
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Philosophie mathématique. Préliminaires d'un cours
de mathématiques pures**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 305-326

[<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__305_0>](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__305_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1830-1831, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Préliminaires d'un cours de Mathématiques pures ;

Par M. GERGONNE.

~~~~~

### PREMIÈRE LEÇON.

#### *Objet des sciences mathématiques.*

LES êtres divers qui vivent sur notre terre naissent généralement pourvus de toutes les facultés et doués de toute l'intelligence qui leur sont nécessaires pour se conserver , pourvoir à leurs besoins divers et rendre leur existence aussi heureuse que le comporte leur nature. Un même jour voit le papillon déchirer sa chrysalide , déployer ses ailes brillantes et butiner le nectar des fleurs de nos parterres. Le cailloteau , traînant encore après lui les débris de la coque où l'instant d'auparavant il était retenu captif , démêle aussitôt , parmi des graines diverses , celle qui peut le mieux lui servir d'aliment. Le faon , à peine échappé des flancs de la biche , bondit avec grâce dans nos prés. L'homme seul a besoin de tout apprendre ; ses premiers accens sont des cris de douleur , et l'époque de son entrée dans la vie en marquerait infailliblement le terme , si des soins les plus assidus ne venaient , durant un temps plus ou moins long , au secours de sa débilité. Il naît avec des yeux ; mais il ne sait d'abord ni les tourner vers les objets qu'il est intéressé à connaître , ni leur faire prendre la

configuration propre à leur faire apercevoir ces objets d'une manière distincte. Il est pourvu de bras mobiles dont les extrémités sont ingénieusement articulées ; mais ce n'est qu'après des essais multipliés et long-temps infructueux , qu'il parvient à les diriger sûrement vers ce qu'il veut saisir , et , du moment qu'il a atteint le terme de cet apprentissage , une surveillance de tous les instans devient nécessaire pour soustraire à sa vue , pour écarter de sa main , tout ce qui pourrait le blesser , tout ce dont il voudrait imprudemment faire sa nourriture. Ses extrémités inférieures sont destinées à soutenir le poids de son corps , à le transporter vers les objets auxquels son bras ne saurait atteindre , et à le soustraire , par la fuite , aux dangers divers qui pourraient le menacer ; mais combien ne lui faudra-t-il pas de temps pour apprendre à se tenir ferme sur ses pieds ? et combien de chutes douloureuses n'aura-t-il pas à essayer avant de savoir marcher et courir ? Plus tard , et plus péniblement encore , il étudiera les sons vocaux et les caractères visuels à l'aide desquels les intelligences communiquent entre elles ; il apprendra à produire lui-même ces sons et ces caractères , et alors seulement il méritera de prendre rang dans la société et de compter pour quelque chose au milieu de ses semblables.

Peut-être aurions-nous tort de nous plaindre d'avoir été traités par la nature d'une manière si peu libérale. Si des hommes qui ont fait une étude spéciale des mœurs des diverses classes d'êtres qui vivent sur notre terre , voulaient prendre la peine d'en faire un examen comparatif , peut-être trouveraient-ils finalement que , toutes choses égales d'ailleurs , les plus industrieux et les plus intelligens d'entre eux , sont ceux-là même dont l'éducation est la plus lente. Si , en effet , la nature avait pris soin de nous garantir contre la rigueur des frimats et les ardeurs de la canicule ; si elle avait placé partout à notre portée des alimens immédiatement propres à notre subsistance ; si elle ne nous avait point environnés d'animaux hostiles , ou si du moins elle nous avait armés

de défenses suffisantes contre leurs attaques ; si , dès notre entrée dans la vie , nous avons pu nous passer de l'assistance des auteurs de nos jours ; si , en un mot , la nature avait tout fait pour nous , peut-être n'aurions-nous pas songé à rien ajouter aux avantages dont elle nous aurait doués ; peut-être l'art social serait-il encore à naître ; et notre vie , assez semblable à celle des plantes , n'offrirait sans doute d'autre spectacle que celui d'une continuelle et monotone répétition des mêmes actes. C'est donc précisément , peut-être , par cela même que la nature nous a traités d'une manière si sévère que nous sommes parvenus à nous l'assujétir et à nous en rendre les suprêmes dominateurs.

Si c'était ici le lieu d'expliquer comment , malgré l'excessive inégalité d'intelligence qui se fait remarquer entre eux , dans un âge plus avancé , tous les hommes néanmoins réussissent à peu près également bien dans le premier apprentissage de la vie sociale , je ferais d'abord observer qu'il ne s'agit uniquement là que de connaissances qui touchent essentiellement à notre conservation et à notre bien-être de tous les instans , et qu'on apprend toujours très-bien et très-vîte ce qu'on est fortement intéressé à bien savoir. Je ferais observer , en second lieu , qu'excepté peut-être les heures du sommeil , la vie d'un enfant en bas âge est un apprentissage continuel ; et qu'on ne saurait manquer de savoir bientôt ce dont on fait une étude de tous les instans. Je ferais observer enfin que l'enfant en bas âge étudie sans maître , qu'aucune tâche ne lui est imposée , qu'aucune gêne ne lui est prescrite , ni pour le choix des sujets d'études ni pour la manière ni pour le temps ni pour le lieu ; que personne ne vient systématiquement , et à des heures fixes , détourner son attention d'un objet qui l'intéresse , pour la diriger forcément vers un autre qui alors lui offre moins d'attrait ; et que nous ne faisons rien de mieux que ce que nous faisons librement et en suivant notre pente naturelle. Je pourrais ensuite tirer de ces diverses remarques quelques conséquences pratiques , relatives à l'art d'en-

seigner, et apprécier ainsi, avec une équitable et impartiale sévérité, tant de méthodes d'enseignement prônées tour à tour d'une manière fastueuse, par la cupidité et le charlatanisme, et que le besoin Lien senti d'améliorations notables dans nos plans d'études a fait quelquefois accueillir par des âmes généreuses avec beaucoup trop de faveur.

