ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. LANDAU

Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 399-442

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__399_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION POUR LA FORMULE DE RIEMANN

SUR

LE NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS

INFÉRIEURS A UNE LIMITE DONNÉE,

ET

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE PLUS GÉNÉRALE

POUR LE

CAS DES NOMBRES PREMIERS D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR E. LANDAU, à Berlin.

INTRODUCTION.

Dans son célèbre Mémoire *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Riemann (1) est parvenu, par une voie non rigoureuse (ce qu'il reconnaissait lui-même), à l'expression suivante (6) pour une fonction en étroite liaison avec le nombre des nombres premiers inférieurs à x.

Soient $x > 1$, $F(x)$ le nombre des nombres premiers $< x$ pour x non premier (2), mais égal à ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$ pour x premier;

(1) *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1859, p. 671-680; *Werke*, 2e édition, 1892, p. 145-155. Une traduction française de ce Mémoire, faite par M. Laugel, a paru, sous le titre *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*, en 1895, chez M. Gauthier-Villars à Paris, la traduction des Œuvres complètes, également par M. Laugel, en 1898; le Mémoire en question y occupe les pages 165-176.

(2) x peut être entier ou non.

soit

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots.$$

En d'autres termes, pour les x qui ne sont ni premiers ni puissances de nombres premiers,

$$f(x) = \sum_{\substack{p, m \\ p^m < x}} \frac{1}{m},$$

où p parcourt (¹) les nombres premiers, m les entiers positifs; pour $x = p_0^{m_0}$,

$$f(x) = \lim_{h = +0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Soit $\zeta(s)$ la fonction analytique de $s = \sigma + ti$, définie, pour $\sigma > 1$, par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ou par le produit

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Riemann avait démontré, au commencement de ce travail, que

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

est une fonction entière et que $\zeta(s)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{s\pi}{2} \Gamma(s) \zeta(s), \tag{1}$$

de sorte que, abstraction faite des zéros de premier ordre -2, -4, -6, ..., $-2m$, ..., la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéro extérieur à la bande $0 \leqq \sigma \leqq 1$. L'équation (1) montre que, si ρ est un zéro situé dans cette bande, le nombre $1-\rho$ est également un zéro. Il est encore facile à constater que, pour $0 \leqq s < 1$, $\zeta(s)$ est réel et négatif, de sorte

(¹) Comme toujours dans mon travail actuel.

que tous les ρ (pourvu qu'il en existe) ont leurs ordonnées différentes de zéro.

Riemann présuma et rendit probable par des raisonnements heuristiques les quatre faits [1] suivants :

1° $\zeta(s)$ possède, dans la bande $0 \leqq \sigma \leqq 1$, une infinité de zéros.

2° La fonction entière de $z = \frac{s-\frac{1}{2}}{i} = \frac{1}{2}i - si$

$$\xi(z) = \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

qui a comme zéros précisément les $\frac{1}{2}i - \rho i$ et qui, en vertu de (1), est une fonction paire, est de la forme

$$\xi(z) = \xi(0)\prod_{\alpha}\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right),$$

où les α sont rangés arbitrairement. Cela veut dire en langue moderne que $\xi(z)$, considéré comme fonction de z^2, est de genre 0 et exige entre autres que la série

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2} \tag{2}$$

converge.

3° Pour $x > 1$, la série

$$\sum_{\rho',\rho''}\{Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''})\}, \tag{3}$$

---

[1] Les autres présomptions de Riemann, démontrées à l'heure actuelle seulement en partie, sont inutiles pour le problème en question. Dans la première Partie d'un Mémoire sous presse aux *Mathematische Annalen*, *Über die Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen*, je donne d'ailleurs une démonstration fort simplifiée du théorème présumé par Riemann et démontré pour la première fois par M. von Mangoldt en 1905 sur le nombre $N(T)$ des racines ρ dont l'ordonnée est comprise entre 0 et T (inclusivement) :

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}T\log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T + O(\log T).$$

où les ρ sont arrangés en couples $\rho' = \beta + \gamma i (\gamma > 0)$, $\rho'' = 1 - \rho' = 1 - \beta - \gamma i$ par ordonnées absolument croissantes, converge. Dans le terme général de cette série, x^ρ signifie la puissance $e^{\rho \log x}$ pour $\log x$ réel, et $Li(e^w) = Li(e^{u+vi})$ signifie pour $v > 0$ la limite

$$(4)\qquad \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^y}{y}\, dy + \pi i = \int_{-\infty+vi}^{u+vi} \frac{e^y}{y}\, dy + \pi i,$$

pour $v < 0$ la limite

$$(5)\qquad \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^y}{y}\, dy - \pi i = \int_{-\infty+vi}^{u+vi} \frac{e^y}{y}\, dy - \pi i.$$

4° Il existe, pour $x > 1$, l'identité [1]

$$(6)\qquad f(x) = Li(x) - \sum_{\rho', \rho''} \{ Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''}) \} + \int_x^\infty \frac{1}{u^2 - 1} \frac{du}{u \log u} - \log 2,$$

où $Li(x) = Li(e^{\log x})$ signifie la limite

$$(7)\qquad \lim_{h=+0} \left(\int_{-\infty}^{-h} \frac{e^y}{y}\, dy + \int_h^{\log x} \frac{e^y}{y}\, dy \right).$$

Quant à $Li(e^w)$, on a d'ailleurs, dans tout le plan affecté d'une coupure suivant l'axe réel de 0 à $-\infty$,

$$(8)\qquad Li(e^w) = C + \log w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n \cdot n!},$$

où C désigne la constante d'Euler et $\log w$ la fonction uniforme (dans le plan découpé) réelle pour $w > 0$; (8) peut remplacer les trois définitions (4), (5), (7), qui seront cependant plus commodes dans la suite.

La formule (6) est la célèbre formule de Riemann, présumée, mais non démontrée par lui; elle donne une expression explicite pour $f(x)$,

---

(1) Il faut corriger une légère erreur de calcul chez Riemann dans le dernier terme constant, qui doit être $-\log 2$, comme c'est écrit dans (6).

fonction qui ne diffère du nombre des nombres premiers inférieurs à x que d'une quantité d'ordre de grandeur $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$.

Après Riemann, il y eut, dans cet ordre d'idées, une stagnation de plus d'une trentaine d'années. En 1893, M. Hadamard [1] rendit possibles les recherches ultérieures en démontrant les deux premiers des quatre théorèmes présumés par Riemann. Il prouva donc que les ρ existent en nombre infini et que $(s-1)\zeta(s)$ est de genre 1 ; on a, par conséquent,

$$(s-1)\zeta(s) = ae^{bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}},$$

où s_n parcourt tous les zéros dans un ordre quelconque, et, en mettant en évidence les zéros $-2, -4, \ldots,$

$$(9) \qquad (s-1)\zeta(s) = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}s}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}.$$

a, b, A, B désignent des constantes, dont la valeur ne nous intéresse pas ici.

Les démonstrations de M. Hadamard ont été depuis considérablement simplifiées dans leurs deux parties :

I. La partie générale, qui consiste à établir le théorème : *Si $g(y)$ est une fonction entière satisfaisant à la relation*

$$|g(re^{\varphi i})| < ce^{r^{\mathfrak{z}}},$$

où c, $\mathfrak{z}$ sont constants et $\mathfrak{z} < 1$, $g(y)$ est de genre zéro.

II. La partie spéciale, qui montre que l'hypothèse de ce théorème est remplie pour $\xi(z) = \xi(\sqrt{y}) = g(y)$.

Le lecteur, qui ne sait encore rien sur la fonction ζ ni sur la théorie des fonctions entières de M. Hadamard, trouvera des démonstrations

[1] *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, 1893, p. 171-215), p. 210-215.

très courtes de tout ce que je viens de rappeler jusqu'ici comme connu dans une de mes dernières publications ([1]).

Après M. Hadamard, qui avait ainsi surmonté les premiers des grands obstacles, M. von Mangoldt ([2]), s'appuyant sur ses recherches et en y ajoutant une longue et ingénieuse analyse, réussit à prouver les théorèmes 3° et 4°, c'est-à-dire la convergence de la série (3) et la vérité de l'identité (6). Il va sans dire que la première de ces deux besognes était la plus ardue.

Pour familiariser le lecteur avec la série (3), je lui montrerai tout d'abord que le problème de démontrer sa convergence est identique avec celui de prouver la convergence de la série d'apparence plus simple

$$\sum_{\rho',\rho''}\left(\frac{x^{\rho'}}{\rho'}+\frac{x^{\rho''}}{\rho''}\right). \tag{10}$$

En effet, soient $\rho'=\beta+\gamma i$ et $\rho''=1-\beta-\gamma i\,(\gamma>0)$ deux ρ complémentaires; on a

$$\mathrm{L}i(x^{\rho'})+\mathrm{L}i(x^{\rho''})=\left(\int_{-\infty+\gamma i\log x}^{\rho'\log x}\frac{e^y}{y}\,dy+\pi i\right)+\left(\int_{-\infty-\gamma i\log x}^{\rho''\log x}\frac{e^y}{y}\,dy-\pi i\right);$$

or,

$$\int\frac{e^y}{y}\,dy=\frac{e^y}{y}+\int\frac{e^y}{y^2}\,dy;$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{L}i(x^{\rho'})+\mathrm{L}i(x^{\rho''})&=\frac{x^{\rho'}}{\rho'\log x}+\frac{x^{\rho''}}{\rho''\log x}\\&\quad+\int_{-\infty+\gamma i\log x}^{\rho'\log x}\frac{e^y}{y^2}\,dy+\int_{-\infty-\gamma i\log x}^{\rho''\log x}\frac{e^y}{y^2}\,dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{L}i(x^{\rho'})+\mathrm{L}i(x^{\rho''})-\frac{1}{\log x}\left(\frac{x^{\rho'}}{\rho'}+\frac{x^{\rho''}}{\rho''}\right)\right|\\&\leq\int_{-\infty}^{\beta\log x}\frac{e^\sigma}{(\gamma\log x)^2}\,d\sigma+\int_{-\infty}^{(1-\beta)\log x}\frac{e^\sigma}{(\gamma\log x)^2}\,d\sigma\\&\leq\frac{2}{(\gamma\log x)^2}\int_{-\infty}^{\log x}e^\sigma\,d\sigma=\frac{2}{\gamma^2}\,\frac{x}{\log^2 x};\end{aligned}$$

([1]) *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXVI, 2e semestre 1908, p. 169-302), p. 194-208.

