segments joignant deux points homologues (de même image sphérique) quelconques sur les deux surfaces.

Mais une remarque plus intéressante est la suivante. Introduisons la troisième forme quadratique fondamentale de la déférente (supposée non développable), c'est-à-dire le ds^2 de sa représentation sphérique

$$ds'^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2.$$

Cette troisième forme est une combinaison linéaire des deux premières, on a

$$e=-(KE+HD), \qquad f=-(KF+HD'), \qquad g=-(KG+HD''),$$

K et H désignant les courbures totale et moyenne de S; il en résulte que l'on peut, dans l'équation (11), substituer e, g, f à E, G, F respectivement. On peut donc écrire (11) sous la forme

$$(11')\qquad \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ e & f & g \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}=0.$$

Nous sommes ainsi amenés à porter notre attention sur les enveloppes de sphères, admettant pour déférentes deux surfaces applicables sur une sphère et transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre. Soient S et S_1 deux telles surfaces; S_1 s'obtient en échangeant la première et la troisième forme fondamentale de S, la deuxième forme restant la même pour les deux surfaces. La correspondance entre S et S_1 conserve les aires, les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux (qui sont seulement permutés), mais ce n'est pas une applicabilité. La substitution de la troisième forme fondamentale de S à la première substitue, à l'équation (11), l'équation *équivalente* (11′) qui définit les congruences de sphères de déférente S_1 admettant des congruences normales pour congruences des cordes de contact. On voit que le problème de la recherche des congruences de sphères à congruence des cordes de contact normales, une fois résolu pour une déférente à courbure totale constante positive, se trouve par cela même résolu pour la transformée d'Hazzidakis de cette déférente. D'une façon plus précise, si S et S_1 sont deux surfaces à courbure totale constante positive transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre, et si (C) est la congruence de sphères la plus générale de déférente S admettant pour congruence des cordes de contact une congruence normale, il suffit pour avoir la congruence de sphères la plus générale à congruence de contact normale de déférente S_1, *de centrer en chaque point de* S_1 *une sphère égale à la sphère de* (C) *centrée au point correspondant de* S. D'ailleurs, dans la transformation qui fait passer des congruences de sphères (C) à celles que la construction ci-dessus leur associe, les développables des congruences des cordes de contact *sont conservées* comme correspondant aux lignes de courbure des deux déférentes transformées d'Hazzidakis.

4. *Déformation finie ou continue des congruences de contact.* — Dans l'exemple, qui termine le numéro précédent, de transformation de l'ensemble des congruences normales de contact relatives à une déférente déterminée en un ensemble analogue, la correspondance entre les deux déférentes transformées n'est pas l'une des applications possibles d'une déférente sur l'autre. Nous pouvons alors nous poser le problème de la recherche des surfaces telles que si l'on considère l'ensemble des congruences normales de contact relatives à l'une, S, de ces surfaces, on puisse trouver une déformation de S, après laquelle l'ensemble des congruences normales ci-dessus (chaque rayon étant supposé invariablement lié au plan tangent correspondant de S et entraîné avec ce plan) se transforme en l'ensemble analogue relatif à la déférente déformée de S.

L'équation (11) fournit aisément la solution de cette question. S étant supposée donnée, les rayons $R = \sqrt{-2\rho}$ des sphères centrées sur S définissant les différentes enveloppes de sphères de déférente S à congruences de contact normales, sont définies par l'équation (11) où E, F, G, D, D′, D″ sont des quantités supposées connues. Nous supposerons, pour simplifier, S rapportée à ses lignes de courbure; on aura alors $F = D' = 0$, et l'équation (11) s'écrira

$$(GD - ED'')\rho_{12} = 0.$$

La quantité $(GD - ED'')$ n'est identiquement nulle que si S est une sphère. Dans ce dernier cas il n'existe pas de déformations (autres que l'une des déformations banales constituées par les différents glissements de S sur elle-même), transformant l'ensemble des congruences de contact relatives à S en l'ensemble analogue relatif à la déférente déformée $\overline{S}$. On sait en effet que le premier des deux ensembles ci-dessus est constitué par *toutes* les congruences normales de l'espace, alors qu'il *n'en est pas de même* pour le second qui correspond à une déférente *non sphérique*. Nous devons donc supposer

$$GD - ED'' \neq 0,$$

de sorte que l'équation (11) relative à S s'écrira

$$\rho_{12} = 0. \tag{12}$$

L'équation (11) relative à une déformée $\overline{S}$ de S, définie par les coefficients $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$ de sa deuxième forme fondamentale, sera