Mais qu'il me suffise de noter ici qu'il est un fond commun de connaissances dont tous les hommes parviennent également à se mettre en possession, les plus ineptes comme les plus intelligens; que ce fond, à y regarder de près, est beaucoup plus riche qu'on n'est généralement porté à le supposer; et qu'à l'époque où le vulgaire se figure que l'éducation commence, l'enfant même qui passe pour le plus stupide sait déjà incomparablement plus de choses que ne pourra se promettre d'en apprendre le plus heureusement organisé, dans tout le cours d'une longue et laborieuse carrière.

Un besoin insatiable d'aliment et d'activité, que souvent l'esprit partage avec le corps, ou peut-être seulement le besoin d'un préservatif contre l'ennui qui naît de l'oisiveté, a déterminé des hommes, doués d'un esprit méditatif, à consacrer leurs loisirs à des réflexions, à des recherches spéciales sur certaines branches du savoir commun, dans la vue de les mieux étudier, d'y découvrir des rapports et des combinaisons inaperçus jusqu'à eux; et c'est à l'ensemble des résultats de leurs travaux qu'on a donné le nom de *sciences*; tandis qu'on a appelé *savans* les hommes qui, sans même avoir pris aucune part à la découverte de ces résultats, sont néanmoins parvenus à se les rendre familiers. Ce n'est qu'improprement qu'on applique quelquefois ce qualificatif aux inventeurs même des sciences.

Toute science donc, quel qu'en puisse être d'ailleurs l'objet, n'est, comme on le voit, que l'extension et le développement de quelque connaissance généralement familière à tous. Une science même ne saurait être vraiment digne de ce nom qu'autant qu'elle

se rattache à ces notions vulgaires , à ce fond commun de connaissances universellement répandues parmi les hommes ; et de là cette maxime qui , pour si triviale qu'elle puisse paraître , n'en est pas moins trop souvent négligée par ceux qui parlent ou qui écrivent dans la vue d'instruire les autres ; savoir : que *ce n'est qu'en parlant de ce que nous savons déjà qu'on peut espérer de nous conduire à ce que nous ne savons pas encore*. Découvrir des conséquences non encore aperçues de quelques vérités déjà admises , c'est *inventer* ou *perfectionner* une science ; faire apercevoir à autrui la filiation entre ces conséquences et les vérités auxquelles elles se rattachent , c'est *l'enseigner*. Les découvertes , dans quelque science que ce puisse être , sont l'apanage exclusif du génie qui crée et combine ; pour les étudier , au contraire , il suffit simplement du bon sens qui conçoit.

Les sciences peuvent différer les unes des autres ou par la diversité des objets auxquels elles se rapportent ou par les divers points de vue sous lesquels elles envisagent les mêmes objets ; et , lorsqu'on s'engage dans l'étude d'une science , le premier soin qu'il convient de prendre est de se former une idée bien précise de son étendue et de ses limites , afin de ne pas courir le double risque et d'en négliger des applications importantes ou d'en faire inconsidérément des applications déplacées. On peut demander plus encore , et , à raison des nombreux points de contact qu'ont entre elles les diverses branches du savoir et des secours qu'elles peuvent mutuellement se prêter , on peut désirer de savoir , en particulier , quelle est précisément la place qu'occupe la science qu'on se propose d'étudier dans le système général de nos connaissances. Livrons-nous donc à cet examen par rapport à la science qu'un homme célèbre , à toute autre titre , n'a pas hésité de proclamer la première de toutes.

Si quelqu'un , en nous présentant un homme fait et un enfant en bas âge , nous disait du premier que sa taille est exactement

double de celle du second , qu'il pèse neuf fois plus que lui et qu'il est onze fois plus âgé , il n'y aurait certainement rien , dans de telles assertions , qui dût nous surprendre , et nous concevrions très-aisément qu'on ait pu parvenir à assigner avec précision tous ces divers rapports. Mais si la même personne ajoutait que l'intelligence de l'homme fait , est exactement ou seulement à peu près quintuple de celle de l'enfant , nous nous récrierions aussitôt , et non sans raison , parce qu'en effet nous ne concevrions pas qu'on pût parvenir , à l'égard de telles qualités , à des comparaisons aussi rigoureuses.

Ce simple exemple suffit donc pour nous faire comprendre clairement que les objets de nos pensées peuvent être rangés en deux classes très-distinctes , dont l'une comprend tous les objets qui peuvent être exactement comparés à d'autres de même nature qu'eux , tandis que l'autre renferme tous ceux qui ne peuvent être que vaguement comparés à ceux de leur espèce. Dans la première classe , on peut ranger , par exemple , les nombres , le temps , l'étendue , soit en longueur , soit en surface , soit en volume ; dans la seconde se trouvent entre autres toutes les qualités morales et les facultés intellectuelles , tels que le génie , le courage , le désintéressement , etc.