([2]) *Zu Riemanns Abhandlung « Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen* puisque (2) converge, la série

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma^2}$$

converge aussi, de sorte que les deux séries (3) et (10) sont certainement convergentes ou divergentes en même temps. On doit à M. von Mangoldt d'avoir démontré leur convergence.

J'ai maintenant réussi à démontrer d'une façon beaucoup plus simple la convergence de (3) et la formule (6) de Riemann. L'objet de la première Partie (¹) du travail actuel est d'exposer la nouvelle démonstration avec tous les détails. On remarquera que c'est le chemin même de Riemann, basé sur l'étude de l'intégrale

$$\int \frac{x^s}{s} \log\zeta(s)\, ds,$$

que j'ai conduit au but, ce qu'on n'avait pas réalisé jusqu'à présent (²). D'ailleurs, ma marche me permettrait aussi de me baser sur l'intégrale de M. von Mangoldt

$$\int \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} ds$$

Grösse » (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXIV, 1895, p. 255-305). Vu la longueur des démonstrations de M. von Mangoldt, M. Laugel n'avait traduit en français que l'*Extrait d'un travail intitulé « Sur le Mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée »* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XIII, 1896, p. 61-78), paru auparavant en allemand sous le titre *Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel : Zu Riemann's Abhandlung « Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse »* (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1894, p. 883-896).

(¹) Je publie en même temps la démonstration qui forme l'objet de cette première Partie (sans l'introduction détaillée qui précède) en allemand sous le titre *Neuer Beweis der Riemannschen Primzahlformel* à l'endroit où Riemann avait publié son célèbre Mémoire il y a presque cinquante ans : *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1908, p. 737-745. J'y annonce la nouvelle formule que j'expose avec la démonstration dans la seconde Partie du présent travail.

(²) M. Laugel constata avec raison dans l'introduction (p. 4) de sa traduction du Mémoire de Riemann (occasionnée par un entretien avec Hermite, qui lui raconta le contenu des travaux de MM. Hadamard et von Mangoldt) : « M. von Mangoldt..., en établissant enfin complètement certains résultats simplement affirmés il y a plus de trente ans, a dû changer notablement la voie suivie par Riemann. »

et d'abréger considérablement presque tous les passages de sa démonstration par mes nouveaux artifices. Pour éviter des redites, je n'applique cette seconde méthode que dans la deuxième Partie de mon travail, où j'établis une formule pour le nombre des nombres premiers inférieurs à x dans une progression arithmétique $ky + l$ (k et l premiers entre eux), qui contient celle de Riemann comme cas particulier ($k=1$, $l=1$). Naturellement j'aurais pu déduire cette nouvelle formule aussi par la première de mes méthodes.

Pour le dire en deux mots, une des différences principales entre mes méthodes et celles appliquées par Riemann et MM. Hadamard, von Mangoldt et de la Vallée Poussin dans ces sortes de problèmes consiste en ce que ceux-ci décomposent [1], dès le début, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ (et les fonctions voisines) en fractions simples, tandis que j'opère, autant que c'est possible, avec la fonction $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ même, ce qui réduit des interversions de limites, sommations et intégrations triples ou doubles en doubles ou simples; toute la difficulté de la question consiste précisément à justifier de telles interversions. D'ailleurs, pour les fonctions numériques telles que la série de Dirichlet correspondante n'est pas dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe dans tout le plan [2], mes méthodes ont été les premières et sont jusqu'à aujourd'hui les seules qui aient mené au but.

---

(1) Ce qui était bien permis à partir de M. Hadamard.

(2) Par exemple pour les normes d'idéaux premiers d'un corps algébrique donné $\varkappa$, où la fonction $\frac{\zeta'_\varkappa(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$ correspondante est dérivée logarithmique d'une fonction $\zeta_\varkappa(s)$ qui peut-être n'existe pas même dans tout le plan et dont on ne sait rien sur l'existence des zéros.

PREMIÈRE PARTIE.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE RIEMANN.

I. — Lemmes [1] sur l'ordre de grandeur de $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$.

LEMME I. — *Pour* $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$, *on a* [2]

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < a_1 \log t.$$

Démonstration. — On a

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs} s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right)$$

$$= -C - \frac{1}{s} + s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(s+n)},$$

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| \leqq C + \frac{1}{|s|} + |s|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|s+n|}, \tag{11}$$

---

(1) J'expose ces lemmes pour épargner au lecteur la peine de consulter les développements de Stieltjes *Sur le développement de log* $\Gamma(a)$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. V, 1889, p. 425-444), qui donnent trop et qui, par conséquent, sont trop compliqués pour mon but actuel.

(2) J'entends, dans ce qui suit, par a_1, a_2, ... des constantes absolues; je n'ai aucun intérêt à écrire pour elles des valeurs numériques, dans le but des identités que je veux obtenir aujourd'hui (et qui ne renferment plus ces constantes) encore moins que pour les relations asymptotiques qui forment d'ordinaire l'objet de mes recherches dans la théorie analytique des nombres.

donc, pour $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$,

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| \leqq C + \frac{1}{t} + (2+t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{(\sigma+n)^2+t^2}}$$

$$< 1 + 1 + 2t\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{n\sqrt{t^2}} + 2t\sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} \quad (^1)$$

$$< 2 + 2t\frac{a_2\log t}{t} + 2t\frac{a_3}{t} < a_1\log t.$$

LEMME II. — *Pour $\sigma \geqq 2$, on a*

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < a_4 \log|s|.$$

Démonstration. — Pour $\sigma \geqq 2$, je conclus de (11)

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < C + 1 + |s|\sum_{n=1}^{|s|}\frac{1}{n|s|} + |s|\sum_{n=|s|+1}^{\infty}\frac{1}{n.n}$$

$$< 1 + 1 + |s|\frac{a_5\log|s|}{|s|} + |s|\frac{a_6}{|s|} < a_4\log|s|.$$

II. — Lemmes sur l'ordre de grandeur de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

LEMME III. — *On a*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < a_7\log|s|$$

dans les domaines suivants :

1° *Le quart de plan $\sigma \leqq -1$, $t \geqq 1$ et le quart de plan $\sigma \leqq -1$, $t \leqq -1$;*
2° *Les droites infinies $\sigma = -3$, $\sigma = -5$, ..., généralement* (²) *$\sigma = -z$ ($z \geqq 3$, entier et impair).*

(¹) J'entends par $\sum_{n=u}^{v}$ pour u et $v \geqq u$ entiers ou non que n parcourt les valeurs entières de $[u]$ inclusivement à $[v]$ inclusivement.

(²) Il est très essentiel que a_7 soit la même constante pour tous ces z.

Démonstration. — Pour des raisons de symétrie, il suffit de considérer les $t \geqq 0$; cela veut dire : 1° le domaine $\sigma \leqq -1$, $t \geqq 1$; 2° les demi-droites $\sigma = -z$, $t \geqq 0$.

De la relation fonctionnelle (1) de Riemann résulte

$$(12) \qquad -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log(2\pi) - \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{s\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Pour $\sigma \geqq 2$, on a

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < a_4 \log|s|$$

par le lemme II, et en outre

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|-\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{ms}}\right| \leqq \sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{2m}} < a_8 \log|s|.$$

1° Pour $t \geqq 1$, on a

$$\left|\operatorname{tang}\frac{s\pi}{2}\right| = \left|\frac{e^{\pi i(\sigma+ti)}-1}{e^{\pi i(\sigma+ti)}+1}\right| \leqq \frac{e^{-\pi t}+1}{e^{-\pi t}-1} \leqq \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} = a_9;$$

donc, pour $\sigma \geqq 2$, $t \geqq 1$, d'après (12),

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right| < a_{10}\log|s|;$$

en d'autres termes, si l'on remplace s par $1-s$, on a, pour $\sigma \leqq -1$, $t \geqq 1$,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < a_{10}\log|1-s| < a_{11}\log|s|.$$

2° Pour $\sigma = 4, 6, 8, \ldots, 1+z, \ldots$, avec $t \geqq 0$, on a

$$\left|\operatorname{tang}\frac{s\pi}{2}\right| = \left|\frac{e^{\pi i(\sigma+ti)}-1}{e^{\pi i(\sigma+ti)}+1}\right| = \left|\frac{e^{-\pi t}-1}{e^{-\pi t}+1}\right| = \frac{e^{-\pi t}-1}{e^{-\pi t}+1} < 1 = a_{12},$$

donc également

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right| < a_{13}\log|s|,$$

ce qui prouve, pour $\sigma = -3, -5, \ldots, -z, \ldots$, avec $t \geqq 0$,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < a_{13} \log|1-s| < a_{14} \log|s|.$$

Le lemme III est donc démontré.

III. — Lemmes sur la distribution des zéros de $\zeta(s)$.

Lemme IV. — *Soient* $T \geqq 2$, $N(T)$ *le nombre des zéros de* $\zeta(s)$ *dont l'ordonnée est comprise entre* 0 (*exclusivement*) *et* T (*inclusivement*). *Je dis que*

$$N(T+1) - N(T) < a_{15} \log T.$$

Démonstration. — (9) donne

$$\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

$$(13) \qquad \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - B + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Pour $s = 2 + Ti$, $T \geqq 2$, on a

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < a_{16}$$

et, d'après le lemme II,

$$\left|\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\right| < a_4 \log\left|2 + \frac{T}{2}i\right| < a_{17} \log T.$$

Donc

$$\left|\sum_\rho \left(\frac{1}{2+Ti-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)\right| < a_{18} \log T,$$

et, *a fortiori*, en prenant les parties réelles,

$$\sum_\rho \mathfrak{R}\left(\frac{1}{2+Ti-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) < a_{18} \log T,$$

d'où, en posant $\rho = \beta + \gamma i$ (où l'on a toujours $0 \leqq \beta \leqq 1$),

$$\sum_\rho \left\{ \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \right\} < a_{18} \log T.$$

Or,

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leqq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} < \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2}$$
$$\leqq \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2};$$

donc

$$(14) \qquad \sum_\rho \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} < 4 a_{18} \log T = a_{19} \log T.$$

Ceux des termes du premier membre de (14) dans lesquels $T < \gamma < T+1$ sont en nombre $N(T+1) - N(T)$; chacun d'eux est $\geqq \frac{1}{2}$; donc

$$\frac{N(T+1) - N(T)}{2} < a_{19} \log T,$$
$$N(T+1) - N(T) < 2 a_{19} \log T,$$

ce qui prouve le lemme IV.

