NIELS NIELSEN

Sur la représentation asymptotique d'une série de factorielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 449-458
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__449_0>

SUR LA

REPRÉSENTATION ASYMPTOTIQUE

D'UNE

SÉRIE DE FACTORIELLES,

PAR M. NIELS NIELSEN,

A COPENHAGUE.

I. — Formules générales.

Dans des publications récentes [1] j'ai étudié une série de factorielles de cette forme

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_{s+1}}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{1}$$

où les coefficients b_n sont indépendants de x, pourvu que $|x|$ soit une quantité définie, tandis que j'ai supprimé par principe le cas contraire. Or, comme nous le verrons dans les pages suivantes, la série (1) possède des propriétés intéressantes pour de telles valeurs de $|x|$ aussi.

Pour étudier dans ce cas la série (1) nous avons à prendre comme point de départ deux formules élémentaires, savoir cette identité de *Schlömilch*

$$\frac{1}{x^r} = \sum_{s=r}^{s=n} \frac{C_{s-1}^{s-r}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + A_{n,r}(x), \tag{2}$$

(1) *Comptes rendus*, 30 déc. 1901 et 20 janv. 1902. *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIX, 1902. Je cite toujours ce dernier Mémoire en écrivant simplement dans le texte le numéro de la page du Volume susdit dont il s'agit.

où nous avons posé pour abréger

$$(2\,bis)\quad A_{n,r}(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\left(\frac{C_n^{r-1}}{x} + \frac{C_n^{r-2}}{x^2} + \ldots + \frac{C_n^0}{x^r}\right),$$

tandis que les coefficients C_q^r sont les nombres de *Stirling*, savoir les nombres positifs entiers définis à l'aide de cette identité

$$(3)\qquad x(x+1)\ldots(x+q-1) = C_q^0 x^q + C_q^1 x^{q-1} + \ldots + C_q^{q-1} x;$$

c'est-à-dire que C_q^p est la somme des $\binom{q-1}{p}$ produits contenant p facteurs différents qu'il est possible de former des nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad q-1.$$

La formule (2) se démontre simplement en différentiant $(r-1)$ fois, par rapport à α cette formule élémentaire de *Stirling*

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\ldots(x+s)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\,\frac{1}{x-\alpha},$$

et en posant ensuite $\alpha = 0$.

Quant à la seconde formule élémentaire susdite, elle est inverse de (2); on peut l'obtenir en appliquant sur les termes du second membre de cette identité bien connue

$$\frac{r!}{x(x+1)\ldots(x+r)} = \binom{r}{0}\frac{1}{x} - \binom{r}{1}\frac{1}{x+1} + \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}\frac{1}{x+r}$$

la série géométrique ordinaire

$$\frac{1}{x+p} = \frac{1}{x} - \frac{p}{x^2} + \frac{p^2}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}p^{n-1}}{x^n} + \frac{(-1)^n p^n}{x^n}\,\frac{1}{x+p},$$

ce qui donnera ce développement en série de puissances négatives

$$(4)\qquad \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+r-1)} = \sum_{s=r}^{s=n} (-1)^{r-s}\frac{\mathfrak{C}_r^{s-r}}{x^s} + B_{n,r}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(4\,bis)\qquad B_{n,r}(x)=\frac{(-1)^n}{x^r(r-1)!}\sum_{s=0}^{s=r-2}(-1)^s\binom{r-1}{s}\frac{(r-s-1)^n}{x+r-s-1},$$

tandis que les coefficients $\mathfrak{C}_{q+1}^p$ se présentent sous cette forme

$$(5)\quad \mathfrak{C}_{q+1}^p=\frac{1}{q!}\left[\binom{q}{0}q^{p+q}-\binom{q}{1}(q-1)^{p+q}+\ldots+(-1)^{q-1}\binom{q}{q-1}1^{p+q}\right].$$

