ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Analyse élémentaire. Résolution de quelques cas de l'équation à deux termes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 101-116
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__101_0>

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

Résolution de quelques cas de l'équation à deux termes ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

1. On a appelé *équation à deux termes* toute équation à une inconnue qui ne renferme qu'une seule puissance de cette inconnue, et dont la forme générale est conséquemment

$$Ay^m+B=0\ ,$$

où il est permis de supposer les nombres A et B entiers et le premier positif, tandis que le second peut être indistinctement positif ou négatif (*).

(*) Les équations à deux termes ont leurs analogues dans les problèmes à plusieurs inconnues ; ce que les auteurs d'élémens ne devraient pas, ce nous semble, négliger de faire remarquer. On peut avoir, par exemple, entre x et y, les deux équations

$$ax^m+by^n+c=0\ ,\qquad a'x^m+b'y^n+c'=0\ ;$$

lesquelles, par l'élimination de y^n, donnent l'équation à deux termes en x

$$(ab'-ba')x^m-(bc'-cb')=0\ .$$

J. D. G.

2. Si l'on fait $\frac{B}{A}=\mp P$, de manière que P représente constamment un nombre positif, et si p est la racine $m.^{ieme}$ arithmétique de ce nombre, l'équation prendra la forme

$$y^m\mp p^m=0 \ .$$

Posant alors $y=px$, substituant et divisant par p^m, on aura

$$x^m\mp 1=0 \ .$$

Équation qui répond au problème où il s'agirait d'extraire la racine $m.^{ieme}$ de ± 1; de sorte que l'extraction de la racine $m.^{ieme}$ de quelque nombre que ce soit, et par suite la résolution de toute équation à deux termes, se réduit toujours finalement à extraire une racine arithmétique d'un nombre positif, et à multiplier tour à tour cette racine par toutes les valeurs de la racine $m.^{ieme}$ de ∓ 1.

3. On sait, par la théorie générale des équations, que ces racines, au nombre de m, sont toutes inégales. On sait même, depuis long-temps, les exprimer, sous forme finie, par des fonctions circulaires; et cette manière de les représenter prouve, quand bien même on ne le saurait pas d'ailleurs, que, lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent être rangées par couples, comprises dans la formule $a\pm b\sqrt{-1}$, où a et b sont des quantités réelles. Dans des temps plus voisins de nous, Lagrange, mettant à profit les savantes théories de M. Gauss, a prouvé (*Résolut. des équat. numériques*, 2.^{me} édit., note XIV) que ces mêmes racines étaient toujours exprimables algébriquement sous forme finie. Tout ce que nous nous proposons ici est simplement d'indiquer des procédés élémentaires et uniformes pour obtenir les expressions de ces racines, dans les cas les plus aisés à traiter. Mais rappelons d'abord quelques principes généraux propres à nous guider sûrement dans cette recherche.

4. Lorsque m est un nombre impair, les racines des deux équations

$$x^m-1=0\ ,\qquad x^m+1=0\ ,$$

ne diffèrent uniquement les unes des autres que par le signe: car alors on peut passer d'une équation à l'autre, en changeant simplement x en $-x$.

Si m est un nombre impairement pair, les racines de l'une de de ces équations ne seront que les racines de l'autre multipliées par $\sqrt{-1}$; car alors on passera d'une équation à l'autre par le simple changement de x en $x\sqrt{-1}$.

Si m est un nombre pair de la forme $4(2n+1)$, les racines de l'une des équations ne différeront de celles de l'autre que par le facteur $\sqrt[4]{-1}$: car alors le passage d'une équation à l'autre pourra s'opérer par le simple changement de x en $x\sqrt[4]{-1}$.

Généralement, si m est un nombre pair de la forme

$$2^k(2n+1)\ ,$$

les racines de la seconde équation se déduiront de celles de la première, en multipliant celles-ci par $\sqrt[2^k]{-1}$: car alors la première équation devient la seconde en y changeant simplement x en $x\sqrt[2^k]{-1}$.

Le premier pas à faire dans la recherche qui nous occupe est donc de savoir d'abord ce que valent les multiplicateurs successifs

$$-1\ ,\quad \sqrt{-1}\ ,\quad \sqrt[4]{-1}\ ,\quad \sqrt[8]{-1}\ ,\quad \sqrt[16]{-1}\ ,\quad \ldots\ldots\quad \sqrt[2^k]{-1}\ ,\quad \ldots.$$

Pour y parvenir, remarquons d'abord que chacun d'eux étant la racine quarrée du précédent, tout se réduit à savoir passer de $\sqrt[2^k]{-1}$ à $\sqrt[2^{k+1}]{-1}$.