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & O & G \\ \overline{D} & \overline{D'} & \overline{D''} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Pour qu'il existe une déformation de S, transformant les congruences normales de contact relatives à S en celles relatives à la surface déformée $\overline{S}$, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les quantités $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$, satisfaisant aux équations de Gauss-Codazzi, et telles que l'équation (13) ait les mêmes solutions en ρ que l'équation (12). (13), développée, s'écrit

$$(G\overline{D} - E\overline{D''})\rho_{12} + \overline{D'}(E\rho_{22} - G\rho_{11}) = 0. \tag{13}$$

$\overline{S}$ ne pouvant être sphérique s'il s'agit d'une déformation $(\overline{S} \to S)$ véritable, on aura nécessairement

$$G\overline{D} - E\overline{D''} \neq 0,$$

et l'on voit alors que l'équivalence de (12) et de (13) exige, soit que $\overline{D'} = 0$, soit que l'équation

$$E\rho_{22} - G\rho_{11} = 0$$

soit une conséquence de $\rho_{12} = 0$. Cette dernière hypothèse étant impossible, on aura nécessairement

$$\overline{D'} = 0,$$

condition qui exprime que, sur la déférente déformée $\overline{S}$, le réseau (u, v) *est celui des lignes de courbure* tout comme sur la déférente initiale S.

Les surfaces S fournissant des solutions du problème envisagé sont donc les surfaces *susceptibles d'une déformation conservant les lignes de courbure*, les surfaces $\overline{S}$ associées à S étant précisément celles qui lui correspondent dans la déformation précédente.

Le problème auquel nous venons de nous ramener (détermination des déformations à lignes de courbure persistantes) est bien connu. On sait qu'il convient de distinguer deux cas, suivant que S est susceptible d'une déformation *continue* conservant les lignes de courbure, ou d'une déformation *finie* conservant ces mêmes lignes. Dans le premier cas les surfaces S sont les *surfaces moulures à directrice cylindrique;* dans le second cas ce sont *les surfaces qui ont même image sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces déformées de la sphère.*

Parmi ces dernières surfaces figurent les surfaces à courbure moyenne constante. Une telle surface S est parallèle à une surface à courbure totale constante positive, et est susceptible d'une déformation finie (et une seule) la transformant en une surface S_1 de même courbure moyenne constante, avec conservation des lignes de courbure et permutation des rayons de courbure principaux. Si, au cours de cette déformation, S entraîne les enveloppes de sphères à congruences de contact normales dont elle est la déférente, après la déformation ces enveloppes de sphères retrouvent leur propriété initiale d'avoir des congruences normales pour congruences des cordes de contact. La considération des enveloppes de sphères à congruences des contacts normales est, comme l'on voit, l'origine d'un rapprochement nouveau, entre la transformation d'Hazzidakis des déformées de la sphère, et la déformation avec conservation des lignes de courbure des surfaces à courbure moyenne constante.

5. *Déformation arbitraire des congruences de contact.* — Après les déformations *finies* ou *continues* de la déférente d'une enveloppe de sphères, il est naturel d'en envisager les déformations *arbitraires* et de se demander comment se comportent, dans de telles déformations, les enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales. Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des congruences normales de contact relatives à une déférente déterminée S ne peut, pour aucun choix de S, être conservé dans une déformation arbitraire de S. Pour toute surface S, il existe toujours une congruence normale de contact arbitrairement déformable avec S : c'est la congruence de ses normales qui est une congruence de contact pour les enveloppes de sphères de rayon constant centrées sur S. Si S est choisie arbitrairement, il n'existe pas d'autre congruence normale de contact arbitrairement déformable avec S que la congruence de ses normales. Mais il existe des surfaces S spéciales, auxquelles on peut associer des enveloppes de sphères, les admettant pour déférentes, et donnant lieu à des congruences de contact normales arbitrairement déformables, autres que les congruences formées par leurs normales. Ce sont ces surfaces et les congruences associées que nous allons maintenant déterminer.

Il s'agit d'exprimer que l'équation (11), supposée vérifiée par une certaine fonction $\rho(u, v)$, reste vérifiée par cette même fonction lorsque D, D', D'' varient en satisfaisant constamment aux équations de Gauss-Codazzi. Il faut et il suffit pour cela, étant donné la forme *linéaire* en D, D', D'' de l'équation (11), que les deux premières lignes du déterminant premier membre soient proportionnelles. Puisque nous n'envisageons que les congruences de contact arbitrairement déformables autres que celle formée par les normales à la déférente, la fonction $\rho(u, v)$ n'est pas une constante, et la proportionnalité indiquée fournit le système

$$\frac{\rho_{11}}{E} = \frac{\rho_{12}}{F} = \frac{\rho_{22}}{G}. \tag{14}$$

Si l'on choisit comme courbes $u =$ const. sur la déférente les courbes le long desquelles le rayon de la sphère génératrice Σ est constant, et comme courbes $v =$ const. les trajectoires orthogonales des précédentes, on aura évidemment

$$\rho = \rho(u), \qquad F = 0,$$

et le système (14) s'écrira

$$\rho_{12} = 0, \qquad G\rho_{11} - E\rho_{22} = 0,$$

soit en remplaçant les dérivées covariantes par leurs expressions,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u} \log\sqrt{EG}\, \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