Or , comme rien n'est plus propre à aider l'action de la pensée que d'affecter des dénominations spéciales aux objets qui se distinguent de tous les autres par des qualités qui leur sont exclusivement propres , nous convenons , pour l'avenir , de désigner sous la dénomination de *grandeurs* ou de *quantités* les objets de la première sorte , c'est-à-dire , *les objets que l'on conçoit être rigoureusement comparables à tous ceux de leur espèce* ; sur quoi nous devons nous hâter de faire remarquer que ces mots ne sont point pris ici sous leur acception vulgaire. Dans le langage ordinaire , en effet , le mot *grandeur* exprime l'état de ce qui est fort étendu ou fort élevé , soit au physique , soit au moral , et le mot *quantité* , équivalent du mot *multitude* , emporte avec lui l'idée de la

réunion d'un très-grand nombre d'objets ; tandis qu'ici , dans le sens particulier que nous attachons à ces deux mots , un objet unique , quelque minime qu'il puisse être d'ailleurs , sera réputé grandeur ou quantité , par cela seul qu'il sera rigoureusement comparable à d'autres objets d'une nature pareille à la sienne ; de sorte que , sous ce point de vue , les mots grandeur et quantité doivent être considérés comme tout à fait synonymes. Seulement le mot grandeur est employé de préférence dans le style élevé.

Il arrive assez fréquemment , dans la langue des sciences , de détourner ainsi les mots de leur acception commune , pour leur donner une signification plus ou moins différente de celle que la langue vulgaire a consacrée. C'est là , sans contredit , une chose très-fâcheuse , tant parce que , pendant un temps plus ou moins long , l'esprit éprouve une sorte de peine à séparer l'acception scientifique d'un mot , de son acception vulgaire , que parce qu'on se trouve quelquefois contraint de l'employer sous ses deux acceptions dans une même phrase , ce qui entraîne inévitablement de l'embarras dans le langage et de la confusion dans les idées , et ajoute ainsi , sans aucune nécessité ni compensation , aux difficultés que présente naturellement l'étude des sciences. Il vaudrait sans doute incomparablement mieux , en telles rencontres , créer des mots tout à fait nouveaux ; mais la répugnance du public pour ces sortes de créations , répugnance non moins invincible qu'elle est peu fondée , et qui nuit beaucoup à la netteté du langage , et par suite au développement de l'esprit humain , y oppose un obstacle insurmontable , et nous impose impérieusement la loi de parler ici comme tout le monde.

Il faut donc se tenir pour bien averti que , lorsqu'à l'avenir nous employerons le mot *grandeur* ou le mot *quantité* , ce sera comme l'équivalent de ceux-ci : *objet rigoureusement comparable aux autres objets de même nature que lui*. Lors donc que nous voudrions découvrir si un objet déterminé est ou n'est pas de la classe de ceux que nous nommons grandeurs ou quantités , nous n'au-

rons autre chose à faire que de concevoir un autre objet de même nature que celui-là, et de nous demander si nous trouverions raisonnable ou inepte que l'on prétendît assigner un rapport précis entre l'un et l'autre. Dans le premier cas, l'objet en question sera grandeur ou quantité ; dans le second, il ne le sera pas.

Ainsi, par exemple, nous jugeons que le poids d'un corps est une quantité ou grandeur, parce que nous trouverions tout naturel que quelqu'un, après l'avoir comparé au poids d'un autre corps, nous dit que cinq fois le premier fait précisément trois fois le second ; mais nous trouverions fort étrange, au contraire, que quelqu'un vînt nous affirmer sérieusement que sept fois le génie de Galilée fait exactement onze fois celui d'Huygens ; d'où nous devons conclure que le génie n'est point de ces objets que nous avons entendu comprendre sous la dénomination de grandeur ou de quantité.

Il est, au surplus, aisé de reconnaître, d'après cela, que l'art de découvrir parmi les objets de nos pensées, ceux auxquels on peut justement appliquer la dénomination de grandeur ou de quantité, se réduit finalement à l'art de discerner quels sont ceux dont on peut reconnaître l'égalité rigoureuse lorsqu'elle a lieu. Dire, en effet, d'une longueur qu'elle est les trois quarts d'une autre longueur, c'est dire, en d'autres termes, que quatre fois la première est égale à trois fois la seconde, ou encore que la troisième partie de la première est une longueur égale à la quatrième partie de la seconde.

Au moyen de cette remarque, l'art de démêler ce qui est grandeur ou quantité de ce qui ne l'est pas, se trouve réduit à la plus grande simplicité. Tout se réduit, en effet, à se demander de l'objet que l'on considère, si l'on conçoit ou non qu'il soit possible de reconnaître qu'un autre objet lui est rigoureusement égal. Ainsi, par exemple, la probabilité qu'un certain numéro sortira à un tirage déterminé de la loterie royale, est grandeur ou quantité, parce que l'on conçoit clairement que cette probabilité est rigou-

reusement égale à celle de la sortie de tout autre numéro au même tirage ou du même numéro à tout autre tirage ; mais le poids d'un témoignage , au contraire , ne saurait être réputé grandeur ou quantité , parce que l'on conçoit également bien qu'aucun homme sensé ne voudrait affirmer de deux témoignages , qu'ils sont rigoureusement du même poids.