Cela posé, prenons comme point de départ la série de factorielles (1), convergente, pour que $\mathfrak{R}(x)>\Lambda$ (p. 421), puis mettons

$$(6)\qquad \Omega(x)=\sum_{s=1}^{s=n}\frac{b_s}{x(x+1)\ldots(x+s-1)}+B_n(x),$$

une transformation à l'aide de (4) effectuée sur les n premiers termes du second membre de (6) donnera cette autre représentation

$$(7)\qquad \Omega(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+R_n(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(7\,bis)\qquad R_n(x)=B_n(x)+b_2B_{n,2}(x)+\ldots+b_nB_{n,n}(x),$$

tandis que les coefficients a_r se déterminent à l'aide de ces formules

$$(8)\qquad \begin{cases} a_1=b_1,\\ a_r=b_r\mathfrak{C}_r^0-b_{r-1}\mathfrak{C}_{r-1}^1+\ldots+(-1)^r b_2\mathfrak{C}_2^{r-2}.\end{cases}$$

Supposons maintenant que x soit un point très éloigné du domaine de convergence de $\Omega(x)$, mais non situé sur l'axe des nombres négatifs; si $\Omega(x)$ est convergente dans toute l'étendue du plan, nous aurons évidemment cette valeur limite

$$(9)\qquad \lim_{|x|=\infty}[x^nR_n(x)]=0.$$

Remarquons ensuite qu'une fonction ne peut être développée en série asymptotique que d'une seule façon; nous aurons ce théorème général où le signe $\backsim$ désigne une égalité asymptotique d'après la définition de M. Poincaré [1] :

I. *Si la fonction* (1) *est développable en série de puissances négatives entières de x, les coefficients de cette série se déterminent à l'aide de* (8); *dans le cas contraire nous trouverons cette série asymptotique*

$$\Omega(x) \backsim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \tag{10}$$

qui est certainement valable dans tous les points très éloignés du domaine de convergence de la série (1), *à l'exception peut-être des points situés sur l'axe des nombres négatifs.*

Nous avons à remarquer que la série asymptotique (10) peut être applicable dans des points situés en dehors du domaine de convergence de (1), comme le montrent clairement les deux séries asymptotiques particulières (20) et (21).

On voit du reste que la première partie du théorème I peut être considérée comme l'inverse de la proposition que j'ai démontrée concernant la méthode de *Stirling* (p. 437).

Quant à la seconde partie du théorème I, savoir qu'une fonction développable en série de factorielles a toujours la même série asymptotique dans tous les points très éloignés du demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires, l'inverse n'est pas vrai. En effet, il est très facile de construire des fonctions qui ont cette propriété sans être développables en série de factorielles convergentes pour des valeurs finies de $|x|$.

Ce résultat négatif concernant l'inversion de la seconde partie du théorème I est assez intéressant, parce qu'il montre que la condition susdite nécessaire, assez étroite, relative à la série asymptotique, n'est pas suffisante pour rendre développable en série de factorielles la fonction en question.

Considérons maintenant d'un autre point de vue le théorème I en remarquant que toutes les fonctions développables en série de facto-

(1) *Acta mathematica*, t. VIII, 1886, p. 297.

rielles de la forme (1) doivent se présenter sous cette forme intégrale

$$(11)\qquad \Omega(x) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

où $f(t)$ est holomorphe aux environs de $t = 0$, de sorte que nous aurons ce développement en série de *Taylor* :

$$(11\,bis)\qquad f(t) = a_1 + \frac{a_2}{1!}t + \frac{a_3}{2!}t^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!}t^{n-1} + \mathrm{R}_n(t),$$

où les coefficients a_n sont précisément ceux que nous avons définis à l'aide de (8) (p. 438).