La première équation (15) prouve que E est fonction de u seulement. En changeant le paramètre u, on peut prendre $E = 1$. La deuxième équation du système s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\log \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u} \log\sqrt{G},$$

d'où, par intégration,

$$\sqrt{G} = V \frac{\partial \rho}{\partial u} \qquad (V = \text{fonct. de } v),$$

et, moyennant un changement du paramètre v,

$$\sqrt{G} = \frac{\partial \rho}{\partial u}.$$

On voit que les déférentes des enveloppes de sphères, à congruences de contact normales arbitrairement déformables, dont l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 dv^2 \qquad [\rho = f(u)],$$

sont *applicables sur des surfaces de révolution*.

Inversement, toute surface S applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire

$$(16) \qquad ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 \qquad (U = \text{fonct. de } u)$$

fournit une solution du problème posé, le rayon R de la sphère centrée au point (u, v) de S étant défini par la relation

$$(17) \qquad \rho = -\frac{R^2}{2} = \int U\,du,$$

d'où l'on déduit

$$R = \sqrt{2\int U\,du}.$$

Si l'on observe que l'on peut, en modifiant v, remplacer U par λU ($\lambda = \text{const.}$) dans l'élément linéaire (16) de S, on voit d'ailleurs qu'à toute surface S applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire (16), on peut associer ∞^1 congruences de sphères concentriques arbitrairement déformables du type étudié (on ne regarde toujours pas comme distinctes deux congruences dont l'une se déduit de l'autre en ajoutant une constante aux carrés des rayons des sphères qui constituent cette dernière). Pour l'une quelconque de ces ∞^1 congruences, ρ et R ont pour expressions

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho = \lambda\int U\,du, \\ &R = \sqrt{2\lambda\int U\,du} = k\sqrt{\int U\,du} \end{aligned}\right. \qquad (\lambda, k = \text{const. arb.}).$$

Les congruences des cordes de contact des ∞^1 congruences de sphéres qui viennent d'être déterminées sont susceptibles d'une construction géométrique simple que nous allons mettre en évidence en calculant $\overline{PI}$, P étant le centre de la sphère génératrice Σ et I le point où la corde de contact (MM') correspondante perce le plan tangent à la déférente S en P. Sur S, les courbes $v = \text{const.}$ sont les déformées des méridiens de l'une des surfaces de révolution sur lesquelles S est applicable, et la droite PI est la tangente au point P à la déformée de méridien passant par ce point. On a vu au n° 2 que

$$\overline{PI} = \sqrt{\Delta\rho}.$$

Remplaçons ρ par son expression (17); avec la forme (16) du ds^2 de S, on a

$$\Delta\rho = \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2,$$

et, par suite,

$$\overline{PI} = \frac{d\rho}{du},$$

soit, en tenant compte de (18),

$$\overline{PI} = \lambda U.$$

Si l'on remarque que U n'est autre chose que la distance, à l'axe de révolution, de l'homologue de P dans l'une des déformées révolutives de S, on peut définir ainsi la congruence normale de contact la plus générale arbitrairement déformable avec la déférente :

Soit S une surface quelconque de révolution d'axe Δ. Désignons par P l'un quelconque de ses points; sur la tangente en P au méridien de S passant par ce point, portons (dans un sens ou dans l'autre) une longueur $\overline{PI}$ proportionnelle à la distance du point P à l'axe Δ, puis élevons en I la perpendiculaire D au plan tangent en P à S. L'ensemble des droites D ainsi obtenues, supposées invariablement liées aux plans tangents correspondants, donne, par déformation arbitraire de S, la congruence la plus générale du type envisagé.

Dans le cas particulier où S est une sphère, la construction fournie par l'énoncé précédent se simplifie : les congruences des droites D dont il est question dans l'énoncé général sont les gerbes obtenues *en abaissant d'un point fixe quelconque de l'espace les perpendiculaires aux différents plans tangents à la sphère.*

Nous devons faire ici la remarque suivante. Considérons le problème de la recherche des congruences rectilignes normales dont les différents rayons, supposés perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans tangents, ne cessent de constituer une congruence normale lorsque S se déforme arbitrairement en les entraînant. Ce problème n'est pas nouveau; la première solution en a été donnée par Ribaucour (*loc. cit.*) : S est une surface applicable sur une surface de révolution, et les congruences normales associées à S arbitrairement déformables avec S *sont précisément fournies par la construction à laquelle nous avons été conduits plus haut.* Notre étude montre donc que les congruences normales dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S (obligatoirement applicable sur une surface de révolution) et invariablement liés à ces plans tangents, qui restent normales lorsqu'on déforme S arbitrairement, *sont nécessairement les congruences des cordes de contact d'enveloppes de sphères admettant* S *pour déférente.*

