Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Guy Fourt

Une propriété des puissances de convolutions itérées

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 49, série *Mathématiques*, nº 8 (1972), exp. nº 6, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1972__49_8_A6_0>

UNE PROPRIETE DES PUISSANCES DE CONVOLUTIONS ITEREES

Guy FOURT

Introduction

Dans [3] A.J. STAM démontre que si μ est une probabilité apériodique sur R , pour toute densité de probabilité f , la norme de la mesure $\mu^{*n} * (f - f * \delta_x)$ tend vers 0 si n tend vers l'infini. Cette propriété n'est en fait que la conséquence du théorème suivant dont nous donnerons une démonstration. Il s'agit d'une adaptation d'une démonstration donnée dans un séminaire de l'Université de Montréal par G. LETAC et M. METIVIER sur les théorèmes du renouvellement de D. ORNSTEIN qui se restreignait aux groupes engendrés par un compact.

Théorème

Soit G un groupe abélien localement compact de mesure de Haar λ, et f une fonction réelle λ-intégrable. Pour toute probabilité apériodique μ sur G la norme de $\mu^{*n} * f$ tend vers $|\int f \, d\lambda|$ si n tend vers l'infini.

Preuve

Nous poserons :

$$a_n(f) = ||\mu^{*n} * f||_1$$

$\hat{f}$, $\hat{\mu}$ désignera la transformée de Fourier de f, μ, et nous démontrons 4 lemmes.

Lemme 1

Il suffit de démontrer que le théorème est vrai pour les fonctions f dont l'intégrale $\int f\, d\lambda$ est nulle.

Démonstration

Le théorème est trivial si f est positive. Par ailleurs, nous pouvons sans perte de généralité supposer que $\int f\, d\lambda \geqslant 0$. Il existe alors deux fonctions g et h telles que :

$$f = g + h,\ h \geqslant 0\ ,\ \int g\, d\lambda = 0$$

Alors $\int f\, d\lambda = \int h\, d\lambda \leqslant a_n\,(f) + a_n\,(g)$

Si nous avons montré que $a_n\,(g)$ tend vers 0, on en déduit que

$$\underline{\lim}\ a_n\,(f) \geqslant \int f\, d\lambda\ .$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} a_n\,(f) &\leqslant a_n\,(g) + a_n\,(h) \\ &\leqslant a_n\,(g) + \int h\, d\lambda \\ &\leqslant a_n\,(g) + \int f\, d\lambda\ . \end{aligned}$$

et donc :

$$\overline{\lim}\ a_n\,(f) \leqslant \int f\, d\lambda$$

d'où $\lim a_n\,(f) = \int f\, d\lambda$.

Lemme 2

Il suffit de démontrer que le théorème est vrai pour une fonction f dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ est nulle sur un voisinage de 0.

Démonstration

Si $\int f\, d\lambda = 0$, on a alors $\hat{f}\,(0) = 0$ et il existe (cf RUDIN [2], théorème 2.6.4) pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction v λ-intégrable telle que $||f - f * v||_1 < \varepsilon$, de transformée de Fourier $\hat{v}$ nulle sur un voisinage de 0 et donc

$$a_n (f) \leqslant \varepsilon + a_n (f * v)$$

Si nous avons montré que $a_n (f * v)$ tend vers 0, il s'en déduit

$$\overline{\lim}\ a_n (f) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et donc}$$

$$\lim a_n (f) = 0$$

Lemme 3

Il suffit de démontrer que le théorème est vrai pour toute fonction f de transformée de Fourier nulle sur un voisinage de 0 et à support compact.

Démonstration

Pour toute fonction f , et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction v de transformée de Fourier à support compact vérifiant l'inégalité $||f - f * v||_1 < \varepsilon$ (cf RUDIN [2] théorème 2.6.6). L'argument utilisé au lemme 2 permet alors de conclure.

Nous allons maintenant approcher μ par des mesures à supports compacts. Soit $\mathcal{K}$ la famille des compacts K de G tels que $\mu (K) > 0$ et μ_K la probabilité conditionnelle $\mu (. \mid K)$.

Nous posons alors

$$a_n^K (f) = || \mu_K^{*n} * f||_1$$

Lemme 4

Pour toute fonction λ-intégrable,

$$\overline{\lim_{n \infty}}\ a_n (f) \leqslant \overline{\lim_{n \infty}}\ a_n^K (f)$$

Démonstration

Il existe un nombre α compris entre 0 et 1 et une probabilité μ' telle que

$$\mu = \alpha\mu_K + (1-\alpha)\,\mu'$$

Alors :

$$a_n\,(f) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ \alpha^k\,(1-\alpha)^{n-k}\ a_k^K\,(f)$$

Si S_n est une suite de variables aléatoires binomiales de paramètre $(\alpha,\,n)$, cette égalité s'écrit :

$$a_n\,(f) \leqslant E\,(a_{S_n}^K\,(f))$$

Comme $a_n^K\,(f) \leqslant \int |f|\,d\lambda$, le lemme de Fatou montre que

$$\overline{\lim_{n\,\infty}}\ a_n\,(f) \leqslant E\ \overline{\lim_{n\,\infty}}\ a_{S_n}^K\,(f)$$

et puisque $S_n \to +\infty$ presque sûrement

$$\overline{\lim_{n\,\infty}}\ a_n\,(f) \leqslant E\ \overline{\lim_{n\,\infty}}\ a_n^K\,(f)$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\,\infty}}\ a_n^K\,(f)$$