Cela posé, introduisons dans (11) l'expression (11 *bis*), puis intégrons terme à terme, nous aurons

$$(12)\qquad \Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \int_0^{\infty} \mathrm{R}_n(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

ce qui donnera immédiatement cet autre théorème :

II. *Pour la fonction $\Omega(x)$ développable en séries de factorielles, la formule* (12) *donnera la série de puissances négatives entières, si un tel développement est possible, sinon la même formule donnera la série asymptotique de $\Omega(x)$.*

Supposons encore donnée cette série asymptotique

$$(13)\qquad \Omega(x) \backsim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

valable pour les points très éloignés d'une certaine ligne droite passant par l'origine, puis appliquons sur les puissances figurant au second membre de (13) la formule (2), nous aurons une expression de cette forme

$$(14)\qquad \Omega(x) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{b_s}{x(x+1)\ldots(x+s-1)} + \mathrm{R}_n(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(14\,bis)\qquad \mathrm{R}_n(x) = a_2 \mathrm{A}_{n,2}(x) + a_3 \mathrm{A}_{n,3}(x) + \ldots + a_n \mathrm{A}_{n,n}(x),$$

tandis que les coefficients b_r se déterminent à l'aide de ces formules

$$(15)\qquad \begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_{r+1} = C_r^0 a_{r+1} + C_r^1 a_r + \ldots + C_r^{r-1} a_2. \end{cases}$$

Or, supposons que la ligne droite pour laquelle la formule (13) est applicable ne coïncide pas avec l'axe des nombres négatifs, nous aurons évidemment pour les points très éloignés de cette ligne

$$(16)\qquad \lim_{|x|=\infty} [x^n R_n(x)] = 0;$$

cette condition remplie, nous écrivons simplement

$$(17)\qquad \Omega(x) \backsim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{b_s}{x(x+1)\ldots(x+s-1)},$$

et nous désignons comme série asymptotique de factorielles de $\Omega(x)$ l'expression qui figure au second membre de cette formule; c'est-à-dire que nous avons démontré cet autre théorème :

III. *Une application formelle de la méthode de Stirling nous conduira toujours de la série asymptotique* (13) *à la série de factorielles de* $\Omega(x)$ *si un tel développement est possible, sinon nous trouvons la série de factorielles asymptotiques de* $\Omega(x)$, *valable généralement où l'est la série* (13) *elle-même.*

Il faut remarquer maintenant que dans le premier cas le domaine de convergence de la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$ ne contient pas toujours tous les points très éloignés, où la formule (13) est applicable.

Remarquons en passant que les deux systèmes d'équations algébriques linéaires (8) et (15) sont inverses. En effet, déterminons à l'aide de (8) les valeurs des quantités b_n, nous trouvons précisément les expressions (15) et *vice versa*.

Appliquons par exemple ce principe pour exprimer une puissance positive entière de x à l'aide des factorielles, l'identité

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x$$

donnera cette autre identité inverse très connue

$$(18)\qquad x^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \mathfrak{C}_{n-s+1}^s\, x(x+1)\ldots(x+n-s-1).$$

Considérons maintenant quelques applications particulières des théorèmes généraux que nous venons de démontrer.

II. — Applications aux fonctions $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ et $\beta(x)$.

Prenons comme premier exemple les deux fonctions de *Binet* :

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x) = \frac{1}{2x} - D_x\omega(x);$$

$$\omega\ (x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi};$$

les formules développées dans mon premier Mémoire (p. 440) donnent, en vertu du théorème II, ce résultat particulier :

Ces deux séries asymptotiques

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega\,(x) \backsim \sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{2s+2}\,\frac{B_{2s+1}}{x^{2s+1}} \\ &\omega_1(x) \backsim \sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-2}{2}} (-1)^s\,\frac{B_{2s+1}}{x^{2s+2}} + \frac{1}{2x} \end{aligned}\right.$$

sont certainement valables dans le demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires. Les coefficients B_1, B_3, B_5, ... *désignent les nombres de Bernoulli.*

On sait en effet que les nombres de *Bernoulli* croissent plus fortement que les termes d'une série géométrique quelconque, ce qui montrera que les deux séries obtenues de (19) pour $n=\infty$ seront divergentes.