Si nous examinons avec attention ce qui se passe journellement dans la société, nous aurons bientôt lieu de remarquer que les discussions et la dissidence des opinions ne s'y manifestent, ou du moins ne s'y prolongent que lorsque ces discussions et cette dissidence n'ont pas les grandeurs ou quantités pour objets. Disputet-on , en effet , sur la plus forte des sommes d'argent contenues dans deux sacs ? En les comptant l'une et l'autre , on mettra fin à la dispute. Est-ce sur la taille relative de deux individus qu'on se trouve n'être pas d'accord ? Il suffira , pour vider le différent , de les rapprocher l'un de l'autre. La contestation roule-t-elle enfin sur le rapport entre le poids de deux corps ou sur la durée de deux intervalles de temps ? La balance ou l'horloge deviendra l'arbitre entre les opinions opposées. Mais s'il s'agit , au contraire , de fixer les rangs entre deux productions littéraires ou entre deux actions vertueuses ou criminelles , à moins d'une différence très-apparente , on courra risque de disputer fort long-temps , sans jamais tomber parfaitement d'accord.

A y regarder de très-près , il n'y aurait peut-être proprement que les nombres qui méritassent la dénomination de grandeurs ou de quantités. Lorsqu'en effet nous prononcerons de deux longueurs qu'elles sont égales , il peut fort bien se faire qu'il existe entre elles une différence assez légère pour échapper à la vue et au tact ; et lorsque nous portons un pareil jugement sur le poids de deux corps ou sur la durée de deux intervalles de temps , il peut également se faire qu'il existe entre l'un et l'autre une inégalité assez petite pour ne donner aucune prise à l'action des balances les plus sensibles ou à celles des horloges les plus artis-

tement construites ; de sorte que , pour pouvoir comprendre toutes ces choses sous la dénomination commune de grandeur ou quantité , il faudrait peut-être appeler ainsi *tous les objets comparables à d'autres de même nature , sinon rigoureusement , du moins de telle sorte que l'erreur de la comparaison , si toutefois elle existe , se dérobe , par son extrême petitesse , à tous nos moyens de connaître*. Au surplus , on peut toujours supposer , en théorie , que les comparaisons sont tout à fait rigoureuses ; il arrivera seulement que , dans les applications pratiques , on n'obtiendra que des à peu près , d'autant moins différens d'ailleurs de l'exacte vérité que les moyens de comparaison auront été plus précis.

Dans tout ce qui précède nous avons constamment parlé de comparaison entre les objets de même nature , parce qu'en effet ce sont les seuls que l'on puisse raisonnablement se proposer de comparer les uns aux autres , attendu que ce sont les seuls susceptibles d'égalité. Les grandeurs ou quantités de même nature , telles , par exemple , qu'une longueur et une autre longueur , un intervalle de temps et un autre intervalle de temps , sont ce qu'on appelle des grandeurs ou quantités *homogènes* ; et on appelle , au contraire , grandeurs ou quantités *hétérogènes* celles qui sont de nature différentes ; telles , par exemple , qu'un temps et une longueur. Les grandeurs ou quantités homogènes sont donc les seules qu'on puisse se proposer de comparer les unes aux autres ; et demander , par exemple , quel est le plus grand d'une aune ou d'une heure , c'est faire une question tout à fait inepte qui ne mérite aucune sorte de réponse.

Ce sont les grandeurs ou quantités qui sont l'objet exclusif de toutes les sciences comprises sous la dénomination commune de *Mathématiques pures* ; et c'est uniquement comme susceptibles de comparaisons rigoureuses que ces sciences les envisagent. Ainsi , ces expressions : *science mathématiques , science des grandeurs , sciences des quantités , sciences des choses rigoureusement comparables à leurs homogènes* , sont des expressions tout à fait synony-

mes. On donne ensuite le nom de *mathématiques mixtes* à l'ensemble des applications diverses qui ont pu ou qui peuvent encore être faites à l'avenir, des mathématiques pures à toutes les autres branches des connaissances humaines.

Or, lorsqu'un même nom est ainsi susceptible de plusieurs déterminatifs, il est toujours permis, pourvu qu'on en prévienne, d'en sous entendre un quelconque, mais un seul; et le bon sens dit qu'il faut alors sous entendre, de préférence, le déterminatif dont l'emploi devrait être le plus fréquent, puisque, de la sorte, le langage en devient plus concis. Nous profiterons de cette remarque pour employer à l'avenir le mot *mathématiques*, comme l'équivalent des mots *mathématiques pures*; mais dès lors, toutes les fois que nous voudrions faire mention des applications des mathématiques aux autres sciences, nous serons obligés d'employer l'expression *mathématiques mixtes* tout au long et sans sous-entendu.

Bien que la géométrie ne soit qu'une simple branche des sciences mathématiques, et qu'on puisse même, en toute rigueur, sans l'avoir cultivée, être fort instruit dans ces sciences; par l'application de cette figure de rhétorique qui consiste à donner au tout le nom de la partie, ceux qui cultivent quelque branche que ce soit des mathématiques se traitent généralement entre eux de *géomètres*, et ne sont guère appelés *mathématiciens* que par les gens qui ne le sont pas (\*).