Démonstration du théorème

Sous les hypothèses du lemme 3, pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons un compact C tel que

$$\int_{\complement C} |f|\,d\lambda < \varepsilon$$

Posons $C_1 = K$ et $C_n = C_{n-1} + C$

$$a_n^K(f) = \int |\mu_K^{*n} * f| \, d\lambda$$

$$\leqslant \int_{C_n} |\mu_K^{*n} * f| \, d\lambda + \int_{\complement C_n} |f(x-t_1 \ldots -t_n)| \, d\lambda_x \, d\mu_{K1} \ldots d\mu_{Kn}$$

$$\leqslant \int_{C_n} |\mu_K^{*n} * f| \, d\lambda + \varepsilon$$

L'inégalité de Schwartz montre alors que :

$$a_n^K(f) \leqslant \left[\lambda(C_n)\right]^{1/2} \left[\int |\mu_K^{*n} * f|^2 \, d\lambda\right]^{1/2} + \varepsilon$$

et si λ' est la mesure de Haar sur le dual de G , le théorème de Parseval entraîne que

$$a_n^K(f) \leqslant \left[\lambda(C_n)\right]^{1/2} \left[\int (\hat{\mu}_K^n \hat{f})^2 \, d\lambda'\right]^{1/2} + \varepsilon$$

Posons $s(K) = \max\limits_{\gamma \in \operatorname{Supp} \hat{f}} \hat{\mu}_K(\gamma)$

Il vient :

$$a_n^K(f) \leqslant \left[\lambda(C_n)\right]^{1/2} s^n(K) \, ||\hat{f}||_\infty \left[\lambda'(\operatorname{Supp} \hat{f})\right]^{1/2} + \varepsilon$$

Or μ_K converge faiblement vers μ suivant le filtre de Fréchet et donc $\hat{\mu}_K$ converge vers $\hat{\mu}$ suivant ce même filtre. Pour tout γ élément de $\operatorname{Supp} \hat{f}$ (et donc non nul), $\lim\limits_K |\hat{\mu}_K(\gamma)| < 1$ puisque μ est apériodique. Si F_K est le coset fermé $\{|\hat{\mu}_K| = 1\}$ il s'en déduit que

$$(\operatorname{Supp} \hat{f}) \cap \left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} F_K\right) = \emptyset$$

Utilisant à nouveau la compacité de $\operatorname{Supp} \hat{f}$, il existe un ensemble fini de compacts $K_1, \ldots, K_n$ tels que

$$(\operatorname{Supp} \hat{f}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n F_{K_i}\right) = \emptyset$$

Remarquons que $A \subset B$ implique $F_A \subset F_B$. Si $K_o = \bigcap\limits_{i=1}^n K_i$ on a alors

$$(\mathrm{Supp}\ f) \cap F_{K_o} = \emptyset$$

donc $s\ (K_o) < 1$ et la majoration

$$a_n^{K_o}(f) \leqslant A \left[\lambda\ (C_n)\right]^{1/2} s^n\ (K_o) + \varepsilon$$

avec $A = ||f||_\infty \left[\lambda'\ (\mathrm{Supp}\ \hat{f})\right]^{1/2}$

Soit G_1 le groupe fermé engendré par K_o et C. Ce groupe est isomorphe à un produit $H \times R^\alpha \times Z^\beta$ où H est un groupe compact (voir par exemple HEWITT et ROSS [1] chapitre 2). La restriction de λ à G_1 est une mesure invariante par les translations de G_1, non nulle puisque $\int_C |f|\ d\lambda > 0$. Elle est donc une mesure de Haar sur G_1. Notant λ_H, λ_{R_i}, λ_{Z_i} les mesures de Haar sur chacun des facteurs H, R, Z de $H \times R^\alpha \times Z^\beta$ et Π_H, Π_{R_i} Π_{Z_i} les projections correspondantes, il vient :

$$\begin{aligned} \lambda\ (C_n) &\leqslant \lambda\ \left(\sum_{i=1}^{n} (C + C_o)\right) \\ &\leqslant \prod_{j \in J} \lambda_j \left[\Pi_j \left(\sum_{i=1}^{n} (C + C_o)\right)\right] \\ &\leqslant \lambda_H\ (H)\ n^{\alpha+\beta} \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq H}} \lambda_j\ (\Pi_j\ (C + C_o)) \end{aligned}$$

et il existe une constante B telle que $\lambda\ (C_n) \leqslant B\ n^{\alpha+\beta}$

Nous obtenons donc la majoration

$$a_n^{K_o}(f) \leqslant A\ B^{1/2}\ n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\ s^n\ (K_o) + \varepsilon$$

Comme $s\ (K_o) < 1$, nous en déduisons .

$$\overline{\lim}\ a_n^{K_o}(f) \leqslant \varepsilon$$

et par le lemme 4

$$\overline{\lim}\ a_n\ (f) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0$$

et donc $\overline{\lim}\ a_n\ (f) = 0.$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HEWITT E. and ROSS K.A.

Abstract harmonic analysis, vol I (Springer Verlag) (1963)

[2] RUDIN W.

Fourier analysis on groups (Interscience publishers) (1967)

[3] STAM A.J.

On shifting iterated convolutions I

Compositio M. 17 - 1967 (p. 268-280)