Lemme V. — *Si, dans* $\sum\limits_\rho{}'$, ρ *ne parcourt que les racines complexes pour lesquelles* $|T - \gamma| > 1$, *on a, pour tout* $T \geqq 2$,

$$\sum_\rho{}' \frac{1}{(T-\gamma)^2} < a_{20} \log T.$$

Démonstration. — De (14), je conclus

$$a_{19} \log T > \sum_\rho \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_\rho{}' \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqq \sum_\rho{}' \frac{1}{2(T-\gamma)^2},$$

ce qui prouve l'énoncé.

Lemme VI. — *On a, pour* $s = \sigma + Ti$, $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $T \geqq 2$,

$$\left| \sum_\rho{}' \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| < a_{21} \log T,$$

où $\sum\limits_\rho{}'$ *a la même acception que dans le lemme V.*

Démonstration. — Puisque $s+3$ a sa partie réelle comprise entre 2 et 5, $\frac{s+3}{2}+1$ entre 2 et $3\frac{1}{2}$, (13) donne, en y remplaçant s par $s+3$, en vertu du lemme II,

$$\left|\sum_\rho \left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| < a_{22}+\frac{1}{2}a_4 \log\left|\frac{s+3}{2}+1\right| < a_{23}\log T.$$

Les termes de $\sum\limits_\rho$ qui n'entrent pas dans $\sum\limits_\rho{}'$ sont, par le lemme IV, en nombre

$$\leqq N(T+1)-N(T-1) < a_{24}\log T,$$

et chacun d'eux est, en valeur absolue, $\leqq 1+a_{25}$, $\frac{1}{a_{25}}$ désignant une borne inférieure pour les $|\rho|$. Donc

$$\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| < a_{26}\log T. \tag{15}$$

Maintenant, par le lemme V,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| \\
&\quad = \left|\sum_\rho{}'\frac{3}{(s+3-\rho)(s-\rho)}\right| \leqq \sum_\rho{}'\frac{3}{(T-\gamma)^2}, \\
&\quad < 3a_{20}\log T.
\end{aligned} \tag{16}$$

En combinant (15) et (16), on voit que

$$\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| < a_{26}\log T+3a_{20}\log T = a_{21}\log T,$$

ce qu'il fallait démontrer.

IV. — Introduction des nombres T_g.

En vertu du lemme IV, pour tout g entier et $\geqq 2$, le nombre des zéros à ordonnée entre g (exclusivement) et $g+1$ (exclusivement), augmenté de 1, est plus petit que $a_{27}\log g$; donc le nombre de ces zéros $\leqq [a_{27}\log g]-1$. Au moins un des $[a_{27}\log g]$ intervalles de $g+\dfrac{\nu}{[a_{27}\log g]}$ à $g+\dfrac{\nu+1}{[a_{27}\log g]}$ $\{\nu=0,1,\ldots,[a_{27}\log g]-1\}$ ne renferme donc à son intérieur aucun γ. En désignant par T_g le centre d'un tel intervalle (¹) libre, la distance de T_g au γ le plus rapproché est

$$\geqq \frac{1}{2[a_{27}\log g]} \geqq \frac{1}{2a_{27}\log g} > \frac{1}{2a_{27}\log T_g}.$$

Lemme VII. — *En prolongeant la fonction*

$$\log\zeta(s) = \sum_{p,m}\frac{1}{mp^{ms}},$$

uniforme pour $\sigma>1$, *suivant l'ordonnée* $T_g\,(g=2,3,\ldots)$, *je dis que* (²), *indépendamment de* g :

1° *Pour* $-1\leqq\sigma\leqq 2$, $s=\sigma+T_g i$,

(17) $$|\log\zeta(s)| < a_{28}\log^2 T_g.$$

2° *Pour* $\sigma\leqq -1$, $s=\sigma+T_g i$,

(18) $$|\log\zeta(s)| < a_{29}(-\sigma)\log^2|s|.$$

3° *En prolongeant la valeur trouvée de* $\log\zeta(-z+T_g i)$ *pour* z *impair et* $\geqq 3$ *suivant la verticale* $\sigma=-z$, *on a, indépendamment de* g *et de* z, *pour* $\sigma=-z$, $s=\sigma+ti$, $T_g\geqq t\geqq -T_g$,

(19) $$|\log\zeta(s)| < a_{30}\,z\log^2(z+T_g)+a_{31}T_g\log(z+T_g).$$

(¹) J'en choisis un pour chaque $g=2,3,\ldots$, arbitrairement, mais une fois pour toutes. D'ailleurs, ce qui ne serait pas même nécessaire, les constantes $a_{28},\ldots$, qui suivent, sont indépendantes du choix des T_g.

(²) Les inégalités (17) et (18) pourraient se réunir en une seule, ayant pour second membre $(3-\sigma)\log^2|s|$ multiplié par une constante.

Démonstration. — 1° Pour $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $s = \sigma + T_g i$, on a, d'après (13),

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) + \sum_\rho{}''\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

où $|T_g - \gamma| \geqq 1$ dans $\sum'$, $|T_g - \gamma| < 1$ dans $\sum''$. Au second membre, les deux premiers termes restent finis; le troisième est en valeur absolue $< a_{32} \log T_g$ par le lemme I, le quatrième en valeur absolue $< a_{24} \log T_g$ par le lemme VI; quant au cinquième, il ne renferme, par le lemme IV, pas plus que

$$N(T_g + 1) - N(T_g - 1) < a_{33} \log T_g$$

termes, dont chacun est, en valeur absolue, $< a_{34} \log T_g$ d'après la définition des nombres T_g. En somme, pour $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $s = \sigma + T_g i$,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < a_{35} \log^2 T_g, \tag{20}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\log\zeta(s)| &= \left|\log\zeta(2+T_g i) + \int_{2+T_g i}^{s} \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\,du\right| \leqq |\log\zeta(2)| + 3a_{35}\log^2 T_g \\ &< a_{28}\log^2 T_g.\end{aligned} \tag{17}$$

2° Pour $\sigma \leqq -1$, $s = \sigma + T_g i$, on a

$$|\log\zeta(s)| = \left|\log\zeta(-1+T_g i) + \int_{-1+T_g i}^{s} \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\,du\right|.$$

Par le lemme III, on a, sur le chemin d'intégration,

$$\left|\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\right| < a_7 \log|u|,$$

d'où, en appliquant (17),

$$\begin{aligned}|\log\zeta(s)| &< a_{28}\log^2 T_g + a_7(-1-\sigma)\log|s| \\ &< a_{29}(-\sigma)\log^2|s|.\end{aligned} \tag{18}$$

3° Pour $\sigma = -z$ $(z = 3, 5, \ldots)$, $T_g \geqq t \geqq -T_g$, $s = \sigma + ti$, on a, en appliquant (18) et encore le lemme III,

$$|\log\zeta(s)| = \left|\log\zeta(-z+\mathrm{T}_g i) + \int_{-z+\mathrm{T}_g i}^{s}\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}\,du\right|$$
$$< a_{29}\, z\log^2(z+\mathrm{T}_g) + 2\mathrm{T}_g a_7\log(z+\mathrm{T}_g),$$

ce qui prouve (19) ([1]).

V. — Représentation de la fonction $f(x)$ par une intégrale définie.

Lemme VIII. — *Pour $a > 0$, $\mathrm{T} > 0$, on a*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i}\frac{e^{ws}}{s}\,ds - 1\right| < \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{wa}}{\mathrm{T}w}, \qquad si \qquad w > 0,$$
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i}\frac{e^{ws}}{s}\,ds\right| < \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{wa}}{-\mathrm{T}w}, \qquad si \qquad w < 0,$$

et

$$(21) \qquad \lim_{\mathrm{T}=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i}\frac{e^{ws}}{s}\,ds \begin{cases} = 1, & si \quad w > 0, \\ = \dfrac{1}{2}, & si \quad w = 0, \\ = 0, & si \quad w < 0. \end{cases}$$

Démonstration. — 1° Soit $w > 0$. En supposant $b < 0$ et en appliquant le théorème de Cauchy au rectangle avec les sommets $a \pm \mathrm{T}i$, $b \pm \mathrm{T}i$, on obtient

$$\int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i}\frac{e^{ws}}{s}\,ds = 2\pi i + \int_{a-\mathrm{T}i}^{b-\mathrm{T}i} + \int_{b-\mathrm{T}i}^{b+\mathrm{T}i} + \int_{b+\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i}.$$

Dans la seconde intégrale du second membre,

$$\left|\frac{e^{ws}}{s}\right| = \left|\frac{e^{w(\sigma+ti)}}{\sigma+ti}\right| < \frac{e^{wb}}{-b};$$

elle tend donc, pour $b = -\infty$, vers zéro. De même, les deux autres

---

([1]) Au passage correspondant à ce lemme VII dans mon travail cité à la page 405, il faut corriger une petite erreur de calcul, par exemple de la manière suivante : *Lire* $(z+\mathrm{T}_g)$ *au lieu de* $|s|$ page 740, ligne 26; page 741, ligne 11 (deux fois) et ligne 12; page 743, ligne 25 (après $\log^2$). *Lire* $(z+\mathrm{T}_g)\log^2(z+\mathrm{T}_g)$ *au lieu de* $z+\mathrm{T}_g$ page 743, vers la fin de la ligne 25.

intégrales tendent, en vertu de

$$\left|\frac{e^{ws}}{s}\right| \leqq \frac{e^{w\sigma}}{T},$$

vers des limites. On a donc

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds \qquad = 2\pi i + \int_{a-Ti}^{-\infty-Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds + \int_{-\infty+Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds,$$

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds - 2\pi i = \int_{-\infty+Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds - \int_{-\infty-Ti}^{a-Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds,$$

$$\left|\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds - 2\pi i\right| \leqq \int_{-\infty}^{a} \frac{|e^{w(\sigma+Ti)}|}{|\sigma+Ti|}\,d\sigma + \int_{-\infty}^{a} \frac{|e^{w(\sigma-Ti)}|}{|\sigma-Ti|}\,d\sigma$$

$$\leqq \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{a} e^{w\sigma}\,d\sigma = \frac{2e^{wa}}{Tw},$$

ce qui prouve la première inégalité du lemme VIII.

2° Soit $w < 0$. En prenant $b > 0$, on a

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds = \int_{a-Ti}^{b-Ti} + \int_{b-Ti}^{b+Ti} + \int_{b+Ti}^{a+Ti}.$$

Dans la seconde intégrale du second membre,

$$\left|\frac{e^{ws}}{s}\right| = \left|\frac{e^{w(\sigma+ti)}}{\sigma+ti}\right| \leqq \frac{e^{wb}}{b};$$

elle tend donc, pour $b = \infty$, vers zéro. De même, les deux autres intégrales tendent, en vertu de

$$\left|\frac{e^{ws}}{s}\right| \leqq \frac{e^{w\sigma}}{T},$$

vers des limites, et l'on a

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds = \int_{a-Ti}^{\infty-Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds - \int_{a+Ti}^{\infty+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds,$$

$$\left|\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{ws}}{s}\,ds\right| \leqq \frac{2}{T}\int_{a}^{\infty} e^{w\sigma}\,d\sigma = \frac{2e^{wa}}{-Tw},$$

ce qui est la seconde inégalité du lemme VIII.