Supposons donc qu'on ait trouvé

$$\sqrt[2^k]{-1}=a+b\sqrt{-1}\ ;$$

a et b étant deux quantités réelles, on aura

$$\sqrt[2^{k+1}]{-1}=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\ ;$$

Posons donc

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}\ ;$$

d'où, en quarrant,

$$a+b\sqrt{-1}=(x^2-y^2)+2xy\sqrt{-1}\ ;$$

ce qui donnera, en égalant séparément le réel et l'imaginaire,

$$x^2-y^2=a\ ,\qquad 2xy=b\ ;$$

en extrayant la racine quarrée de la somme des quarrés de ces deux équations, on aura

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\ ;$$

cela donnera

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}\ ,\qquad 2y^2=a-\sqrt{a^2+b^2}\ ;$$

et conséquemment

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}\ ,\qquad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(a-\sqrt{a^2+b^2})}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\sqrt[2^{k+1}]{-1}=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right\}\sqrt{2}\ ;$$

au moyen de cette formule générale, et en observant que, pour le premier terme de notre série de racines, on a $a=-1$ et $b=0$, tandis que, pour le second, on a $a=0$ et $b=1$, on trouvera successivement

$$\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\ ;$$

$$\sqrt[4]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$\sqrt[8]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$\sqrt[16]{-1}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

au moyen de ces résultats, nous n'avons plus à nous occuper que de la recherche des racines de l'équation

$$x^m-1=0\ .$$

5. Si α est une racine de cette équation α^p en sera une aussi ; quel que soit le nombre entier positif p. En effet, à cause que α est racine

$$\alpha^m=1\ ,\quad \text{d'où}\quad \alpha^{mp}=(\alpha^p)^m=1\quad \text{et}\quad (\alpha^p)^m-1=0\ ;$$

ce qui prouve la proposition annoncée.

Si, de plus, m est un nombre premier, et que α soit différent de l'unité, la totalité des racines de la proposée sera

$$\alpha\ ,\quad \alpha^2\ ,\quad \alpha^3\ ,\quad \alpha^4\ ,\quad \ldots\ldots\ldots\ \alpha^m\ .$$

En effet, d'abord, par ce qui précède, chaque terme de cette suite sera une racine de l'équation dont il s'agit ; en outre elle ne pourra renfermer deux termes égaux ; car si, par exemple, on pouvait avoir $\alpha^p=\alpha^q$, avec $q<p$ et $p<m$, il en résulterait $\alpha^{p-q}=1$, avec la condition $p-q<m$, et, comme on a aussi $\alpha^m=1$, il s'ensuivrait que les équations

$$x^m-1=0\ , \qquad x^{p-q}-1=0\ ,$$

devrait avoir une racine commune, autre que l'unité, et conséquemment un facteur commun différent de $x-1$, ce qui est impossible, lorsque m est premier et qu'on a $p-q<m$.

6. Si m est le produit de deux facteurs premiers a et b et que α et β soient respectivement des racines des équations

$$x^a-1=0\ , \qquad x^b-1=0\ ,$$

différentes de l'unité; les racines de l'équation $x^m-1=0$ seront tous les termes du produit

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots+\alpha^{a-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^{b-1})\ .$$

En effet, d'abord, ces termes seront au nombre de $ab=m$; en second lieu, ils seront tous inégaux; enfin un quelconque des termes de ce produit étant de la forme $\alpha^p\beta^q$; comme on a (5)

$$(\alpha^p)^a=\alpha^{pa}=1\ , \quad (\beta^q)^b=\beta^{qb}=1\ ,$$

on aura aussi

$$\alpha^{pab}=1\ , \qquad \beta^{qab}=1\ ;$$

d'où, en multipliant,

$$\alpha^{pab}.\beta^{qab}=(\alpha^p.\beta^q)^{ab}=(\alpha.^p\beta^q)^m=1\ ;$$

ce qui prouve que $\alpha^p.\beta^q$ est racine de l'équation.