Nous reviendrons au numéro suivant sur ce dernier résultat. Le cas où S est une sphère en offre une vérification directe immédiate : Les congruences normales arbitrairement déformables associées à S étant les gerbes issues des différents points de l'espace, il est clair que chacune de ces congruences est congruence de contact pour l'enveloppe des sphères centrées sur S et passant par le sommet de la gerbe. Pour les surfaces de révolution autres que la sphère, le résultat précédemment énoncé n'était nullement évident.

Dans l'expression (18) du rayon de la sphère génératrice d'une enveloppe admettant pour congruence des cordes de contact une congruence arbitrairement déformable avec la déférente S (supposée amenée à avoir la forme de révolution), $\int_{u_0}^{u} U\,du$ représente, au facteur 2π près, l'aire de la zone limitée à un parallèle fixe de S et au parallèle passant par le centre de la sphère génératrice. Le résultat de la recherche que l'on vient de faire peut donc être présenté sous la forme suivante :

Les enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales arbitrairement déformables avec la déférente s'obtiennent, en centrant en chaque point P *d'une surface quelconque de révolution* S, *une sphère dont le carré du rayon est proportionnel à l'aire de la zone limitée, sur* S, *par un parallèle fixe quelconque et le parallèle (variable) du point* P.

6. *Remarques et rapprochements.* — Le résultat du numéro précédent, suivant lequel les congruences normales dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents à une surface S restant normales par déformation arbitraire de S, sont les congruences de contact d'enveloppes de sphères centrées sur S, est d'autant plus remarquable qu'il cesse d'avoir lieu, si au lieu d'une déformation *arbitraire* de S, on en envisage une déformation *continue* (et à plus forte raison *finie*). Il n'est pas exact que si une congruence normale (C), dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents d'une surface S, reste normale au cours d'une déformation simplement continue de S, (C) est *nécessairement* congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S. Il n'est même pas exact, et ce résultat entraîne évidemment le précédent, que *l'ensemble* des congruences normales dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S qui restent normales au cours d'une déformation continue de S, est nécessairement constitué par des congruences de contact relatives à S. On peut s'en rendre compte par le calcul. Nous préférons nous borner à signaler l'inexactitude annoncée sur un exemple, que nous emprunterons à une étude antérieure sur les surfaces minima [1].

Envisageons une surface minima quelconque S, et une congruence normale quelconque (C) admettant S pour enveloppée moyenne (enveloppe des plans médiateurs des segments focaux). Supposons chaque rayon D de (C) invariablement lié au plan tangent correspondant de S (qui touche S en P). Soumettons S à la déformation continue qui la transforme en ses différentes *associées* S_α ($\alpha =$ angle d'association). (C) ne cesse pas, au cours de cette déformation, d'être normale et d'avoir S_α pour enveloppée moyenne (*voir* le Mémoire cité du *Bulletin des Sciences mathématiques*). Si l'ensemble des congruences

(1) P. VINCENSINI, *Sur les surfaces minima* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LIII, mars 1929).

normales admettant S *pour enveloppée moyenne* était *identique* à l'ensemble des congruences *normales permanentes dans la déformation continue envisagée de* S, on pourrait conclure dans le sens indiqué, car cet ensemble de congruences normales ne saurait être un ensemble de congruences de contact pour des enveloppes de sphères centrées sur S étant donné que les *seules* déférentes possibles pour de tels ensembles arbitrairement déformables sont les surfaces moulures cylindriques (n° 4), alors que S est la *surface minima* la plus générale. Nous allons voir que l'identité en question est facile à établir.