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes vus, à très-grand regret sans doute, contraints de nous écarter un peu des notions ou peut-être seulement de la langue que beaucoup d'écrivains, fort recommandables, ont cherché à faire prévaloir, et nous devons, avant d'aller plus loin, tenter de nous justifier de cette témérité,

---

(\*) Voy. *Annales*, tom. VIII, pag. 255.

et mettre le lecteur en situation de pouvoir prononcer équitablement entre eux et nous.

La plupart des auteurs d'élémens ont appelé *grandeurs* ou *quantités* toutes les choses susceptibles d'augmentation et de diminution, et ils en avaient incontestablement le droit, puisque les mots ne sont, au fond, que de vains sons, absolument insignifiants par eux-mêmes, et ne pouvant figurer utilement dans le langage qu'après avoir reçu une acception déterminée, par l'effet d'une convention tout à fait libre. Il arrivera seulement que, dans le sens de ces écrivains, tout ou presque tout pourra être qualifié grandeur ou quantité, puisqu'il n'est rien ou presque rien qui ne soit susceptible de plus ou de moins. Et ne peut-on pas être, en effet, plus ou moins éclairé, plus ou moins courageux, plus ou moins patient, plus ou moins magnanime, et ainsi du reste?

Les mêmes écrivains ont dit ensuite qu'on appelait *mathématiques* les sciences qui avaient les grandeurs ou quantités pour objet; et cela sans doute leur était encore permis. Il serait seulement résulté de leur définition des grandeurs ou quantités, que toutes les sciences auraient été des sciences mathématiques puisqu'il n'en est aucune qui ne traite de choses susceptibles de plus ou de moins. Toutefois, il n'en est aucun, sans doute, qui, interrogé si la morale ou la législation, la théologie ou la médecine étaient des sciences mathématiques, eût hésité le moins du monde à répondre que non; ce qui prouve que, dans leur définition des mathématiques, ils avaient tout à fait perdu de vue l'acception qu'ils avaient eux-mêmes donnée d'abord aux mots grandeur et quantité.

Il semblerait, au surplus, que cette contradiction, très-réelle à ce qu'il nous paraît, n'a pas échappé tout à fait à quelques-uns d'entre eux. On rencontre quelquefois, en effet, dans leurs écrits, l'expression *grandeur mathématique*, de laquelle on peut inférer qu'ils admettent des grandeurs qui ne sont pas mathématiques; mais alors n'auraient-ils pas dû distinguer soigneuse-

ment les grandeurs qu'ils appelaient mathématiques, de celles qu'ils ne réputaient pas être telles? Et ne se seraient-ils pas vus de la sorte ramenés forcément à la distinction qu'il nous a semblé nécessaire d'établir. En procédant, au contraire, comme nous l'avons fait, en prenant les mots pour ce que nous leur avons fait signifier, tout se trouve dans une harmonie parfaite; le mot *mathématiques* conserve son acception commune, et il devient toujours facile de distinguer nettement ce qui est du domaine des sciences mathématiques de ce qui leur est étranger. A la vérité, la signification des mots *grandeur* et *quantité* se trouve ainsi un peu plus restreinte; mais il y a à cela plus d'avantage que d'inconvénient; les mots ne devant figurer dans le langage que pour noter les différences entre les choses.

Par tout ce qui précède, on se trouve naturellement conduit à se demander si le domaine des sciences mathématiques est tellement circonscrit, si les limites en sont tellement invariables qu'il ne puisse recevoir à l'avenir de nouveaux accroissemens? Cette question revient évidemment à demander si la barrière qui sépare ce qui est réputé grandeur ou quantité de ce qui n'est pas reconnu pour tel, est tellement inébranlable qu'il devienne à jamais impossible de la porter plus avant; ce qui revient encore à demander si tels objets qui aujourd'hui ne nous semblent susceptibles que de comparaison vague, ne pourront pas, à une autre époque, être reconnus susceptibles de comparaison tout à fait rigoureuse? Or, soit que nous comparions l'état de l'homme encore sauvage à celui de l'homme civilisé, soit que nous comparions au siècle où nous vivons ceux qui l'ont précédé, tout semble concourir à nous montrer que le domaine des sciences mathématiques est de nature à s'accroître sans cesse, et nous avertir que nous ne pourrions sans témérité tenter d'en assigner la dernière limite.

Les voyageurs ont rencontré des peuplades sauvages qui, au-delà du nombre *trois*, n'ont plus qu'une idée confuse des nom-

bres et un nom commun pour les exprimer tous. Certainement de tels hommes ne concevraient pas que l'on pût affirmer, avec certitude, de deux tas de blé tant soit peu considérables, qu'ils contiennent exactement le même nombre de grains. Ils concevraient encore moins que l'on pût s'assurer exactement de l'égalité d'étendue de deux propriétés territoriales, de figure tant soit peu différente, comparer avec précision les temps nécessaires pour les ensemercer ou pour en recueillir les produits, et comparer aussi ces produits, sous le rapport de leur poids; d'où l'on est contraint de conclure que, pour des hommes aussi peu avancés dans la civilisation, les grands nombres, l'étendue en surface, le temps et le poids des corps ne sont point encore de ces choses que nous avons nommées grandeurs ou quantités.