On voit donc l'exactitude de (21) pour $w > 0$ et $w < 0$; pour $w = 0$, on a simplement

$$\int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i} \frac{e^{ws}}{s}\,ds = i\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \frac{dt}{a+ti} = \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \frac{t+ai}{a^2+t^2}\,dt$$

$$= ai\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \frac{dt}{a^2+t^2} = i\int_{-\frac{\mathrm{T}}{a}}^{\frac{\mathrm{T}}{a}} \frac{du}{1+u^2},$$

d'où

$$\lim_{\mathrm{T}=\infty} \int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i} \frac{e^{ws}}{s}\,ds = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi i,$$

ce qui complète (21).

Lemme IX. — *Soient*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^a} \qquad (a > 0)$$

une série absolument convergente et $x > 0$. *Posons*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} c_n \qquad = \sum_{n<x} c_n \qquad \textit{pour } x \textit{ non entier},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} c_n - \frac{c_x}{2} = \sum_{n<x} c_n + \frac{c_x}{2} \qquad \textit{pour } x \textit{ entier}.$$

Alors

$$\lim_{\mathrm{T}=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i} \frac{x^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\,ds = f(x).$$

Démonstration. — On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} \frac{c_n}{n^s} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s};$$

or, d'après (21), n étant dans la première somme toujours $< x$, sauf au terme $n = x$ (si x est entier),

$$\lim_{\mathrm{T}=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i} \frac{x^s}{s} \sum_{n=1}^{x} \frac{c_n}{n^s}\,ds = \sum_{n=1}^{x} c_n \frac{1}{2\pi i} \lim_{\mathrm{T}=\infty} \int_{a-\mathrm{T}i}^{a+\mathrm{T}i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds = f(x).$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{n=[x]+1} \frac{c_n}{n^s}\, ds = 0.$$

Or, la série, étant uniformément convergente pour $\sigma = a$, peut être intégrée terme à terme de $a - Ti$ à $a + Ti$, ce qui donne, en appliquant le lemme VIII,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\, ds\right| &\leqq \sum_{n=[x]+1}^{\infty} |c_n| \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds\right| \\ &\leqq \sum_{n=[x]+1}^{\infty} |c_n| \frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^a}{T \log\left(\frac{n}{x}\right)} \\ &\leqq \frac{1}{\pi T} \frac{x^a}{\log\left\{\frac{[x]+1}{x}\right\}} \sum_{n=[x]+1} \frac{|c_n|}{n^a},\end{aligned}$$

ce qui tend, pour $T = \infty$, vers zéro.

Le lemme IX donne en particulier, en posant

$$a = 2,$$

$$c_n = \frac{1}{m} \qquad \text{pour} \qquad n = p^m,$$

$$c_n = 0 \qquad \text{pour les autres } n,$$

$$f(x) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \log\zeta(s)\, ds, \tag{22}$$

où $f(x)$ est la fonction considérée par Riemann, dont il a été question dans l'Introduction [1].

---

[1] Cette identité (22) avait été déduite par Riemann au moyen de la formule de Fourier

$$\frac{\pi}{2}\{g(x+0) + g(x-0)\} = \int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) \cos\mu(\beta - x)\, d\beta,$$

pour laquelle on n'avait cependant alors pas encore établi des conditions suffisantes. Le raisonnement de Riemann n'est devenu rigoureux que par M. Jordan, qui, dans son *Cours d'Analyse* (t. II de la 1re édition, 1883, p. 224-226, et t. II de la 2e édition, 1894, p. 233-235), a (sans d'ailleurs faire allusion au passage chez Riemann) établi la formule de

VI. — Application du théorème de Cauchy.

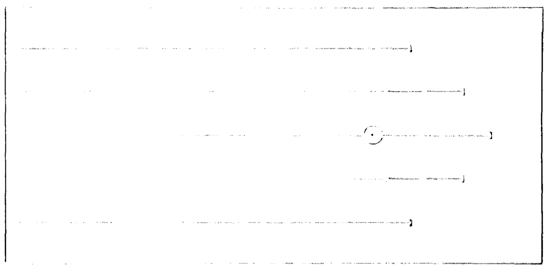
Soient $x > 1$, g un entier $\geqq 2$, z un impair $\geqq 3$. Sur le rectangle aux sommets $2 \pm T_g i$, $-z \pm T_g i$, la fonction $\frac{x^s}{s} \log\zeta(s)$ est régulière; elle a à l'intérieur le pôle $s = 0$ et comme infinis logarithmiques :

1° $s = 1$;

2° $s = -2, -4, \ldots, -2\left[\frac{z}{2}\right]$;

3° Les ρ, pour lesquels $-T_g < \gamma < T_g$.

La fonction $\frac{x^s}{s} \log\zeta(s)$, définie réelle pour $s > 1$, est donc uniforme dans le rectangle affecté d'une coupure horizontale allant de chaque point singulier au bord gauche du rectangle; dans la figure schématique ci-dessous, j'ai évité le point o par deux demi-cercles; quant à tous les



autres points singuliers, il est permis de les traverser pendant l'intégration. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy en prenant pour chemin d'intégration le contour ainsi décrit en sens positif, de sorte qu'on parcourt toujours le bord supérieur d'une coupure jus-

---

Fourier sous des hypothèses qui renferment le cas particulier de Riemann, comme le lecteur vérifiera aisément. *Voir* aussi l'intéressante étude historique et critique de M. Pringsheim, *Über das Fouriersche Integraltheorem* (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. XVI, 1907, p. 2-16). D'ailleurs, l'identité (22) a été établie directement par M. Phragmén; *voir* son Mémoire *Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemann'schen Primzahlformel* (*Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, t. XLVIII, Stockholm, 1891, p. 721-744), p. 741-744.

qu'au bout pour retourner ensuite au bord inférieur. En désignant par I, II, III, IV les quatre côtés du rectangle à partir de $2 - T_g i$ et en comptant les coupures parmi le chemin III, on a

$$o = \int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{III}} + \int_{\mathrm{IV}}.$$

$\int_{\mathrm{I}}$ ne dépend pas de z; je discuterai au § VII ce que les trois autres intégrales deviennent pour z tendant vers l'infini par valeurs entières impaires, et je ferai voir que chacune d'elles tend vers une limite.

Je parle d'abord des détours dans III, c'est-à-dire des parcours de coupures. Supposons d'abord qu'une certaine coupure ne contient qu'un ρ de multiplicité λ. Puisque $\log\zeta(s) - \lambda \log(s-\rho)$ est régulier en ρ et que

$$\int \frac{x^s}{s} \{\log\zeta(s) - \lambda \log(s-\rho)\} \, ds$$

s'annule donc en allant de $-z + \gamma i$ à ρ et retournant, tandis que $\log(s-\rho)$ diffère aux deux bords de $2\pi i$, on a, pour la coupure, la contribution

$$\int \frac{x^s}{s} \log\zeta(s) \, ds = 2\pi i \lambda \int_{-z+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s} \, ds.$$

Si, généralement, il y a, avec l'ordonnée γ, de gauche à droite, les ν zéros $\rho_n (n = 1, \ldots, \nu)$ de multiplicité $\lambda_n (n = 1, \ldots, \nu)$, on trouve que, aux deux bords du segment de ρ_{n-1} à ρ_n (où ρ_0 signifie $-z + \gamma i$), $\log\zeta(s)$ diffère de $2\pi i(\lambda_n + \ldots + \lambda_\nu)$, c'est-à-dire surpasse au bord supérieur de cette quantité la valeur au bord inférieur; la contribution est donc

$$\int \frac{x^s}{s} \log\zeta(s) \, ds = \sum_{n=1}^{\nu} 2\pi i(\lambda_n + \ldots + \lambda_\nu) \int_{\rho_{n-1}}^{\rho_n} \frac{x^s}{s} \, ds = 2\pi i \sum_{n=1}^{\nu} \lambda_n \int_{-z+\gamma i}^{\rho_n} \frac{x^s}{s} \, ds,$$

brièvement

$$2\pi i \sum_{\rho} \int_{-z+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s} \, ds,$$

où ρ parcourt toutes les racines d'ordonnée γ, chacune avec sa multiplicité. En somme, les coupures dans les demi-plans inférieur ($\gamma < 0$) et supérieur ($\gamma > 0$) donnent

$$2\pi i \sum_{-T_g<\gamma<T_g} \int_{-z+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Quant à la coupure de $-z$ à 1, qui est placée sur l'axe réel en évitant le point 0 par deux demi-cercles de rayon h suffisamment petit, on a, en posant

$$\nu = \left[\frac{z}{2}\right], \qquad \rho_0 = -z, \qquad \rho_1 = -2\left[\frac{z}{2}\right], \qquad \rho_2 = -2\left(\left[\frac{z}{2}\right] - 1\right), \qquad \ldots,$$
$$\rho_{\nu-1} = -4, \qquad \rho_\nu = -2,$$

comme contribution relative au segment de ρ_{n-1} à ρ_n ($n = 1, \ldots, \nu$),

$$2\pi i(\nu - n) \int_{\rho_{n-1}}^{\rho_n} \frac{x^s}{s}\, ds,$$

puisque $\log\zeta(s)$ est, en bas, égal à la valeur en haut diminuée de $2\pi i\{(\nu - n + 1) - 1\}$. De -2 à 1 et retour, on a

$$\int_{-2}^{-2} \frac{x^s}{s} \log\zeta(s)\, ds = \int \frac{x^s}{s} \log\frac{1}{s-1}\, ds + \int \frac{x^s}{s} \log\{(s-1)\zeta(s)\}\, ds,$$

où $\log(s-1)$ désigne la branche uniforme dans le plan découpé de 1 à $-\infty$ et réelle pour $s > 1$; ici, dans la dernière intégrale, la quantité à intégrer est régulière en $s = 1$, de sorte que l'intégrale égale le produit de $-2\pi i$ par le résidu $\log\{-\zeta(0)\} = -\log 2$ correspondant au pôle $s = 0$; la quantité à intégrer dans la première intégrale a, dans le voisinage de $s = 0$, les développements

