ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MICHEL EMERY

Équations différentielles stochastiques lipschitziennes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 40-43

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_40_0>

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LIPSCHITZIENNES

Michel EMERY

Université de Strasbourg

Cet exposé énonce, sans démonstrations, les résultats de deux articles à paraître dans le volume XIII du Séminaire de Probabilités de Strasbourg, consacrés à la stabilité de la solution d'une équation differentielle stochastique très générale, l'équation de Doléans-Dade et Protter.

NOTATIONS

Ce sont celles du Cours sur les Intégrales Stochastiques de Meyer (volume X du Séminaire). Les données Ω, $\underline{\underline{F}}$, P, $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ vérifient les conditions habituelles, la tribu $\underline{\underline{F}}$ étant en outre supposée essentiellement séparable. Les processus sont en fait des classes de processus indistinguables; l'intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné X par rapport à une semimartingale M est notée X·M :

$$(X\cdot M)_t = \int_{[0,t]} X_s \, dM_s \quad .$$

DEUX ESPACES DE PROCESSUS ET LEURS TOPOLOGIES

On désigne par L^0 l'espace de toutes les variables aléatoires p.s. finies, par $\underline{\underline{D}}$ l'espace des processus adaptés à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche, et par $\underline{\underline{SM}}$ le sous-espace de $\underline{\underline{D}}$ constitué des semimartingales. Pour $X \in \underline{\underline{D}}$, on note X_- le processus des limites à gauche de X et, si T est un temps d'arrêt, X^{T-} le processus X arrêté à T- :

$$X^{T-} = X \, I_{[\![0,T[\![} + X_{T-} \, I_{[\![T,\infty[\![} \quad .$$

Soit d_p une distance sur L^0 qui soit bornée et invariante par translations et qui définisse la topologie de la convergence en probabilité (par exemple

$$d_p(U,V) = E[\inf(1,|U-V|)] \quad).$$

On définit alors une distance d_{cp} sur $\underline{\underline{D}}$ par

$$d_{cp}(X,Y) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\, d_p(0, \sup_{0\leq t\leq n}|X_t-Y_t|)$$

et une distance plus forte d_{sm} sur $\underline{\underline{SM}}$ par

$$d_{sm}(M,N) = \sup_{|X|\leq 1} d_{cp}(X\cdot M, X\cdot N) \quad ,$$

le sup portant sur tous les processus prévisibles bornés par 1.

Les espaces métriques $(\underline{\underline{D}},d_{cp})$ et $(\underline{\underline{SM}},d_{sm})$ sont alors complets, et leurs topologies respectives (que nous appellerons topologie de la convergence compacte en probabilité et topologie des semimartingales) ne dépendent pas du choix de d_p et sont invariantes lorsqu'on remplace P par une probabilité équivalente. Plus généralement, si Q est une probabilité absolument continue par rapport à P, les applications " identiques "[(1)] de $\underline{\underline{D}}(P)$ dans $\underline{\underline{D}}(Q)$ et de $\underline{\underline{SM}}(P)$ dans $\underline{\underline{SM}}(Q)$ sont continues pour ces topologies. Ainsi définies, ces topologies sont peu maniables. Leur utilisation est facilitée par leur lien avec les espaces de Banach introduits ci-dessous:

Pour $1\leq p\leq\infty$, on appelle $\underline{\underline{S}}^p$ l'espace de Banach des processus $X\in\underline{\underline{D}}$ dominés par une variable aléatoire de L^p (muni de la norme $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} = \|\sup_t|X_t|\|_{L^p}$). Toujours pour $1\leq p\leq\infty$, on appelle $\underline{\underline{H}}^p$ l'espace de Banach des semimartingales $M = N + A$, où la martingale N et le processus à variation finie A sont tels que $[N,N]^{\frac{1}{2}}$ et A soient à variation totale dans L^p; on le munit de la norme

$$\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{M=N+A} \| [N,N]^{\frac{1}{2}}_{\infty} + \int_0^{\infty}|dA_s| \|_{L^p} \quad .$$

Le théorème qui lie ces normes aux distances introduites plus haut est le suivant:

---

(1) Ces applications ne sont en général pas injectives; j'ignore en outre si la deuxième est surjective.