Mais nous-même, il y a moins de deux siècles, n'aurions pas cru possible de comparer rigoureusement la probabilité d'un événement à celle d'un autre événement; nous n'aurions pas cru davantage que l'on pût jamais comparer, avec exactitude, les températures de deux localités éloignées, à une même époque, ou celle d'une même localité à des époques éloignées; d'où l'on doit conclure qu'alors ni les probabilités ni les températures n'étaient pour nous des grandeurs ou quantités. Un essai extrêmement remarquable de Maupertuis, sur le *Bonheur*, laisse même entrevoir qu'il pourrait n'être pas impossible de soumettre un jour les affections morales à des comparaisons rigoureuses; de sorte qu'il est vrai de dire que rien ne semble devoir limiter le champ des sciences mathématiques, et qu'il n'est guère possible de prévoir à quel degré d'étendue le temps et les travaux accumulés de ceux qui les cultivent pourront un jour le porter.

Parce que les sciences mathématiques n'ont pour objet que les choses susceptibles de comparaison rigoureuse, on les a appelées *sciences exactes*. Il est clair qu'elles seules méritent proprement cette dénomination; et voilà précisément ce qui leur assigne le premier rang entre les sciences, sous le point de vue de la certitude.

Dans tout ce qui précède nous avons eu soin d'accoler constamment l'un à l'autre les deux mots *grandeur* et *quantité*, afin d'accoutumer mieux le lecteur à les considérer comme de parfaits équivalens. Désormais nous nous dispenserons de ce soin, et nous ne ferons plus simplement usage que de l'un ou de l'autre seulement. Il est toutefois assez commode d'avoir à choisir entre eux, surtout dans la construction des phrases où l'on est contraint de les employer à la fois sous leur acception vulgaire et sous celle qu'il reçoivent en mathématiques. On évite de la sorte des locutions choquantes de la nature de celles-ci : *la grandeur d'une grandeur*, *une certaine quantité de quantités*, que l'on peut alors remplacer par celles-ci : *la grandeur d'une quantité*, *une certaine quantité de grandeurs*. Nous remarquerons aussi que, par cela même que le mot *grandeur* est réputé plus noble que le mot *quantité*, on dit plus volontiers, dans le style élevé, *la science des grandeurs* que *la science des quantités*.

## DEUXIÈME LEÇON.

*Nous ne connaissons que des rapports.*

Si, au moment présent, tous les objets matériels qui existent dans l'Univers, notre propre corps compris, devenaient tout à coup deux fois plus grands, dans tous les sens, et qu'il en fût de même des intervalles qui séparent actuellement ces corps les uns des autres, aurions-nous quelque moyen de nous apercevoir d'un changement aussi subit et aussi étrange ? On serait d'abord tenté de répondre affirmativement ; mais pour peu qu'on se donne la peine d'y réfléchir sérieusement, on s'assurera bientôt que la chose serait tout à fait impossible. On voit, en effet, que les objets qui se trouvaient d'abord à la hauteur de notre main s'y trouveraient encore, puisque eux et elle seraient également deux

fois plus élevés au-dessus du sol. Pareillement ceux que nous ne pouvions atteindre qu'en élevant ou en abaissant le bras, n'exigeraient pas de notre part, pour être saisis, un mouvement différent, puisque notre bras serait devenu exactement deux fois plus long. Et quant à ceux qui étaient d'abord hors de notre portée, nous n'aurions pas alors un plus grand nombre de pas à faire pour arriver à eux, puisqu'en même temps qu'ils seraient deux fois plus éloignés de nous, l'étendue de nos pas se trouverait doublée.

Des considérations tout à fait semblables prouvent que si, à l'inverse, tout l'Univers et les intervalles entre les corps dont il se compose devenaient tout à coup deux fois plus petits, nous serions également tout à fait dépourvus de moyens de la reconnaître.

C'est uniquement pour ne pas choquer d'une manière trop brusque les préjugés que le lecteur pourrait s'être fait sur ce sujet, que nous avons cru devoir nous arrêter d'abord à une supposition aussi modeste. Il est évident, en effet, que ce que nous venons de dire du cas où l'Univers deviendrait tout à coup deux fois plus grand ou deux fois plus petit, nous pouvons le dire, à tout aussi bon droit, du cas où ce même Univers deviendrait subitement dix, cent, mille, un million, mille millions de fois plus grand ou plus petit; et pour peu qu'on y songe bien, on ne tardera guère à demeurer convaincu qu'un changement si énorme en apparence, demeurerait tout à fait inaperçu. Si donc quelqu'un affirmait que d'instant en instant l'Univers entier devient alternativement mille millions de fois plus grand et mille millions de fois plus petit, il nous serait tout aussi impossible de lui prouver qu'il se trompe, qu'il le serait à lui de nous prouver qu'il dit vrai; de sorte que, quelque peu probable que la chose puisse paraître, il y aurait de la témérité à affirmer qu'il n'en est pas ainsi.

Quelle réponse raisonnable peut-on donc faire à cette question: Quelle est la grandeur des hommes, des animaux, des arbres, de la terre, des astres? Aucune absolument; car, sans que nous

nous en doutassions , cette grandeur pourrait varier d'instant à autre , auquel cas la réponse devrait varier , suivant l'époque à laquelle on la ferait , sans qu'on pût d'ailleurs savoir quelle elle devrait être à quelque époque déterminée que ce fût.

Mais au milieu de tous ces changemens , sinon réels du moins possibles , il reste pourtant quelque chose d'invariable , et ce sont les rapports de grandeur des différentes dimensions des corps , comparés les uns aux autres. Tant que ces rapports subsistent , les changemens absolus demeurent tout à fait inaperçus ; de manière que ces mêmes rapports sont les seules choses perceptibles pour nos sens et pour notre intelligence ; tandis que la grandeur absolue des corps et des intervalles qui les séparent nous resteront à tout jamais inconnus.