$$-\frac{\pi i}{s} + A_0 + A_1 s + \ldots \quad \text{(demi-plan supérieur)},$$

$$\frac{\pi i}{s} + B_0 + B_1 s + \ldots \quad \text{(demi-plan inférieur)}.$$

Donc, puisque

$$\int_{-h}^{h} \frac{ds}{s} = -\pi i \quad \text{sur le chemin } s = he^{\varphi i},\ \pi \geq \varphi \geq 0,$$

et

$$\int_h^{-h} \frac{ds}{s} = -\pi i \quad \text{sur le chemin } s = he^{\varphi i}, \quad 0 \geqq \varphi \geqq -\pi,$$

$$\int_2^{-2} \frac{x^s}{s} \log\zeta(s)\, ds = 2\pi i \log 2 - 2\pi i \lim_{h=+0} \left(\int_{-2}^{-h} \frac{x^s}{s} ds + \int_h^1 \frac{x^s}{s} ds \right);$$

la coupure de $-z$ à 1 donne donc en somme

$$2\pi i \sum_{n=1}^{\nu} (1 + 1 + \ldots + 1 - 1) \int_{\rho_{n-1}}^{\rho_n} \frac{x^s}{s} ds$$
$$+ 2\pi i \log 2 - 2\pi i \lim_{h=+0} \left(\int_{-2}^{-h} \frac{x^s}{s} ds + \int_h^1 \frac{x^s}{s} ds \right),$$

où la première parenthèse renferme $\nu - n + 1$ termes égaux à $+1$; elle fournit donc

$$2\pi i \sum_{m=1}^{\frac{z}{2}} \int_{-z}^{-2m} \frac{x^s}{s} ds + 2\pi i \log 2 - 2\pi i \lim_{h=+0} \left(\int_{-z}^{-h} \frac{x^s}{s} ds + \int_h^1 \frac{x^s}{s} ds \right).$$

L'application du théorème de Cauchy donne donc, si III' ne désigne plus que les portions verticales du chemin de $-z + T_g i$ à $-z - T_g i$,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = & \int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{III'}} + \int_{\mathrm{IV}} + 2\pi i \sum_{-T_g < \gamma < T_g} \int_{-z+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s} ds \\ & + 2\pi i \sum_{m=1}^{\frac{z}{2}} \int_{-z}^{-2m} \frac{x^s}{s} ds + 2\pi i \log 2 - 2\pi i \lim_{h=+0} \left(\int_{-z}^{-h} \frac{x^s}{s} ds + \int_h^1 \frac{x^s}{s} ds \right). \end{aligned} \right.$$

VII. — Passage à la limite $z = \infty$.

Quant à la partie III' du chemin III relative aux portions verticales, $\log\zeta(s)$ y signifie la valeur figurant dans la troisième partie du lemme VII avec une erreur inférieure, en valeur absolue, partout sur cette partie verticale, à

$$2\pi \left(2N(T_g) + \frac{5}{2} \right);$$

on y a donc

$$\left|\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\right| < \frac{x^{-z}}{|s|}\{a_{30}z\log^2(z+T_g) + a_{31}T_g\log(z+T_g) + 4\pi N(T_g) + \pi z\}$$
$$< x^{-z}\{a_{36}z\log^2(z+T_g) + a_{37}T_g\log(z+T_g) + a_{38}N(T_g)\},$$

ce qui tend vers zéro pour $z = \infty$ et est indépendant de l'ordonnée t. Donc III' fournit une intégrale qui tend vers zéro pour $z = \infty$.

Chacune des intégrales (en nombre fini)

$$\int_{-z+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s}\,ds$$

tend, pour $z = \infty$, vers

$$\int_{-\infty+\gamma i}^{\rho} \frac{x^s}{s}\,ds = \int_{-\infty+\gamma\log x\, i}^{\rho\log x} \frac{e^y}{y}\,dy = \mathrm{L}i(x^\rho) \mp \pi i,$$

suivant que γ est positif ou négatif. La première somme dans (23) tend donc vers

$$\sum_{-T_g<\gamma<T_g} \mathrm{L}i(x^\rho) = \sum_{0<\gamma<T_g} \{\mathrm{L}i(x^{\rho'}) + \mathrm{L}i(x^{\rho''})\}.$$

Pareillement, le dernier terme dans (23) tend vers

$$-2\pi i \lim_{h=+0}\left(\int_{-\infty}^{-h} \frac{x^s}{s}\,ds + \int_{h}^{1} \frac{x^s}{s}\,ds\right) = -2\pi i \lim_{h'=+0}\left(\int_{-\infty}^{-h'} \frac{e^y}{y}\,dy + \int_{h'}^{\log x} \frac{e^y}{y}\,dy\right)$$
$$= -2\pi i\,\mathrm{L}i(x).$$

Enfin, pour la somme relative aux zéros réels dans (23), si on l'écrit

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{z}{2}\right]} \int_{-z}^{-2m} \frac{x^s}{s}\,ds = \int_{-4}^{-2} \frac{x^s}{s}\,ds + 2\int_{-6}^{-4} \frac{x^s}{s}\,ds + \ldots$$
$$+ \left(\left[\frac{z}{2}\right] - 1\right)\int_{-2\left[\frac{z}{2}\right]}^{-2\left(\left[\frac{z}{2}\right]-1\right)} \frac{x^s}{s}\,ds + \left[\frac{z}{2}\right]\int_{-z}^{-2\left[\frac{z}{2}\right]} \frac{x^s}{s}\,ds,$$

puisque tous les éléments sont négatifs et que la série résultante est convergente, on voit que

$$\lim_{z=\infty}\sum_{m=1}^{\left[\frac{z}{2}\right]}\int_{-z}^{-2m}\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{m=1}^{\infty}m\int_{-2(m+1)}^{-2m}\frac{x^s}{s}\,ds$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{-2m}\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\infty}^{1}\frac{x^{-2mu}}{u}\,du$$

$$=-\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u(x^{2u}-1)}=-\int_{x}^{\infty}\frac{dy}{y\log y(y^2-1)}.$$

L'intégrale étendue à III, y compris les coupures, tend donc, pour $z=\infty$, vers

$$-2\pi i\left\{\mathrm{L}i(x)-\sum_{0<\gamma<\mathrm{T}_g}\left[\mathrm{L}i(x^{\rho'})+\mathrm{L}i(x^{\rho''})\right]+\int_{x}^{\infty}\frac{dy}{y\log y(y^2-1)}-\log 2\right\}.$$

Je dis que les intégrales sur II et IV tendent pour $z=\infty$ vers des limites. Il suffit, pour cela, de prouver que

$$\int_{-\infty+\mathrm{T}_g i}^{2+\mathrm{T}_g i}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds$$

converge. Or, d'après la seconde partie du lemme VII, pour $\sigma < -1$, $s=\sigma+\mathrm{T}_g i$,

$$\left|\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\right| < \frac{x^\sigma}{|s|}a_{29}(-\sigma)\log^2|s| < a_{39}x^\sigma(-\sigma),$$

ce qui assure la convergence.

Le résultat de ce paragraphe est donc

$$\int_{2-\mathrm{T}_g i}^{2+\mathrm{T}_g i}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds=\int_{2-\mathrm{T}_g i}^{-\infty-\mathrm{T}_g i}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds+\int_{-\infty+\mathrm{T}_g i}^{2+\mathrm{T}_g i}\frac{x^s}{s}\log\zeta(s)\,ds$$
$$+2\pi i\left\{\mathrm{L}i(x)-\sum_{0<\gamma<\mathrm{T}_g}\left[\mathrm{L}i(x^{\rho'})+\mathrm{L}i(x^{\rho''})\right]+\int_{x}^{\infty}\frac{dy}{y\log y(y^2-1)}-\right.$$

VIII. — Passage à la limite $g=\infty$ et formule finale.

Je fais maintenant tendre vers l'infini le nombre entier g. Le premier membre de (24) tend vers $2\pi i f(x)$ comme l'égalité (22) le fait voir.

Les deux premières intégrales du second membre tendent vers zéro, car, d'après les deux premières parties du lemme VII, on a, pour $g > e^2$,

$$\left|\int_{-\infty+T_g i}^{2+T_g i} \frac{x^s}{s} \log\zeta(s)\,ds\right| \leqq \int_{-\infty}^{-1} \frac{x^\sigma}{|s|}\, a_{29}(-\sigma)\log^2|s|\,d\sigma + \int_{-1}^{2} \frac{x^\sigma}{|s|}\, a_{28}\log^2 T_g\,d\sigma$$
$$< a_{29}\frac{\log^2 T_g}{T_g}\int_{-\infty}^{-1} x^\sigma(-\sigma)\,d\sigma + a_{28}\frac{\log^2 T_g}{T_g}\int_{-1}^{2} x^\sigma\,d\sigma,$$

ce qui tend vers zéro.

Donc

$$\lim_{g=\infty}\sum_{0<\gamma<T_g} \{Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''})\} \tag{25}$$

existe, et l'on a

$$f(x) = Li(x) - \lim_{g=\infty}\sum_{0<\gamma<T_g}\{Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''})\} + \int_x^\infty \frac{dy}{y\log y(y^2-1)} - \log 2.$$

La preuve de la formule (6) de Riemann est donc achevée si l'on prouve encore que

$$\sum_{\rho',\rho''}\{Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''})\}$$

converge. Comme l'existence de la limite (25) a été établie, il suffit évidemment maintenant de prouver que

$$\lim_{g=\infty}\sum_{g<\gamma\leqq g+1} |Li(x^{\rho'}) + Li(x^{\rho''})| = 0. \tag{26}$$

Or, le nombre des termes de la somme dans (26) est $< a_{45}\log g$; chaque terme est, en valeur absolue,

$$< 2\int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^\sigma}{g\log x}\,d\sigma = \frac{2x}{g\log x},$$

de sorte que (26) est prouvé et la formule de Riemann établie.

SECONDE PARTIE.