Comme second exemple considérons cette autre fonction

$$\beta(x) = -\,D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[-\Psi\left(\frac{x}{2}\right) + \Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right],$$

nous aurons ces trois séries de factorielles (p. 426, 453)

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\,\frac{1}{2^{s+1}},$$

$$\beta\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\,\frac{\sin\dfrac{s+1}{4}\pi}{2^{\frac{s-1}{2}}},$$

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\sin\frac{2s+1}{6}\pi,$$

dont les deux premières sont valables dans toute l'étendue du plan, tandis qu'il faut admettre pour la troisième cette condition $\mathfrak{R}(x) > 0$.

Pour trouver, à l'aide du théorème II, la série asymptotique de $\beta(x)$, considérons ces deux expressions intégrales

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\,dt, \qquad \mathrm{R}(x) > 0;$$

nous aurons cette série de puissances

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathrm{T}_{2s+1}}{(2s+1)!}\,x^{2s+1}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2},$$

où les coefficients T_1, T_3, T_5, ... sont des nombres entiers, souvent dits *coefficients du tangent,* qui s'exprime à l'aide des nombres de *Bernoulli* comme suit :

$$\mathrm{T}_{2s+1} = \frac{2^{2s+1}(2^{2s+2}-1)}{s+1}\,\mathrm{B}_{2s+1}.$$

Cela posé, l'identité

$$\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

nous conduira immédiatement à cette autre série de puissances

$$\frac{2}{1+e^{-t}} = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s T_{2s+1}}{(2s+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s+1}, \qquad |t| < \pi,$$

de sorte que nous obtenons, à l'aide de II, cet autre résultat particulier remarquable :

La série asymptotique

$$(20) \qquad \beta(x) \backsim \frac{1}{2x} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s T_{2s-1}}{(2x)^{2s}}$$

est valable dans tous les points très éloignés du plan des x, à l'exception de l'axe des nombres négatifs.

Appliquons maintenant les formules (8), (15); nous trouverons une suite de formules contenant les nombres T_{2r+1}, C_q^p et $\mathfrak{C}_q^p$; car toutes les trois séries de factorielles susdites conduiront à la série asymptotique (20). Au lieu de développer ces formules numériques nous préférons donner une autre série asymptotique intéressante.

A cet égard prenons comme point de départ les expressions intégrales susdites de $\beta(x)$, nous aurons

$$\beta\left(x+\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}\, t^{\frac{t}{2}}}{1+t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-tx} e^{-\frac{t}{2}}}{1+e^{-t}}\, dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > -\frac{1}{2},$$

de sorte que la définition des nombres E_{2s} d'Euler donnera cette série de puissances

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!} E_{2s} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s}, \qquad |t| < 2\pi.$$

Remarquons ensuite que la fonction $\beta(x+\frac{1}{2})$ peut être développée en série de factorielles convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x) > -\frac{1}{2}$; comme le montre clairement un théorème général (p. 433), il est évident que les formules précédentes nous conduiront à la série asymptotique de $\beta(x+\frac{1}{2})$; nous obtenons en vérité ce résultat nouveau remarquable :

La série asymptotique

$$\beta\left(x+\frac{1}{2}\right) \backsim \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s E_{2s}}{(2x)^{2s+1}} \tag{21}$$

est valable dans tous les points très éloignés du plan des x, à l'exception de l'axe des nombres négatifs.

Appliquant le théorème II, on voit que (21) est certainement valable, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$. Posons ensuite dans (20) $\frac{x+1}{2}$ au lieu de x, puis ordonnons l'expression du second membre de cette formule selon des puissances négatives de x, nous retrouvons nécessairement la formule obtenue de (21) en y mettant $\frac{x}{2}$ au lieu de x si nous supposons pour l'instant $\mathfrak{R}(x)$ positive. De cette manière nous trouverons des formules bien connues entre les nombres T_{2s+1} et E_{2s}; ce qui montrera que la formule (21) est valable où l'est (20).

La formule (21) et la formule (20) pour $\frac{x}{3}$ au lieu de x montrent clairement que le domaine de convergence de la série de factorielles $\Omega(x)$ ne contient pas toujours tous les points dans lesquels la série asymptotique obtenue pour $\Omega(x)$ est valable.

Copenhague, le 15 octobre 1903.