Tout n'est pas fiction , au surplus , dans ce que nous avons admis tout à l'heure comme une simple hypothèse , et , si la chose n'était complètement inutile , nous pourrions invoquer ici le témoignage de l'expérience. Il est prouvé , par exemple , que ceux qu'on appelle myopes voient les objets plus grands , et que ceux qu'on appelle presbytes les voient , au contraire , plus petits qu'ils ne le paraissent aux vues ordinaires ; et cependant les uns et les autres en portent exactement les mêmes jugemens , parce que ces jugemens ne portent uniquement que sur des rapports , et que ces rapports sont exactement les mêmes pour tous les êtres doués du sens de la vue. Il est également prouvé que l'action de la chaleur augmente les dimensions de tous les corps , tandis que l'action du froid les diminue ; mais ce phénomène n'aurait jamais été découvert , si le chaud et le froid agissaient également sur tous les corps. C'est parce que leur action varie d'une substance à l'autre , c'est parce qu'elle change les rapports de grandeur que nous avons pu en être informés ; mais aussi n'avons-nous pu saisir que les différences , et il faut nous résigner à ignorer à jamais les changemens que l'action du chaud et celle du froid peuvent opérer dans le volume absolu des corps.

Ce que nous venons de dire de l'étendue peut également s'appliquer à toutes les autres sortes de grandeurs, à la durée, par exemple. Si, en effet, tous les mouvemens, et par suite tous les changemens qui s'exécutent dans l'Univers, devenaient tout à coup un million de fois plus rapides; pourvu qu'en même temps nos pensées se succédassent dans notre esprit un million de fois plus vite; bien que la durée de notre vie s'en trouvât singulièrement abrégée, nous ne songerions pas même à nous en plaindre, attendu que nous n'aurions absolument aucun moyen de nous en apercevoir. Cette durée pourrait, à l'inverse, devenir un million de fois plus longue, sans que nous nous en aperçussions davantage, pourvu que tous les mouvemens qui s'exécutent dans l'Univers et la succession de nos pensées vinssent à se ralentir suivant la même loi.

Et ici encore nous pouvons invoquer le témoignage de notre propre expérience. Chacun sait, en effet, que, dans l'absence de tout moyen extérieur de mesurer le temps, nous jugeons fort mal de sa durée, et qu'un même intervalle de temps nous paraît tantôt plus court et tantôt plus long, suivant la disposition d'esprit dans laquelle nous nous trouvons.

Demander donc si un jour est un intervalle de temps bien considérable, est une question tout aussi insoluble que celle qui consiste à demander si une lieue est bien longue. On peut donc dire, avec vérité, que rien n'est proprement ni grand ni petit, et que ces mots *grand* et *petit*, que nous avons sans cesse dans la bouche, n'expriment que des rapports. Le ciron, par exemple, est bien petit par rapport à l'homme; mais qu'est-ce que l'homme, par rapport à une montagne tant soit peu élevée? Qu'est-ce que cette montagne par rapport à la terre? Qu'est-ce que la terre, à son tour, par rapport à notre système solaire? Et qu'est-ce enfin que ce système par rapport à la vaste étendue des cieux?

Il est donc rigoureusement vrai de dire que tout ce qui existe dans la nature se trouve placé entre deux infinis, l'un en grandeur

et l'autre en petitesse, sans qu'il soit possible d'assigner, en particulier, le rang d'aucun des anneaux de cette chaîne sans limites. Si donc quelqu'un venait nous annoncer que l'un des globules du sang de quelque animal que sa petitesse dérobe au meilleur microscope, renferme un Univers tout pareil au nôtre, ou bien encore que tout l'Univers visible fait partie de l'un des globules du sang de quelque animal, à peine visible pour d'autres êtres qui nous sont inconnus, non seulement nous devrions bien nous garder de le nier, mais nous ferions même preuve de bien peu de jugement si, après y avoir mûrement réfléchi, nous en témoignons la moindre surprise.

Si quelqu'un nous reprochait d'insister sur ce sujet, beaucoup plus qu'il ne semble nécessaire, nous lui répondrions qu'il ignore apparemment combien sont peu nombreux les esprits dans lesquels les idées que nous venons d'émettre ont jeté des racines tant soit peu profondes. Que si, au contraire, d'autres pouvaient ne voir dans tout ceci que des exagérations, des hyperboles telles qu'en emploient quelquefois les rhéteurs et les moralistes, dans la vue de remuer fortement les imaginations, nous lui conseillerions de s'arrêter ici et de ne pas poursuivre plus loin l'étude d'une science qui repose tout entière sur les principes que nous venons de développer.

Voilà qu'à peine engagé dans l'étude des sciences exactes nous nous trouvons amenés à des considérations philosophiques d'un ordre extrêmement élevé, et tel doit être, en effet, le résultat naturel des études bien conduites. Désormais, par exemple, nous laisserons le vulgaire s'extasier tant qu'il lui plaira à la vue de l'organisation compliquée et délicate des animaux microscopiques, en nous disant bien que, si l'organisation d'un animal est une chose tout à fait digne d'admiration, il importe fort peu d'ailleurs que cet animal soit éléphant ou ciron; et que, dans l'espace même que nous jugeons le plus petit, il y a toujours beaucoup plus de place qu'il n'en faut pour y concevoir tout ce qu'il plaira à notre imagination d'y supposer.