DÉMONSTRATION D'UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE RIEMANN POUR LE CAS DES NOMBRES PREMIERS D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

IX. — Rappel de propositions connues.

Dans cette Partie, je démontrerai pour la première fois une formule (¹) pour les nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique $ky + l$, où k et l sont premiers entre eux. Pour cela, il suffit de traiter la somme $\sum\limits_{p \leq x} \chi(p)$, où $\chi(n)$ est un caractère quelconque *modulo* k. Car on a

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(k)} \frac{1}{\chi_\nu(l)} \sum_{p \leq x} \chi_\nu(p) = \sum_{p \leq x} \sum_{\nu=1}^{\varphi(k)} \frac{1}{\chi_\nu(l)} \chi_\nu(p) = \varphi(k) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l}} 1.$$

(¹) On aurait pu écrire heuristiquement depuis longtemps cette formule. Notamment M. Piltz l'a entrevue et en a esquissé une preuve heuristique en 1884 [*Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze* (*Dissertation zur Erlangung der venia docendi bei der philosophischen Facultät der Universität Jena*, 1884)], pour le cas d'un module premier. La formule générale se trouve imprimée au § 99 de la monographie de M. Torelli : *Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato* (*Atti della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, 2ᵉ série, t. XI, nº 1, 1901). Naturellement sa phrase (à la page 145) « tutte le deduzioni della seconda parte della memoria di von Mangoldt, che si riferiscono a quanto ho detto nel (Cap. IX, § 78 a 81), si possono con lievi modificazioni imitare, e si ricava » (sans qu'il indique aucun détail) ne peut pas être considérée comme une démonstration de la formule (37) (d'où tout découle), que je démontre soigneusement (en la faisant précéder par des lemmes indispensables qui correspondent à la première partie du travail de M. von Mangoldt), tandis que M. Torelli l'imprime immédiatement après la phrase citée. D'ailleurs les formules de M. Torelli supposent par erreur que la fonction $L(s)$ n'ait pas de racines réelles comprises entre o et 1. Les formules s'obtiennent aussi assez vite en commençant par différentier formellement (ce dont on n'a naturellement pas le droit) une identité de M. de la Vallée Poussin [*Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. XX, 1896, 2ᵉ Partie, p. 183-256 et 281-397), p. 357].

La fonction $L(s)$, définie pour $\sigma > 1$ par

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}},$$

jouit, comme on sait, des propriétés suivantes :

Pour le caractère principal, on a [1]

$$L(s) = \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s).$$

Pour tout autre caractère, $L(s)$ est une fonction entière de genre 1 telle que, a désignant [2] 0 ou 1, b une constante réelle, $p_1, \ldots, p_m$ certains nombres premiers (m peut être 0, de sorte que ces nombres ne sont alors pas à introduire), $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ certaines racines de l'unité, on a

$$(27) \qquad L(s) = e^{b(s+a)} \prod_{\nu=1}^{m} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \xi(s),$$

où $\xi(s)$ est une fonction entière de genre 1, dont toutes les racines appartiennent à la bande [3] $0 \leq \sigma \leq 1$ et qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(28) \qquad \xi(s) = \varepsilon \bar{\xi}(1-s),$$

dans laquelle ε est une constante de valeur absolue 1 et $\bar{\xi}(s)$ la fonction entière correspondant au $\bar{L}(s)$ formé avec le caractère conjugué $\bar{\chi}(n)$. On sait d'ailleurs qu'à $L(s)$ et $\bar{L}(s)$ correspondent les mêmes nombres a, b, m, $p_1, \ldots, p_m$ et les ε_ν, $\bar{\varepsilon}_\nu$ conjugués.

On voit que, pour le caractère principal, $s(s-1)L(s)$ est de la même

---

(1) $p|k$ signifie que p parcourt les nombres premiers différents qui divisent k.

(2) Suivant que $\chi(-1) = +1$ ou $\chi(-1) = -1$.

(3) On sait aussi qu'elles appartiennent à la bande $0 < \sigma < 1$, mais je n'aurai aucun usage à en faire ; j'emploie seulement plus tard le fait connu que $L(1) \neq 0$, de sorte que ni 1 ni [en vertu de (28)] 0 ne sont racines de $\xi(s)$.

forme que le second membre de (27). On n'aurait qu'à poser

$$a = 0, \qquad b = \frac{1}{2}\log\pi, \qquad \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) = \prod_{p \mid k}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \qquad \varepsilon = 1.$$

Pour renfermer tous les cas dans la même formule ([1]), j'écris, pour tous les caractères, en entendant 1 par c pour le caractère principal, 0 pour les autres,

$$\text{(29)} \qquad \mathrm{L}(s) = \frac{1}{s^c(s-1)^c}\, e^{b(s+a)} \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\, \xi(s);$$

de (29) résulte

$$\text{(30)} \qquad \frac{\mathrm{L}'(s)}{\mathrm{L}(s)} = -\frac{c}{s} - \frac{c}{s-1} + b + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^s - \varepsilon_\nu} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}.$$

Tout ce que je viens de citer dans ce paragraphe est connu depuis longtemps. Il convient d'ajouter aux notices historiques qu'on donne d'ordinaire que la relation fonctionnelle (28) a été découverte en 1862 par M. Kinkelin ([2]). Il traite avec tous les détails les cas de k puissance d'un nombre premier impair et produit de premiers impairs et différents, en faisant remarquer avec raison que le cas général est tout analogue.

Le lecteur trouvera des démonstrations détaillées et très élégantes de ce qui précède chez M. de la Vallée Poussin ([3]). Pour faciliter au lecteur d'acquérir ces connaissances, j'observe que ces démonstrations peuvent être simplifiées aux deux égards suivants :

1° Après avoir établi la relation fonctionnelle (28), on peut en déduire de la façon très brève suivante le fait que $\xi(s)$ est de genre $\leqq 1$.

([1]) Naturellement, je pourrais me dispenser de traiter le cas du caractère principal en renvoyant à la première Partie de ce travail; mais je veux exposer ici en même temps une autre démonstration des résultats de cette première Partie.

([2]) *Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen, mit Anwendung auf die Zahlen-Theorie* (*Programm der Gewerbeschule Basel*, année 1861-1862, p. 1-32), p. 23-32.

([3]) *Voir* les pages 281-342 de son Mémoire cité précédemment.

D'après un théorème de M. Hadamard et ayant égard à la symétrie (28) par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, il suffit de montrer pour tout $\xi(s)$ que, pour $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, on a

$$|\xi(s)| < a_{40}\, e^{|s|^\alpha},$$

où $\alpha < 2$. Or,

$$\xi(s) = \mathrm{L}(s) s^c (s-1)^c e^{-b(s+a)} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right),$$

et, au second membre, pour tout caractère différent du caractère principal [1], $\mathrm{L}(s)$ est une série de Dirichlet convergente pour $\sigma > 0$, donc, pour $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, inférieure en valeur absolue à $a_{41}|s|$; de même

$$\left| e^{-b(s+a)} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}} \right| \leqq e^{|b|(|s|+a)} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{p_\nu}}} < a_{42}\, e^{|s| \log |s|}$$

et

$$\left| \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \right| \leqq \Gamma\left(\frac{\sigma+a}{2}\right) < a_{43}\, e^{\sigma \log \sigma} \leqq a_{43}\, e^{|s| \log |s|},$$

d'où, pour tout $\alpha > 1$,

$$|\xi(s)| < a_{44}\, e^{|s|^\alpha}.$$

Cela remplace, pour le but actuel, les nos [2] 13-18 et 34-35 du travail de M. de la Vallée Poussin.

2° Le travail de M. de la Vallée Poussin contient un lemme [3] de la théorie élémentaire des nombres, dont la démonstration, élémentaire d'ailleurs, n'y est pas assez simple. Voici le lemme : *Pour tout carac-*

---

(1) Pour le caractère principal, il n'y a rien de nouveau à prouver au lecteur qui connaît la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann appliquée dans la première Partie.

(2) Pages 291-295 et 311-314.

(3) La partie essentielle de ce lemme avait été énoncée par Lipschitz [*Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CV, 1889, p. 127-156), p. 143], qui n'avait cependant pas publié sa démonstration. *Voir* d'ailleurs page 29 du Mémoire cité de M. Kinkelin; la démonstration n'y est pas non plus assez simple.

tère propre modulo k, *on a*, m *n'étant pas premier avec* k,

$$\sum_{n=1}^{k} \chi(n) e^{\frac{2\pi mni}{k}} = 0. \tag{31}$$

Au lieu de la démonstration de M. de la Vallée Poussin aux n^{os} [1] 41, 44, 47 et 49, M. Hadamard [2] avait déjà proposé de ramener le cas général au cas de k puissance d'un nombre premier au moyen d'une identité qui décompose le premier membre de (31) en produit de sommes analogues relatives aux puissances des nombres premiers qui composent k; mais, pour $k = p^\lambda$, il a dû encore renvoyer à M. Lipschitz. Mon ami et collègue J. Schur m'a fait remarquer qu'on peut établir très simplement, et même directement pour tous les k, l'identité (31) de la façon suivante.

Posons

$$e^{\frac{2\pi im}{k}} = \rho.$$

Puisque m a un diviseur commun avec k, k possède un diviseur $l < k$ tel que

$$\rho^l = 1.$$

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} \chi(n) x^n;$$

il s'agit de prouver que

$$f(\rho) = 0.$$

Si r est premier avec k, on a

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{k} \chi(n) \rho^n = \sum_{n=1}^{k} \chi(nr) \rho^{nr} = \chi(r) f(\rho^r).$$

Si, en outre, $r \equiv 1 \pmod{l}$, on a

$$\rho^r = \rho:$$

(1) Pages 320-321, 323-325, 327-328, 330-332.

(2) *Sur les séries de Dirichlet* (*Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, année 1896-1897, p. 41-45).

donc

$$f(\rho)(\chi(r)-1)=0.$$

Si $f(\rho)$ n'était pas zéro, on aurait donc

$$\chi(r)=1$$

pour tous les $r\equiv 1 \,(\text{mod.}\, l)$ et qui sont premiers avec k. Je dis que χ serait un caractère *modulo* l, ce qui est en contradiction avec la supposition que χ est un caractère propre *modulo* k. Pour cela, il faut montrer que, si $n\equiv n' \,(\text{mod.}\, l)$ et n, n' sont premiers avec k, on a

$$\chi(n)=\chi(n').$$

En effet, si n_1 représente la classe inverse à $n \,(\text{mod.}\, k)$, on a

$$\begin{aligned}
n\,n_1 &\equiv r\equiv 1 \qquad (\text{mod.}\ l),\\
n'\,n_1 &\equiv r'\equiv 1 \qquad (\text{mod.}\ l),\\
\chi(n)\,\chi(n_1) &= \chi(r)=1,\\
\chi(n')\,\chi(n_1) &= \chi(r')=1,\\
\chi(n) &= \chi(n').
\end{aligned}$$

X. — Lemme sur l'ordre de grandeur de $\dfrac{L'(s)}{L(s)}$.

Lemme III'. — *On a*

$$\left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < a_{45}\log|s|$$

dans les domaines suivants :

1° *Les quarts de plan* $\sigma\leqq -1$, $t\geqq 1$ et $\sigma\leqq -1$, $t\leqq -1$;

2° *Les droites infinies* $\sigma=-3-a$, $\sigma=-5-a$, ..., $\sigma=-z-a$, ..., *où* z *est impair et* $\geqq 3$.

