LENTHÉRIC
VALLÈS
BOBILLIER

Démonstration du dernier des deux théorèmes de géométrie énoncé à la page 283 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 377-380
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__377_1>

Démonstration du dernier des deux théorèmes de géométrie énoncé à la page 283 du présent volume;

Par MM. Lenthéric, professeur au Collége royal de Montpellier,

Vallès, élève à l'Ecole royale des ponts et chaussées.

Et Bobillier, professeur à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

La démonstration de ce théorème est évidemment contenue dans la solution du problème suivant :

PROBLÈME. Quel est le lieu des intersections des ordonnées d'une ellipse avec les perpendiculaires menées de son centre sur les tangentes aux extrémités de ces ordonnées.

Solution L'équation d'une ellipse, rapportée à ses diamètres principaux étant

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,, \qquad (1)$$

l'équation de la tangente au point (x',y') de son périmètre sera

$$b^2x'x+a^2y'y=a^2b^2\ , \qquad (2)$$

avec la condition

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2\ . \qquad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction de cette tangente sera donc

$$b^2x'y-a^2y'x=0\ ; \qquad (4)$$

mais l'équation de l'ordonnée du point de contact est

$$x-x'=0\ ; \qquad (5)$$

on obtiendra donc l'équation du lieu de l'intersection de cette perpendiculaire et de cette ordonnée en éliminant les deux paramètres x', y' entre les équations (3), (4), (5).

Les deux dernières donnent

$$x'=x\ , \qquad y'=\frac{b^2}{a^2}y\ ;$$

valeurs qui, substituées dans la première, donnent

$$a^2x^2+b^2y^2=a^4\ , \qquad (6)$$

ou bien

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^2x^2+a^2y^2=\left(\frac{a^2}{b}\right)^2a^2\ ;$$

équation d'une nouvelle ellipse qui a le diamètre principal $2a$ commun avec la première, et dont l'autre diamètre $2\frac{a^2}{b}$ est une troisième proportionnelle aux diamètres $2b$ et $2a$ de la première. On a donc ce théorème, qui est précisément celui qu'il s'agissait de démontrer :

THÉORÈME. Si deux ellipses ont un diamètre principal commun, moyen proportionnel entre leurs diamètres principaux non communs, toute sécante commune, perpendiculaire au diamètre commun, sera coupée par la perpendiculaire conduite, par le centre com-

mun, à la tangente en un des points où cette sécante coupe l'une quelconque des deux ellipses, en un point qui appartiendra à l'autre.

M. Vallès observe qu'on pourrait démontrer ce théorème d'une manière purement géométrique, en considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle, ainsi que M. Ferriot en a usé en divers endroits du présent recueil.

Nous observerons à notre tour que si, dans les équations (1) et (6) on change b en $b\sqrt{-1}$, elles deviendront

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad a^2x^2-b^2y^2=a^4\ ;$$

ce qui prouve que la même propriété existe pour deux hyperboles qui ont un axe transverse commun, moyen proportionnel entre leurs axes fictifs.

Il est aisé de voir que la même propriété aura également lieu soit pour deux sphéroïdes de révolution soit pour deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, qui auront même équateur, dont le rayon sera moyen proportionnel entre les longueurs de leurs diamètres principaux perpendiculaires au plan de cet équateur. C'est-à-dire que si, pour un même point quelconque de l'une des surfaces, on mène un plan tangent et une perpendiculaire au plan de l'équateur, cette perpendiculaire sera coupée par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, en un point de l'autre surface.

M. Vallès a pris occasion de là pour chercher le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une ellipse sur ses tangentes. L'équation de ce lieu est évidemment le résultat de l'élimination des deux paramètres x', y' entre les trois équations (2), (3), (4). De la première et de la dernière on tire

$$x'=\frac{a^2x}{x^2+y^2}\ ;\qquad y'=\frac{b^2y}{x^2+y^2}\ ;$$

d'où, en substituant dans la seconde,

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2\ .$$

En changeant b en $b\sqrt{-1}$, on aura résolu le même problème pour l'hyperbole.

On peut de même se proposer d'assigner le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une ellipsoïde sur ses plans tangens. En supposant l'équation de l'ellipsoïde en coordonnées rectangulaires

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\;, \qquad (1)$$

l'équation de son plan tangent en (x', y', z') sera

$$b^2c^2x'x+c^2a^2y'y+a^2b^2z'z=a^2b^2c^2\;, \qquad (2)$$

avec la condition

$$b^2c^2x'^2+c^2a^2y'^2+a^2b^2z'^2=a^2b^2c^2\;. \qquad (3)$$

La perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent sera donnée par la double équation

$$a^2\frac{x}{x'}=b^2\frac{y}{y'}=c^2\frac{z}{z'}\;, \qquad (4)$$

qui combinée avec (2) donnera

$$x'=\frac{a^2x}{x^2+y^2+z^2}\;,\qquad y'=\frac{b^2y}{x^2+y^2+z^2}\;,\qquad z'=\frac{c^2z}{x^2+y^2+z^2}\;;$$

d'où en substituant dans (3)

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\;.$$

On obtiendrait des résultats analogues pour les hyperboloïdes.

FIN DU DIX-SEPTIÈME VOLUME.