Soit (C) une congruence normale dont le rayon générateur D est perpendiculaire au plan tangent en P à une surface minima S et perce le plan tangent en I, et supposons que cette congruence reste normale lorsque S se déforme continûment en restant minima. Si l'on mène par un point fixe O de l'espace le vecteur $\overrightarrow{OH}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, puis par H la parallèle Δ à D, l'ensemble des droites Δ forme une congruence (Γ) évidemment normale. Déformons continûment S, et transformons-la en l'une quelconque S_α de ses associées. Supposons en outre S_α placée de façon que les normales en deux points correspondants quelconques de S et S_α soient parallèles; deux éléments linéaires homologues feront alors l'angle α. Il est clair qu'après la déformation considérée, le rayon Δ de la congruence (Γ), qui est restée normale, a tourné de l'angle α autour de sa parallèle issue de O. La congruence normale (Γ) jouit donc de cette propriété que si chacun de ses rayons tourne d'un angle déterminé, dans un sens déterminé, autour de sa parallèle issue d'un point fixe de l'espace, elle reste normale. La propriété énoncée *caractérise* les congruences normales admettant pour enveloppée moyenne le point O. (Γ) *est donc une congruence à enveloppée moyenne point* (*le point* O). Or, étant données une surface *quelconque* S et une congruence (N) admettant cette surface pour enveloppée moyenne, si (Γ) est une congruence admettant pour enveloppée moyenne un point fixe O, si l'on établit une correspondance par rayons parallèles entre (N) et (Γ), et si l'on déplace chaque rayon de (N) par la translation $\overrightarrow{OH}$ [H étant la projection orthogonale de O sur le rayon correspondant de (Γ)], les nouvelles droites obtenues *forment une congruence admettant la même enveloppée moyenne* S *que* (N) ([1]).

Si nous effectuons la construction indiquée dans la proposition qui vient d'être rappelée, en prenant pour (N) la congruence des normales à la surface minima S considérée plus haut, laquelle admet évidemment pour enveloppée moyenne S, et pour (Γ) la congruence ainsi dénommée plus haut (ensemble des droites Δ), nous obtenons la congruence normale (C) restant normale par

([1]) Pour cette proposition, on peut voir, en dehors du Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* déjà cité, un Mémoire de la *Société mathématique de Moscou* : *Sur une transformation des congruences rectilignes et les invariants associés*, t. 40, 1933, p. 467.

déformation continue de S envisagée au début. (C) a donc pour enveloppée moyenne S, et l'on peut énoncer ce résultat :

Toute congruence normale dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à une surface minima et invariablement liés à ces plans tangents, qui reste normale au cours de la déformation continue dont S *est susceptible, est une congruence admettant* S *pour enveloppe moyenne.*

Ce dernier résultat établit l'identité annoncée plus haut. On en déduit, comme on l'a expliqué, que le fait, pour une congruence normale dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans, de rester normale au cours d'une déformation *simplement continue* de S, n'entraîne pas comme conséquence *nécessaire* que la congruence soit *de contact* pour une enveloppe de sphères centrées sur S. La nécessité n'a lieu que dans le seul cas où la déformation dont il est question est une déformation *arbitraire* de S.

Nous allons maintenant, pour terminer cette étude, revenir sur le problème de la détermination des enveloppes de sphères à congruences de contact normales relatives à une déférente déterminée S. Ce problème est en relation avec le problème de la recherche des systèmes triples orthogonaux dont S fait partie, ou encore de celui de la détermination des systèmes cycliques normaux à S. Le lien est connu, mais il convient que nous l'examinions à la faveur des résultats qui précèdent, et plus spécialement de certains résultats du n° 2.

L'équation définissant les enveloppes de sphères en question est l'équation (11) du n° 3

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

(11) n'est autre que l'équation (de Cayley) qui définit la portion de normale $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon =$ constante infinitésimale) à S comprise entre S et une surface infiniment voisine dans une famille de Lamé, c'est-à-dire dans une famille faisant partie d'un système triple orthogonal.

Les cas où l'équation de Cayley relative à une surface S admet des solutions permanentes par déformation de S, correspondent aux cas de permanence des enveloppes de sphères de déférente S à congruences de contact normales, étudiés aux n^{os} 4 et 5. Le cas où l'équation de Cayley admet des solutions permanentes par déformation *arbitraire* de S est bien connu; S est applicable sur une surface de révolution; et en prenant son ds^2 sous la forme $ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2$, la solution permanente, qui est *unique*, est (*voir* le n° 4) $\rho = \int U\,du$ (nous négligeons ici la constante λ puisque les solutions de l'équation de Cayley ne sont définies qu'à un facteur constant près).

Les surfaces déformables avec conservation des lignes de courbure par déformation *finie* ou *continue* donnent évidemment lieu à la permanence de *toutes* les solutions des équations de Cayley correspondantes; mais il résulte de l'étude faite au numéro 3 que ce sont les *seules* surfaces donnant lieu à cette permanence.