Démonstration. — De (28) résulte

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=-\frac{\overline{\xi}'(1-s)}{\overline{\xi}(1-s)};$$

donc, en vertu de (30),

$$\frac{L'(1-s)}{L(1-s)} = -\frac{c}{1-s} + \frac{c}{s} + b + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^{1-s} - \varepsilon_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1+a-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)} - \frac{\overline{\xi}'(s)}{\overline{\xi}(s)}$$

$$= 2b + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^{1-s} - \varepsilon_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1+a-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\overline{\varepsilon_\nu} \log p_\nu}{p_\nu^{s} - \overline{\varepsilon_\nu}} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)} - \frac{\overline{L}'(s)}{\overline{L}(s)}.$$

Or, pour $a = 0$,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}};$$

pour $a = 1$,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}};$$

donc, dans les deux cas,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{(s-a)\pi}{2}\,\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1+a-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a-s}{2}\right)} = -\log 2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{(s-a)\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)},$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{L'(1-s)}{L(1-s)} &= 2b + \log 2 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varepsilon_\nu \log p_\nu}{p_\nu^{1-s} - \varepsilon_\nu} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\overline{\varepsilon_\nu} \log p_\nu}{p_\nu^{s} - \overline{\varepsilon_\nu}} + \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{(s-a)\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\overline{L}'(s)}{\overline{L}(s)}. \end{aligned}\right.$$

Si $a = 0$, $\operatorname{tang}\frac{s\pi}{2}$ a déjà été traité dans la démonstration du lemme III; si $a = 1$, on a, en utilisant les résultats de $a = 0$: 1° pour $|t| > 1$,

$$\left|\operatorname{tang}\frac{(s-1)\pi}{2}\right| < a_9;$$

2° pour $\sigma = 1 + z + a = z + 2$,

$$\left|\operatorname{tang}\frac{(s-1)\pi}{2}\right| < a_{12}.$$

En se rappelant encore le lemme II et l'égalité

$$\frac{\overline{L}'(s)}{\overline{L}(s)} = -\sum_{p,m}\frac{\overline{\chi}(p^m)\log p}{p^{ms}} \qquad (\sigma > 1),$$

on déduit de (32) que, pour $\sigma \leq 2$, $|t| \geq 1$ et pour $\sigma = 1 + z + a$, $t = 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{L'(1-s)}{L(1-s)}\right| &< 2|b| + \log 2 + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\log p_\nu}{1-\frac{1}{p_\nu}} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\log p_\nu}{p_\nu^2-1} + a_{46} + a_{47}\log|s| + a_{48}\\ &< a_{49}\log|s|,\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme III'; car, pour les s appartenant aux domaines de son énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| &< a_{49}\log|1-s|\\ &< a_{45}\log|s|.\end{aligned}$$

XI. Lemmes sur la distribution des zéros de $L(s)$.

Lemme IV'. — *Soient* $T > 2$, $N(T)$ *le nombre des zéros de* $L(s)$ *dont l'ordonnée est comprise entre* 0 (*exclusivement*) *et* T (*inclusivement*). *Je dis que*

$$N(T+1) - N(T) < a_{50}\log T.$$

Démonstration. — En désignant indifféremment par $\rho = \beta + \gamma i$ les zéros de la fonction entière de genre 1

$$\prod_{\nu=1}^{m}\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right)\xi(s),$$

tous compris dans la bande $0 \leq \beta < 1$, on a

$$L(s) = \frac{1}{s^c(s-1)^c} A e^{Bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},$$

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\frac{c}{s} - \frac{c}{s-1} + B - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = \frac{L'(s)}{L(s)} - B + \frac{c}{s} + \frac{c}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}.$$

Pour $s = 2 + Ti$, $T \geq 2$, j'en conclus, absolument comme dans la démonstration [1] du lemme IV,

$$(33) \qquad \sum_\rho \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} < a_{51}\log T.$$

(33) fournit le lemme IV′ et aussi les lemmes V′ et VI′, qui sont si identiques aux lemmes V et VI qu'il n'est même pas nécessaire de récrire leurs énoncés.

J'introduis maintenant les nombres T_g comme au commencement du § IV. Puisqu'il n'y a plus de symétrie par rapport à l'axe réel, il faut prescrire ici expressément aux T_g la condition que T_g et $-T_g$ ont, de chaque γ, une distance supérieure à $\frac{1}{a_{52}\log T_g}$. C'est réalisable d'après le lemme IV′, appliqué à $L(s)$ et à $\overline{L}(s)$.

---

[1] Le fait que dans (13) figure $\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$ au lieu de $\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ provient de ce que le terme $\frac{1}{s}$ n'y est pas et que $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

Je n'établis pas l'analogue du lemme VII, puisque, dans cette seconde Partie, j'applique l'intégrale généralisant

$$\int \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds,$$

au lieu de celle qui correspondrait à

$$\int \frac{x^s}{s} \log \zeta(s)\, ds\,;$$

j'observe seulement que, en raisonnant comme au commencement de la première partie de la démonstration du lemme VII, je trouve pareillement à (20), pour $-1 \leq \sigma \leq 2$, $t = \pm T_g$,

$$\left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| < a_{53} \log^2 T_g. \tag{34}$$

XII. — Application du théorème de Cauchy.

Soit $x > 1$, $r > 0$; en appliquant le lemme IX à la série

$$\frac{L'(s+r)}{L(s+r)} = -\sum_{p,\,m} \frac{\chi(p^m) \log p}{p^{m(s+r)}}$$

et en désignant par $A(x, r)$ la somme

$$\sum_{p^m \leq x} \frac{\chi(p^m) \log p}{p^{mr}}$$

pour $x \neq p_0^{m_0}$, cette somme diminuée de la moitié du dernier terme pour $x = p_0^{m_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} A(x, r) &= -\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{L'(s+r)}{L(s+r)}\, ds \\ &= -\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{2+r-Ti}^{2+r+Ti} \frac{x^{s-r}}{s-r} \frac{L'(s)}{L(s)}\, ds. \end{aligned}$$

J'applique maintenant le théorème de Cauchy au rectangle avec les sommets $2 + r \pm \mathrm{T}_g i$, $-z - a \pm \mathrm{T}_g i$ (affecté d'aucune coupure), où z est impair et $\geqq 3$, g entier et $\geqq 2$. La fonction à intégrer

$$\frac{x^{s-r}}{s-r} \frac{\mathrm{L}'(s)}{\mathrm{L}(s)}$$

est régulière sur le contour et méromorphe à l'intérieur. Elle y possède comme pôles : le nombre r, les zéros de $\mathrm{L}(s)$ à ordonnée absolument inférieure à T_g et à abscisse supérieure à $-z-a$, enfin, pour le caractère principal, le nombre 1. Ces pôles sont tous simples sauf les cas que r coïncide avec un des pôles de $\frac{\mathrm{L}'(s)}{\mathrm{L}(s)}$; alors r est pôle double. Le résidu du pôle r est donc :

1° Si ni r ne coïncide avec un zéro de $\mathrm{L}(s)$, ni qu'on n'ait en même temps $r = 1$ et le caractère principal,

$$\frac{\mathrm{L}'(r)}{\mathrm{L}(r)};$$

2° Si $r = 1$ et que $\mathrm{L}(s)$ corresponde au caractère principal,

$$-\log x + \mathrm{C}_0,$$

où C_0 désigne le terme constant dans

$$\frac{\mathrm{L}'(s)}{\mathrm{L}(s)} = -\frac{1}{s-1} + \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1(s-1) + \ldots;$$

3° Si r coïncide avec λ zéros r (un zéro réel et $\geqq 0$ de multiplicité λ, qui d'ailleurs serait < 1, comme l'on sait),

$$\lambda \log x + \mathrm{C}'_0,$$

où C'_0 est le terme constant dans

$$\frac{\mathrm{L}'(s)}{\mathrm{L}(s)} = \frac{\lambda}{s-\mathrm{r}} + \mathrm{C}'_0 + \mathrm{C}'_1(s-\mathrm{r}) + \ldots.$$

Le résidu d'un pôle ne coïncidant pas avec r est :

4° Pour $s = 1$, seulement si le caractère est principal, 5° Pour les racines $\mathfrak{r}$ comprises entre o (inclusivement) et 1,

$$\frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r};$$

6° Pour les racines non réelles (à ordonnée absolument inférieure à T_g) que je désigne par ρ (¹),

$$\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r};$$

7° Pour les racines $-2, -4, -6, \ldots, -2\left[\frac{z}{2}\right]$ dans le cas $a=0$ et $-1, -3, \ldots, -z$ dans le cas $a=1$, en résumé, pour $-(2m-a)$, $m=1, 2, \ldots, \left[\frac{z}{2}\right]+a$,

$$\frac{x^{-(2m-a)-r}}{-(2m-a)-r}.$$

On a donc dans tous les cas, si I, II, III, IV désignent, à partir de $2+r-T_g i$ en haut, les côtés du rectangle,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathrm{I}}+\int_{\mathrm{II}}+\int_{\mathrm{III}}+\int_{\mathrm{IV}}\right)\\ &\quad=\sum_{-T_g<\gamma<T_g}\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r}-c\,\frac{x^{1-r}}{1-r}+\sum_{\mathfrak{r}}\frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r}\\ &\qquad+\sum_{m=1}^{\frac{z}{2}+a}\frac{x^{-(2m-a)-r}}{-(2m-a)-r}+\frac{L'(r)}{L(r)},\end{aligned}\right.$$

où il faut faire la convention que, si $\frac{L'(r)}{L(r)}$ est dépourvu de sens, ce qui entraine qu'au moins un autre terme le soit aussi, on entend

$$\lim_{r=1}\left[\frac{L'(r)}{L(r)}-\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]\quad\text{par}\quad\frac{L'(r)}{L(r)}-\frac{x^{1-r}}{1-r}$$

et

$$\lim_{r=\mathfrak{r}}\left[\frac{L'(r)}{L(r)}+\frac{\lambda x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r}\right]\quad\text{par}\quad\frac{L'(r)}{L(r)}+\frac{\lambda x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r},$$

où λ désigne la multiplité de la racine $\mathfrak{r}$.

(¹) Il est commode de changer ici un peu les désignations et d'exclure du signe ρ toutes les racines réelles. Dans 5° et 6°, une racine multiple doit être énumérée plusieurs fois.