THEOREME. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Soient* (X^n) *une suite de processus de* $\underline{\underline{D}}$ (*respectivement* $\underline{\underline{SM}}$), X *un processus de* $\underline{\underline{D}}$ (*respectivement* $\underline{\underline{SM}}$).

a) *Si* X^n *tend vers* X *localement dans* $\underline{\underline{S}}^p$ (*respectivement* $\underline{\underline{H}}^p$), X^n *tend vers* X *pour la distance* d_{cp} (*respectivement* d_{sm}).

b) *Si la suite* X^n *tend vers* X *pour* d_{cp} (*respectivement* d_{sm}), *on peut en extraire une sous-suite qui tend vers* X *localement dans* $\underline{\underline{S}}^p$ (*respectivement* $\underline{\underline{H}}^p$).

Dans cet énoncé, la notion de convergence localement dans $\underline{\underline{S}}^p$ ne doit pas être prise au sens usuel: nous disons qu'une suite X^n tend vers X localement dans $\underline{\underline{S}}^p$ s'il existe des temps d'arrêt T_k qui tendent en croissant vers l'infini tels que, pour tout k,

- X^{T_k-} et, pour tout n, $(X^n)^{T_k-}$ sont dans $\underline{\underline{S}}^p$,
- $(X^n)^{T_k-}$ converge dans $\underline{\underline{S}}^p$ vers X^{T_k-};

de même pour $\underline{\underline{H}}^p$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LIPSCHITZIENNES

Pour $a>0$, on note Lip(a) l'ensemble des applications F de $\underline{\underline{D}}$ dans $\underline{\underline{D}}$ non anticipantes (pour tout temps d'arrêt T, pour tous X et Y de $\underline{\underline{D}}$, $X^{T-} = Y^{T-}$ entraîne $(FX)^{T-} = (FY)^{T-}$) et a-lipschitziennes (pour tous X et Y de $\underline{\underline{D}}$, $\sup_t |FX_t - FY_t| \leq a \sup_t |X_t - Y_t| \leq \infty$ p.s.). Par exemple F est dans Lip(a) pour $FX_t(\omega) = f(\omega, t, X_t(\omega))$, où la fonction $f(\omega,t,x)$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable en ω pour t et x fixés, càdlàg en t pout ω et x fixés, et a-lipschitzienne en x pour ω et t fixés.

On sait (Doléans-Dade, Protter) que, pour $H \in \underline{\underline{D}}$, $F \in \text{Lip}(a)$ et $M \in \underline{\underline{SM}}$, il existe un processus X et un seul dans $\underline{\underline{D}}$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique

$$X = H + FX_- \cdot M \quad ;$$

il est clair que si H est une semimartingale, X en est aussi une.

Le principal résultat de cet exposé est le suivant:

THEOREME de stabilité. <u>Les deux applications de</u> $\underline{\underline{D}} \times \mathrm{Lip}(a) \times \underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>et de</u> $\underline{\underline{SM}} \times \mathrm{Lip}(a) \times \underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>définies par la résolution de l'équation</u>

$$X = H + FX_{-} \cdot M$$

<u>sont continues lorsque</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>est muni de</u> d_{cp}, $\mathrm{Lip}(a)$ <u>de la topologie de la convergence simple associée à</u> d_{cp}, <u>et</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>de</u> d_{sm}.

En prenant des applications F constantes, on obtient le cas particulier suivant (qui admet, bien sûr, une démonstration directe):

COROLLAIRE. <u>L'application de</u> $\underline{\underline{D}} \times \underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>qui à</u> (X,M) <u>associe</u> $X_{-} \cdot M$ <u>est continue</u>.

La démonstration de ce théorème utilise le précédent pour se ramener à travailler dans les espaces de Banach $\underline{\underline{S}}^p$ et $\underline{\underline{H}}^p$. La même méthode fournit la possibilité de résoudre l'équation par approximations successives:

THEOREME. <u>Soient</u> $H \in \underline{\underline{D}}$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$, $M \in \underline{\underline{SM}}$, X <u>la solution de l'équation</u>

$$X = H + FX_{-} \cdot M \quad .$$

<u>Pour tout</u> $Y^0 \in \underline{\underline{D}}$, <u>on définit une suite</u> (Y^n) <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>par la relation de récurrence</u> $Y^{n+1} = H + FY^n_{-} \cdot M$. <u>Alors</u> $X - Y^n$ <u>tend vers zéro pour</u> d_{sm} (<u>et a fortiori pour</u> d_{cp}).

Ces deux derniers théorèmes s'étendent au cas d'un système d'équations différentielles; ils restent vrais lorsqu'on remplace la constante de Lipschitz a par une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}$-mesurable p.s. finie $a(\omega)$.

M. Emery
IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg-Cedex