En raisonnant de la même manière il sera facile de prouver que, généralement, si l'on a $m=a.b.c.\ldots.$, a, b, c, ... étant des nombres premiers tous différens les uns des autres, et que α, β, γ, ... soient respectivement des racines des équations

$$x^a-1=0\ , \quad x^b-1=0\ , \quad x^c-1=0\ , \ldots\ldots$$

différentes de l'unité, les racines de la proposée seront les termes du produit

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{a-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{b-1})(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{c-1})\ldots$$

7. Ces choses ainsi entendues, soit d'abord $m=1$; les équations à résoudre seront

$$x-1=0\ , \qquad x+1=0\ ;$$

lesquelles donnent immédiatement

$$x=+1\ , \qquad x=-1\ .$$

8. Soit, en second lieu, $m=2$; les équations à résoudre seront

$$x^2-1=0\ , \qquad x^2+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x-1)(x+1)=0\ ;$$

qui donne (7)

$$x=+1\ , \qquad x=-1\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\sqrt{-1}\ , \qquad x=-\sqrt{-1}\ .$$

9. Soit ensuite $m=3$; les équations à résoudre seront

$$x^3-1=0\ , \qquad x^3+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x-1)(x^2+x+1)=0\ ;$$

et donne conséquemment

$$x=+1\ ,\qquad x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=-1\ ,\qquad x=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

10. Soit $m=4$; les équations à résoudre seront

$$x^4-1=0\ ,\qquad x^4+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^2-1)(x^2+1)=0\ ;$$

et donne (8)

$$x=\pm1\ ,\qquad x=\pm\sqrt{-1}\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;$$

11. Soit $m=5$; les équations à résoudre seront

$$x^5-1=0\ ,\qquad x^5+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0\ ;$$

qui donne d'abord la racine $+1$, tandis que ses quatre autres racines sont données par une équation réciproque qui peut être écrite ainsi

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0\ ;$$

posant alors

$$x+\frac{1}{x}=y\,, \quad \text{d'où} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\;;$$

il viendra, en substituant,

$$y^2+y-1=0\,,$$

d'où on tirera

$$y-2=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\,, \qquad y+2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\,,$$

et par suite

$$y^2-4=(y-2)(y+2)=\frac{-5\mp\sqrt{5}}{2}\;;$$

mais l'équation de relation entre x et y donne

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}\;;$$

en substituant donc pour y et y^2-4 leurs valeurs, on trouvera finalement, pour les cinq racines de la proposée,

$$x=+1\,, \qquad \begin{aligned} x&=\tfrac{1}{4}\{(-1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\,, \\ x&=\tfrac{1}{4}\{(-1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\;; \end{aligned}$$

les cinq racines de l'autre équation seront donc (4)

$$x=-1\,, \qquad \begin{aligned} x&=\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\,, \\ x&=\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\}\,. \end{aligned}$$

12. Soit $m=6$; les équations à résoudre seront

$$x^6-1=0\,, \qquad x^6+1=0\;;$$

la première revient à

$$(x^3-1)(x^3+1)=0\ ,$$

et donne (9)

$$x=\pm 1\ ,\qquad \begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;\\ x&=\tfrac{1}{2}(+1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;\end{aligned}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\qquad \begin{aligned} x&=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ;\\ x&=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ .\end{aligned}$$

13. Dans le dessein où nous sommes de ne considérer que les formules qui ne contiennent pas de radicaux des degrés supérieurs au second, nous passerons de suite à la supposition de $m=8$; les équations à résoudre seront ainsi

$$x^8-1=0\ ,\qquad x^8+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^4-1)(x^4+1)=0\ ,$$

et donne (10) pour ses racines

$$\begin{aligned} x&=\pm 1\ , &\qquad x&=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;\\ x&=\pm\sqrt{-1}\ , &\qquad x&=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ;\end{aligned}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ .$$

14. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous passerons de suite à la supposition $m=10$; les équations à résoudre seront ainsi

$$x^{10}-1=0\ ,\qquad x^{10}+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^5-1)(x^5+1)=0\ ;$$

et donne (11) pour ses racines

$$x=\pm 1\ ,\quad \begin{cases} x=+\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ , \\ x=+\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\ ; \end{cases}$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\quad \begin{cases} x=+\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\pm(1-\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ ; \\ x=-\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\pm(1-\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ , \\ x=+\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\pm(1+\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ , \\ x=-\tfrac{1}{4}\{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\pm(1+\sqrt{5}).\sqrt{-1}\}\ . \end{cases}$$