L'équation (11) est aussi celle qui définit les systèmes cycliques normaux à S. Chaque solution ρ de cette équation donne un tel système, le cercle C normal à S en l'un quelconque P de ses points étant dans le plan normal en P à la courbe $\rho = \text{const.}$ qui passe par P, et le rayon r de C ayant pour expression

$$r = \frac{-\rho}{\sqrt{\Delta\rho}} \quad (^1).$$

Le cercle C est, comme l'on voit, dans le plan (P, D), D étant le rayon de la congruence normale de contact définie par la même solution ρ de l'équation (11) perpendiculaire au plan tangent en P à S. Nous savons d'ailleurs que si I est le point où D perce le plan tangent, $\overline{\mathrm{PI}} = \Delta\rho$, ρ étant lié par la relation $R^2 = -2\rho$ au rayon R de la sphère Σ génératrice de l'enveloppe admettant la congruence de contact envisagée, laquelle sphère touche son enveloppe aux deux points M, M' de D tels que $\mathrm{PM} = \mathrm{PM'} = R = \sqrt{-2\rho}$. On voit dès lors que $2r \times \overline{\mathrm{PI}} = R^2$. Il en résulte une relation remarquable établie par Darboux par une voie différente [2], et à laquelle notre étude nous conduit d'une façon intuitive, entre la congruence (D) et le système cyclique (C) :

Le cercle C *et le rayon* D *relatifs à un même point* P *de* S *sont inverses par rapport à la sphère* Σ.

Il revient évidemment au même de dire que C est circonscrit au triangle (PMM').

Si l'on remplace ρ par $k.\rho$, ce qui revient à multiplier par un facteur constant les rayons des différentes sphères Σ, D est remplacé par la droite D' du plan (P, D) homothétique de D dans l'homothétie (P, k) [*voir* au n° 2 les propriétés de la transformation de ρ en $F(\rho)$]. La congruence (D') est une congruence normale de contact comme (D), et l'expression du rayon r du cercle C du système cyclique associé à D $\left(r = \frac{-\rho}{\sqrt{\Delta\rho}}\right)$ montre que C reste le même pour toutes les congruences (D') ainsi obtenues. Nous dirons dans la suite que le système cyclique (C) et la congruence normale (D) sont *associés* : à chaque congruence normale de contact (D) définie par une solution ρ de (11) est associé un système cyclique (C) normal à S bien déterminé, mais, comme on vient de le voir, à chaque système cyclique (C) normal à S sont associés ∞^1

(1) *Voir* par exemple L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3e éd., t. II, p. 230.
(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 143.

congruences normales de contact (D). Si l'on connaît (D) sans connaître le rayon $R = \sqrt{-2\rho}$ de la sphère Σ dont l'enveloppe admet (D) comme congruence de contact, la détermination de ρ exige (Darboux, *loc. cit.*) la détermination des lignes de courbure de S puis une quadrature; il en est de même si l'on connaît le système cyclique (C) et si l'on veut en déduire les ∞^1 congruences (D) associées.

Si l'on remplace ρ par une fonction quelconque $F(\rho)$ de ρ (autre que $k\rho$), ce qui revient à remplacer le rayon de Σ par une fonction de ce rayon, la congruence normale de contact (D) *reste de contact*, mais *cesse en général d'être normale*, de sorte que les cercles (PMM') associés aux différents rayons de la congruence transformée cessent de former un système cyclique. Il y a exception si S est une sphère. Alors toutes les congruences (D') correspondant aux différentes formes de la fonction $F(\rho)$ sont de contact et normales, et à chacune d'elles est associé un système cyclique (C') normal à S, le rayon r' du cercle C' normal à S en P ayant pour expression

$$r' = \frac{-\rho'}{\sqrt{\Delta\rho'}} = \frac{F(\rho)}{\rho F'(\rho)}\, r. \tag{19}$$

On voit que les systèmes cycliques normaux à une sphère S jouissent de la propriété que *dans le plan de chaque cercle* C *il existe une infinité d'autres cercles* (*dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument*) *engendrant des systèmes cycliques normaux à* S *et tangents à* C *en l'un des points* P *où* C *coupe normalement* S.

Dans le cas qui vient d'être envisagé où S est une sphère (de rayon un), si U est une surface normale aux rayons d'une congruence (D) associée à un système cyclique (C) normal à S, on a vu, au n° 2, que ρ représente la distance de l'origine O (supposée au centre de S) au plan tangent à U normal au rayon D. Il suffit donc, d'après ce qui précède, pour obtenir les différents systèmes cycliqnes (C') normaux à S à cercles coplanaires avec les cercles homologues de (C) dont il vient d'être question, de déplacer le plan tangent à U parallèlement à lui-même, suivant la direction de D, d'une quantité uniquement fonction de la distance de ce plan au point O. Si (D') est la congruence des normales à l'enveloppe des nouveaux plans, le système cyclique *associé* à (D') est le plus général des systèmes cycliques (C') normaux à S envisagés plus haut.