On a vu souvent opposer aux idées de Ptolémée sur l'arrangement des corps célestes , et à celles de Newton sur la nature de la lumière , la prodigieuse vitesse qu'il fallait attribuer aux étoiles dans le système de l'astronome grec et aux molécules lumineuses dans celui du géomètre anglais. Certes , il est loin de ma pensée de vouloir ici prendre la défense du système de Ptolémée , ni même de me prononcer sur celui de Newton ; mais ce n'est certes pas par ce côté qu'ils pourraient être vulnérables. Il n'est , en effet , aucune vitesse qui puisse raisonnablement être dite prodigieuse , parce qu'il n'en est aucune qui soit tellement grande qu'on n'en puisse concevoir une autre incomparablement plus grande encore.

Nous nous plaignons souvent de la brièveté de notre vie. La vérité est pourtant que la vie humaine n'est , à proprement parler , ni longue ni courte. L'insecte éphémère qu'un même jour voit naître et mourir , peut , dans la courte durée de son existence , éprouver la même somme de sensations , d'idées et de jouissances qu'en éprouve la carpe et le perroquet , dans une carrière de plus d'un siècle. La vie est toujours trop longue quand on l'emploie mal ; elle est toujours trop courte quand on en fait un bon usage.

Nous parlons sans cesse de l'expérience des siècles , et nous nous appuyons des cinq à six mille ans de guerres , de révolutions et de désastres de tous genres dont nous possédons les chroniques , pour désespérer de toute amélioration sociale. Mais qu'est-ce , au fond , que cinquante ou soixante siècles , que serait-ce même qu'un million de siècles comparé à la durée possible des choses ? Au lieu de dire , avec quelques hommes moroses , que le genre humain touche à l'époque de sa décrépitude , ne serait-on pas tout aussi fondé à penser qu'à peine débarrassé des langes de la première enfance , il est appelé , peut-être , à des destinées que l'imagination la plus brillante et la plus féconde pourrait à peine concevoir : et , peut-être pour peut-être , ne doit on pas préférer celui qui encourage à celui qui afflige ?

Il est donc tout à fait hors de doute que nos pensées et nos raisonnemens n'ont pas et ne sauraient même jamais avoir pour objet les grandeurs elles-mêmes , mais seulement les rapports que nous remarquons entre celles qui sont comparables. A la vérité nous semblons quelquefois employer les mots *grand* et *petit* dans un sens tout à fait absolu ; mais , en y regardant de plus près , nous ne tarderons pas de nous convaincre qu'alors il y a toujours quelque comparaison sous-entendue. Ainsi , par exemple , lorsque nous disons d'un arbre qu'il est grand ou petit , nous le comparons implicitement à la moyenne stature des arbres , au-dessus ou au-dessous de laquelle nous entendons exprimer qu'il se trouve ; et nous ne pouvons nous exprimer ainsi que parce que la hauteur des arbres a deux limites extrêmes , qui même ne se trouvent pas fort distantes l'une de l'autre ; mais il ne saurait plus en être ainsi à l'égard d'objets dont la grandeur ou la petitesse n'ont point de limites nécessaires ; et celui qui , par exemple , demanderait qu'on lui tracât une ligne droite ou un cercle de grandeur ordinaire ferait une question dont l'ineptie serait manifeste pour tout le monde.

De cela même que nous ne connaissons des grandeurs que les rapports qui existent entre elles , c'est aussi tout ce qu'il nous est possible d'en faire connaître à autrui. Envain tenterait-on de torturer la langue , d'y introduire des mots ou des tours nouveaux , jamais on ne parviendrait à lui faire exprimer une grandeur , indépendamment de quelque autre grandeur de sa nature. A la vérité , nous autres habitans de la terre , nous pouvons parvenir à nous entendre assez bien , sur les longueurs et sur les poids , en les comparant à la taille et au poids moyen d'un homme , ou aux dimensions et au poids de quelque production naturelle ; et nous nous entendons également bien sur les temps , en les comparant soit à la durée moyenne de notre vie , soit à celle des diverses révolutions célestes. Mais supposons que nous ayons à donner à un habitant d'un autre Univers dont nous ignorerions tout

à fait la structure , et qui ignorerait également lui-même comment les choses sont constituées ici bas , une idée de la longueur d'une aune , du poids d'une livre , de la durée d'un jour , et nous reconnaitrons bientôt que cela nous serait tout à fait impossible , parce que ces choses nous sont absolument inconnues à nous-même (\*).

---

---

(\*) Dans cet essai , écrit fort à la hâte , je puis bien n'avoir pas dit tout ce qu'il fallait dire , et ce que j'ai dit je ne l'ai certainement pas aussi bien dit qu'il pourrait l'être. Mais , si je ne me fais pas illusion , je crois n'avoir rien dit d'inutile. Cependant , combien de gens qui enseignent les mathématiques depuis longues années , et passent même pour les bien enseigner , qui n'ont jamais songé à toutes ces choses et ne se sont jamais avisés , à plus forte raison , d'y faire songer leurs auditeurs. A leurs yeux , des définitions , des théorèmes et des problèmes constituent seuls toute la science.