XIII. — Passage à la limite $z = \infty$.

En faisant tendre dans (35) z à l'infini, l'intégrale sur III tend vers o; car, sur ce chemin de longueur finie, on a, par le lemme III',

$$\left|\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < \frac{x^{-z-r}}{|s|}\,a_{45}\log|s| < a_{54}\,x^{-z}.$$

De même les intégrales II, IV peuvent être étendues à l'infini, puisque, pour $t = \pm T_g$, $\sigma \leqq -1$, le lemme III' donne

$$\left|\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < \frac{x^{\sigma-r}}{|s|}\,a_{45}\log|s| < a_{55}\,x^{\sigma}.$$

Enfin, au quatrième terme du second membre de (35),

$$\lim_{z=\infty}\sum_{m=1}^{\frac{z}{2}+a}\frac{x^{-2(m-a)-r}}{-2(m-a)-r} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{-2(m-a)-r}}{-2(m-a)-r} = \sum_{R}\frac{x^{R-r}}{R-r},$$

où R parcourt les zéros négatifs de $L(s)$.

Donc

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{2+r-T_g i}^{2+r+T_g i}\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds &= \sum_{-T_g<\gamma<T_g}\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r} - c\,\frac{x^{1-r}}{1-r}\\
&\quad+\sum_{\mathfrak{r}}\frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r}+\sum_{R}\frac{x^{R-r}}{R-r}+\frac{L'(r)}{L(r)}\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{2+r-T_g i}^{-\infty-T_g i}\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+T_g i}^{2+r+T_g i}\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds.
\end{aligned}\right.$$

XIV. — Passage à la limite $g = \infty$.

Pour $g = \infty$, les deux intégrales au second membre de (36) tendent vers o; car pour $t = \pm T_g$, $\sigma \leqq -1$, on a, si $g \geqq 3 > e$, par le lemme III′,

$$\left|\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < \frac{x^{\sigma}}{|s|}\,a_{45}\log|s| < a_{45}\,x^{\sigma}\,\frac{\log T_g}{T_g},$$

de sorte que

$$\left|\int_{-\infty\pm T_g i}^{-1\pm T_g i}\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds\right| < a_{45}\,\frac{\log T_g}{T_g}\int_{-\infty}^{-1}x^{\sigma}\,d\sigma,$$

et, pour $t=\pm T_g$, $-1\leq\sigma\leq 2$, on a, par (34),

$$\left|\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < \frac{x^{\sigma}}{T_g}\,a_{53}\log^2 T_g,$$

pour $t=\pm T_g$, $\sigma\geq 2$

$$\left|\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\right| < \frac{x^{\sigma}}{T_g}\,a_{56},$$

de sorte que

$$\left|\int_{-1\pm T_g i}^{2+r\pm T_g i}\frac{x^{s-r}}{s-r}\,\frac{L'(s)}{L(s)}\,ds\right| < (r+3)\,\frac{x^{2+r}}{T_g}\,a_{57}\log^2 T_g.$$

Le premier membre de (36) tend vers $-\Lambda(x,r)$, comme on l'a vu plus haut; la limite

$$\lim_{g=\infty}\sum_{-T_g<\gamma<T_g}\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r}$$

existe donc. Cela entraîne que la somme

$$\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r},$$

où les ρ sont rangés par ordonnées croissantes, converge; car

$$\sum_{g<|\gamma|<g+1}\left|\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r}\right| < \sum_{g<|\gamma|<g+1}\frac{x^{1-r}}{|\gamma|} < x^{1-r}\,\frac{a_{58}\log g}{g},$$

ce qui tend vers zéro pour $g=\infty$. J'obtiens donc

$$(37)\qquad \Lambda(x,r) = c\,\frac{x^{1-r}}{1-r} - \sum_{\rho}\frac{x^{\rho-r}}{\rho-r} - \sum_{\mathfrak{r}}\frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r} - \sum\frac{x^{R-r}}{R-r} - \frac{L'(r)}{L(r)}.$$

XV. — Intégration par rapport au paramètre et formule finale.

Il est permis d'intégrer les séries dans (37) terme à terme par rapport à r entre les limites o et ∞. Car la somme

$$\sum_\rho \frac{x^{\rho-r}}{\rho-r}$$

peut se mettre sous la forme

$$x^{-r}\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}+\sum_\rho \frac{x^{\rho-r}r}{\rho(\rho-r)},$$

où le premier terme est le produit d'une fonction de r par une série ne renfermant pas r et où le second terme est une somme de quantités respectivement inférieures en valeur absolue à

$$x^{1-r}r\frac{1}{|\gamma|^2}.$$

L'intégration fournit

$$\sum_\rho \{\mathrm{L}i(x^\rho)\mp\pi i\},$$

où le signe $-$ correspond à $\gamma>0$, le signe $+$ à $\gamma<0$. Pour la somme

$$\sum_{\mathrm{R}} \frac{x^{\mathrm{R}-r}}{\mathrm{R}-r},$$

l'intégration est également permise et fournit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum_{\mathrm{R}} \frac{x^{\mathrm{R}-r}}{\mathrm{R}-r}\,dr &= -\sum_{\mathrm{R}}\int_{\mathrm{R}}^{-\infty}\frac{x^s}{s}\,ds=-\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-(2m-a)}^{\infty}\frac{x^s}{s}\,ds\\ &=-\sum_{m=1}^{\infty}\int_1^\infty \frac{x^{-(2m-a)u}}{u}\,du=-\int_1^\infty\frac{x^{-(2-a)u}\,du}{u(1-x^{-2u})}\\ &=-\int_1^\infty \frac{x^{au}\,du}{u(x^{2u}-1)}=-\int_x^\infty\frac{dy}{y^{1-a}\log y(y^2-1)}.\end{aligned}$$

Pour les termes en nombre fini

$$c\,\frac{x^{1-r}}{1-r} - \sum_{\mathfrak{r}} \frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r} - \frac{\mathrm{L}'(r)}{\mathrm{L}(r)},$$

il n'y a danger ni à traverser les valeurs $r=1$ et $r=\mathfrak{r}$, la fonction y restant continue, ni à intégrer jusqu'à l'infini, puisque

$$\lim_{\omega=\infty}\int_2^{\omega}\frac{\mathrm{L}'(r)}{\mathrm{L}(r)}\,dr = \lim_{\omega=\infty}\left(\sum_{p,m}\frac{\mathrm{Z}(p^m)}{mp^{\omega m}} - \sum_{p,m}\frac{\mathrm{Z}(p^m)}{mp^{2m}}\right)$$

$$= -\sum_{p,m}\frac{\mathrm{Z}(p^m)}{mp^{2m}} = -\log \mathrm{L}(2).$$

Pour écrire le résultat, je suppose d'abord

$$\mathrm{L}(0) \neq 0.$$

Alors on a, en désignant les $\mathfrak{r}$ par $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha$ $(\alpha \geqq 0)$,

$$\int_0^{\infty}\left\{c\,\frac{x^{1-r}}{1-r} - \sum_{\mathfrak{r}}\frac{x^{\mathfrak{r}-r}}{\mathfrak{r}-r} - \frac{\mathrm{L}'(r)}{\mathrm{L}(r)}\right\}dr$$

$$= c\lim_{h=+0}\left(\int_0^{1-h}\frac{x^{1-r}}{1-r}\,dr + \int_{1+h}^{\infty}\frac{x^{1-r}}{1-r}\,dr\right)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\alpha}\lim_{h=+0}\left(\int_0^{\mathfrak{r}_\beta-h}\frac{x^{\mathfrak{r}_\beta-r}}{\mathfrak{r}_\beta-r}\,dr + \int_{\mathfrak{r}_\beta+h}^{\infty}\frac{x^{\mathfrak{r}_\beta-r}}{\mathfrak{r}_\beta-r}\,dr\right)$$

$$+\log \mathrm{L}(0) - (\alpha-c)\pi i$$

$$= c\,\mathrm{L}i(x) - \sum_{\mathfrak{r}}\mathrm{L}i(x^{\mathfrak{r}}) + \log\mathrm{L}(0) - (\alpha-c)\pi i, \tag{38}$$

$\log\mathrm{L}(0)$ désignant la valeur obtenue en prolongeant

$$\log\mathrm{L}(s) = \sum_{p,m}\frac{\mathrm{Z}(p^m)}{mp^{ms}} \qquad (s>1)$$

suivant l'axe réel en évitant les points singuliers par de petits détours dans le demi-plan supérieur. Si

$$\mathrm{L}(0) = 0,$$

le résultat (38) subsiste encore si l'on fait la convention d'entendre par

$$-\lambda \mathrm{L}i(1) + \log \mathrm{L}(0)$$

(cas du zéro $\mathfrak{r} = 0$ de multiplicité $\lambda \geqq 1$) la limite

$$\lim_{h=+0} \{-\lambda \mathrm{L}i(x^h) + \log \mathrm{L}(-h)\}.$$

Le premier membre de (37) donne, en l'intégrant de $r = 0$ à $r = \infty$,

$$\int_0^\infty \Lambda(x, r)\,dr = \int_0^\infty \sum_{p^m \leqq x} \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{mr}}\,dr = \sum_{p^m \leqq x} \frac{\chi(p^m)}{m},$$

où, pour $x = p_0^{m_0}$, le dernier terme ne compte qu'à demi.

En posant donc

$$f(x) \begin{cases} = \displaystyle\sum_{p^m < x} \frac{\chi(p^m)}{m} & \text{pour} \quad x \text{ différent de tous les } p^m, \\ = \displaystyle\sum_{p^m \leqq x} \frac{\chi(p^m)}{m} - \frac{1}{2}\frac{\chi(p_0^{m_0})}{m_0} & \text{pour} \quad x = p_0^{m_0}, \end{cases}$$

fonction qui diffère de $\sum_{p \leqq x} \chi(p)$ d'une quantité d'ordre $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$ seulement et qui contient comme cas particulier la fonction $f(x)$ de Riemann, j'obtiens

$$f(x) = c\,\mathrm{L}i(x) - \sum_\rho \{\mathrm{L}i(x^\rho) \mp \pi i\} + \int_x^\infty \frac{dy}{y^{1-a}\log y\,(y^2-1)}$$
$$- \sum_{\mathfrak{r}} \mathrm{L}i(x^{\mathfrak{r}}) + \log \mathrm{L}(0) - (\alpha - c)\pi i.$$

Cela renferme la formule de Riemann comme cas particulier :

$$k = 1, \qquad \chi(n) = 1, \qquad c = 1, \qquad a = 0, \qquad \alpha = 0,$$
$$\mathrm{L}(s) = \zeta(s), \qquad \log \mathrm{L}(0) = -\log 2 - \pi i.$$