Parmi les différents déplacements possibles des plans tangents à U parallèlement à eux-mêmes, il en est un qu'il convient d'envisager plus spécialement comme donnant lieu à une relation extrêmement simple entre les rayons r et r' d'un cercle quelconque de (C) et de son homologue dans (C'). C'est celui où le coefficient de r dans (19) se réduit à une constante k. En exprimant que l'on a

$$\frac{F(\rho)}{\rho F'(\rho)} = k,$$

on est conduit à prendre pour $F(\rho)$, h étant une nouvelle constante,

$$F(\rho) = h\rho^{\frac{1}{k}},$$

et, avec ce choix de la fonction $F(\rho)$ définissant le système cyclique (C') transformé de (C), les rayons de deux cercles homologues sont dans le rapport constant k $(r' = kr)$. Nous sommes ainsi conduits à l'énoncé suivant :

Soient U et S une surface et une sphère arbitraires, et (C) le système cyclique normal à S associé à la congruence des normales à U. Conservant les directions des différents plans tangents à U, remplaçons leurs distances au centre O de S par des quantités proportionnelles à une puissance arbitraire (d'ordre $m \neq 1$) de ces distances, et envisageons la surface U_1 enveloppe des nouveaux plans. *Le système cyclique* (C_1) *normal à* S *associé à la congruence des normales à* U_1 *est tel que deux cercles homologues quelconques de* (C) *et* (C_1) (*évidemment tangents au point où ils coupent tous les deux normalement* S) *sont coplanaires, leurs rayons r et r' étant dans un rapport constant* $\left(\frac{r}{r'} = m\right)$.

Le résultat précédent peut être présenté sous la forme suivante, fournissant une propriété de la sphère qu'il nous semble intéressant d'expliciter :

Étant donné un système cyclique quelconque (C) *normal à une sphère* S, *si*, P *étant l'un des points où le cercle générateur* C *du système coupe* S, *on substitue au cercle* C *son homothétique* C' *dans l'homothétie* (P, k), ($k =$ *const. arb.*), *on transforme* (C) *en un nouveau système cyclique* (C') *normal à* S.

Ce dernier résultat peut être rattaché aux recherches de G. Darboux [1], complétées par celles de M. A. Demoulin [2]. S étant une surface rapportée à ses lignes de courbure, d'élément linéaire $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ et de rayons de courbure principaux R, R', le système cyclique le plus général normal à S est engendré par le cercle Γ représenté par rapport au trièdre principal de S par les deux équations

$$(20)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2\dfrac{E}{\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u}}x = 0, \\[2ex] x^2 + y^2 + z^2 + 2\dfrac{G}{\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v}}y = 0, \end{cases}$$

où λ est une solution quelconque de l'équation [3]

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R'}\right) = 0.$$

---

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.*

(2) A. DEMOULIN, *Recherches sur les systèmes triples orthogonaux* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, t. XI, 1re partie).

(3) *Voir* A. DEMOULIN, *loc. cit.*

Si S est une sphère, le cercle Γ engendre un système cyclique pour toutes les formes de la fonction λ, et les équations (20) montrent qu'il suffit de remplacer λ par λ^m ($m=$ const.) pour transformer le cercle Γ en un cercle homothétique dans une homothétie de rapport constant relative au point où Γ coupe normalement S.

La transformation dont il vient d'être question s'applique évidemment aux systèmes cycliques normaux à un plan. Mais dans ce dernier cas on peut vérifier que l'on a l'énoncé plus général suivant :

Étant donné un système cyclique quelconque (C) *normal à un plan fixe* π, *si l'on substitue à chaque cercle* C *un cercle de son plan, centré dans* π, *et formant avec* C *une figure de forme invariable, l'ensemble des cercles* C′ *ainsi obtenus constitue un nouveau système cyclique normal à* π.

Il convient de se demander si le procédé de transformation si simple qui précède des systèmes cycliques normaux à une sphère donne une propriété *caractéristique* de la sphère. Autrement dit si, lorsqu'une surface S est telle que les différents systèmes cycliques qui lui sont normaux jouissent de la propriété de rester cycliques lorsqu'on remplace chaque cercle par le cercle homothétique dans une homothétie de rapport constant, le centre de l'homothétie étant le point où le cercle envisagé coupe normalement S, la surface S est nécessairement une sphère. Nous allons voir qu'il en est effectivement ainsi.

La proposition que nous voulons démontrer est évidemment un cas particulier de la suivante : si une surface S est telle que *tout* système cyclique (C) normal à S puisse être transformé en un autre système cyclique (C′) normal à S, *chaque cercle de* (C′) *étant coplanaire au cercle correspondant* (*normal à* S *au même point*) *de* (C), S est une sphère. C'est cette dernière proposition que nous allons établir.