15. Soit $m=12$; les équations à résoudre seront

$$x^{12}-1=0\ , \qquad x^{12}+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^6-1)(x^6+1)=0\ ,$$

donc les racines sont (12)

$$x=\pm 1\ , \qquad x=+\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=\pm\sqrt{-1}\ , \qquad x=-\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})\ ;$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ , \qquad x=-\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ , \qquad x=+\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\pm(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{-1}\}\ .$$

16. Soit $m=15$; les équations à résoudre seront

$$x^{15}-1=0\ , \qquad x^{15}+1=0\ .$$

Les racines de la première s'obtiendront (6) en multipliant deux à deux, de toutes les manières possibles, les racines des deux équations

$$x^3-1=0\ , \qquad x^5-1=0\ ,$$

ce qui donnera (9) et (11),

$$x=1\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=-\tfrac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1+\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})}]\pm[(1+\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{2(5-\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1+\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}]\pm[(1+\sqrt{5})\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1-\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}]\pm[(1-\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\ ,$$

$$x=\tfrac{1}{8}\{[1-\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}]\pm[(1-\sqrt{5})\sqrt{3}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}]\sqrt{-1}\}\ .$$

Quant aux racines de l'autre équation, comme elles ne diffèrent (4) de celles-ci que par le signe, nous nous dispenserons de les écrire.

17. Soit encore $m=16$; les équations à résoudre seront

$$x^{16}-1=0\ ,\qquad x^{16}+1=0\ ;$$

la première revient à

$$(x^8-1)(x^8+1)=0\ ;$$

dont les racines sont (13)

$$x=\pm1\ ,\qquad x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

$$x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=+\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ;$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}.\sqrt{-1})\ ,\qquad x=-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{-1})\ ,$$

les racines de l'autre seront donc (4)

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right),$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

18. Lorsque $m=17$, les racines sont encore exprimables par des radicaux du second degré ; mais les moyens de les obtenir, dans ce cas, sortent tout à fait des élémens, et tout ce qu'on peut faire alors en s'y renfermant, est de faire dépendre la recherche de ces racines de la résolution d'une équation complète du huitième degré. Il serait fort désirable que l'on découvrît quelque procédé bien simple et bien uniforme pour résoudre toutes les équations à deux termes dans lesquelles l'exposant de l'inconnue est un quelconque des nombres de la série

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 17,\quad 257,\quad 65537,\quad \ldots\ldots;$$

c'est-à-dire un des nombres de la série

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2^2,\quad 1+2^{2^2},\quad 1+2^{2^{2^2}},\quad \ldots\ldots;$$

19. Toutefois, avec les résultats que nous venons d'obtenir, il est facile, sans beaucoup de calcul, d'en obtenir une multitude d'autres d'un ordre beaucoup plus élevé. Qu'il soit question, par exemple, de résoudre l'équation

$$x^{120}-1=0\ ;$$

on la mettra d'abord sous cette forme

$$(x^{60}-1)(x^{60}+1)=0\ ;$$

ce qui ramenera la question à résoudre les deux équations

$$x^{60}-1=0\ , \qquad x^{60}+1=0\ ,$$

ou plutôt la première seulement ; les racines de l'autre se déduisant des siennes (4), en multipliant celles-ci par $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})\sqrt{2}$. Cette première équation peut, à son tour, être mise sous cette forme

$$(x^{30}-1)(x^{30}+1)=0\ ;$$

ce qui réduit le problème à résoudre les deux équations

$$x^{30}-1=0\ , \qquad x^{30}+1=0\ ,$$

ou plutôt la première seulement ; les racines de l'autre se déduisant des siennes en les multipliant (4) par $\sqrt{-1}$. Cette première équation revient, à son tour, à

$$(x^{15}-1)(x^{15}+1)=0\ ;$$

ce qui réduit le problème à la résolution des deux équations

$$x^{15}-1=0\ , \qquad x^{15}+1=0\ ,$$

dont nous avons déjà obtenu les racines (16), lesquelles nous avons vu ne dépendre que de celles des deux équations

$$x^3-1=0\ ,\qquad x^5-1=0\ ;$$

de sorte que c'est à la résolution de ces deux dernières que se réduit finalement celle de l'équation

$$x^{120}-1=0\ .$$

Les racines de cette dernière, une fois obtenues, en les multipliant (4) par

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{-1}\right)\ ,$$

on obtiendra celles de l'équation

$$x^{120}+1=0\ ;$$

on aura donc aussi celles de l'équation

$$(x^{120}-1)(x^{120}+1)=0\ ;$$

c'est-à-dire, celles de l'équation

$$x^{240}-1=0\ ;$$