S étant toujours supposée rapportée à ses lignes de courbure, on a vu au n° 4 que la fonction ρ définissant les différents systèmes cycliques normaux à S est définie par l'équation

$$(\mathrm{GD}-\mathrm{ED}'')\rho_{12}=0. \tag{21}$$

Si ρ et ρ' sont les fonctions définissant deux systèmes cycliques normaux à S à cercles homologues coplanaires, nous avons fait remarquer au n° 2 que la coplanéité exige que ρ' soit une fonction de $\rho[\rho'=\mathrm{F}(\rho)]$. Pour que S jouisse de la propriété énoncée ci-dessus, il faut donc, soit que $\mathrm{GD}-\mathrm{ED}''=0$, ce qui exprime que S est une sphère, soit que l'équation $\rho_{12}=0$ soit vérifiée simultanément par ρ et par $\mathrm{F}(\rho)$. Nous allons montrer que cette dernière hypothèse est inadmissible.

Explicitons l'équation $\rho_{12}=0$; nous obtenons

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0. \tag{22}$$

En exprimant que (22) est vérifiée simultanément par ρ et $F(\rho)$, on trouve que l'on doit avoir

$$F''(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,$$

ce qui exige, soit que $F(\rho)$ soit de la forme $k\rho+h$ (k, $h=$ const.), cas que nous devons écarter comme transformant, comme l'on sait, le système cyclique défini par ρ en lui-même; soit que l'une des quantités $\frac{\partial\rho}{\partial u}$, $\frac{\partial\rho}{\partial v}$ soit nulle, cas qui doit être écarté aussi comme ne conférant la propriété de l'énoncé qu'à *certains* systèmes cycliques normaux à S et non à *tous*. On a donc nécessairement $GD-ED''=0$, et S est bien une sphère comme on l'avait annoncé.

Il convient de noter que le raisonnement qui précède montre que les *seules* surfaces S, telles que parmi les systèmes cycliques qui leur sont normaux il y en ait qui soient transformables en nouveaux systèmes cycliques coplanaires aux premiers conformément à l'énoncé précédent, sont celles pour lesquelles l'équation (22) admet une solution fonction de u seul ou de v seul. Supposons par exemple que (22) soit vérifiée par $\rho=f(v)$; cela entraîne

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0,$$

soit en remplaçant $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ par son expression

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}=0.$$

E est donc une fonction de u seul que l'on peut réduire à l'unité. L'élément linéaire de S a alors la forme

$$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

Sur S, les courbes $v=$ const. sont donc des lignes géodésiques; et comme elles sont aussi par hypothèse lignes de courbure, S est une *surface moulure générale*.

Les plans des cercles des systèmes cycliques normaux à une telle surface, transformables en systèmes cycliques coplanaires normaux à la même surface, sont d'ailleurs les plans tangents à la développable directrice, et la fonction $F(\rho)$ définissant les systèmes cycliques transformés est quelconque.

Il était évident que les surfaces moulures donneraient des solutions du problème posé; mais nous voyons de plus que les solutions ainsi obtenues constituent l'ensemble de toutes les solutions possibles.

En ce qui concerne les systèmes cycliques les plus généraux normaux à une surface quelconque S, les résultats du n° 2 fournissent un procédé de transformation faisant correspondre, à l'un de ces systèmes supposé connu, une infinité d'autres systèmes normaux à la même surface. Soit une surface quelconque S rapportée à ses lignes de courbure (u, v). Les différents couples de systèmes cycliques (C) et de congruences normales de contact (D) *associés* relatifs à S correspondent aux différentes solutions ρ de l'équation (11) qui, dans le cas actuel, prend la forme du n° 1

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \, \partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0; \tag{23}$$

et si l'un des deux éléments (C) ou (D) est connu, une quadrature fait connaître la solution correspondante ρ de (23) et entraîne la connaissance de l'autre élément. Cela étant, supposons connu un système cyclique (C) normal à S; construisons l'une quelconque des ∞^1 congruences normales (D) associées, et soient, P le point où le cercle C coupe orthogonalement S, et I le point où le rayon associé D perce le plan tangent à S en P. Menons par O le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, et par J la parallèle Δ à D. La congruence des droites Δ est évidemment normale puisque (D) l'est, et nous avons vu au n° 2 que cette congruence est congruence des cordes de contact pour une enveloppe de sphères centrées sur S. Il suffit de construire le système cyclique (C′) associé à (Δ) pour obtenir le système cyclique transformé de (C) annoncé. En appliquant la transformation à (C′), on en déduit un nouveau système cyclique (C″) normal à S, et ainsi de suite. A partir d'un système cyclique déterminé normal à S, la construction précédente donne une suite illimitée de nouveaux systèmes cycliques tous normaux à S, et, comme on peut disposer de la position du point O dans l'espace, la transformation qui vient d'être exposée fournit ∞^3 suites analogues.

Le procédé de transformation ci-dessus, dont l'application répétée n'exige que des quadratures, peut évidemment être considéré comme un procédé de transformation (dont l'application n'exige que des quadratures) des solutions de l'équation de Laplace (23).