
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Analyse transcendante. Note sur les conditions d'intégrabilité

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 319-323

[<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__319_0>](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__319_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les conditions d'intégrabilité;

Par M. B. D. C.

SOIENT x et y des fonctions quelconques d'une troisième variable t ; et soient représentés, en général, pour abréger,

$$\frac{d^k x}{dt^k} \quad \text{par} \quad x_k,$$

$$\frac{d^k y}{dt^k} \quad \text{par} \quad y_k,$$

quel que puisse être d'ailleurs le nombre entier positif k . Soit V une fonction quelconque de

$$x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m,$$

$$y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n,$$

où on suppose que m soit tout au plus égal à n , et posons

$$X = \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1} \right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2} \right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3} \right)}{dt^3} + \dots \pm \frac{d^m\left(\frac{dV}{dx_m} \right)}{dt^m}$$

$$Y = \left(\frac{dV}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dy_1} \right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_2} \right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dy_3} \right)}{dt^3} + \dots \pm \frac{d^n\left(\frac{dV}{dy_n} \right)}{dt^n}$$

Si Vdt est une différentielle exacte, on aura, comme l'on sait (*),

(*) Voyez la page 197 du présent volume.

$X=0$, $Y=0$; et réciproquement, si ces deux équations ont lieu, Vdt sera une différentielle exacte; et telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la fonction différentielle Vdt , lorsque x et y sont deux variables indépendantes l'une de l'autre.

Mais si, au contraire, y était une fonction de x , c'est-à-dire, si l'on avait $y=\varphi(x)$, il est clair qu'alors une seule condition serait nécessaire et suffisante pour rendre intégrable la fonction différentielle Vdt . Mais quelle devrait être cette condition unique? C'est ce que nous nous proposons ici de rechercher.

Désignons en général par $\varphi_k(x)$ la dérivée de l'ordre k de la fonction $\varphi(x)$, prise par rapport à x , quel que soit le nombre entier positif k ; à cause de $y=\varphi(x)$, on aura, en différentiant,

$$y = \varphi(x)$$

$$y_1 = \varphi_1(x).x_1$$

$$y_2 = \varphi_2(x).x_1^2 + \varphi_1(x).x_2$$

$$y_3 = \varphi_3(x).x_1^3 + 3\varphi_2(x).x_1x_2 + \varphi_1(x).x_3$$

$$\dots\dots\dots$$

Désignons par V' ce que devient V lorsqu'on y substitue ces valeurs en x , x_1 , x_2 , ..., x_n pour y , y_1 , y_2 , ..., y_n ; en posant

$$X' = \left(\frac{dV'}{dx}\right) - \frac{d\left(\frac{dV'}{dx_1}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV'}{dx_2}\right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV'}{dx_3}\right)}{dt^3} + \dots + \frac{d^n\left(\frac{dV'}{dx_n}\right)}{dt^n},$$

$X'=0$ sera évidemment l'équation de condition qu'il s'agit de déterminer.

Or, on a

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_1} = \frac{dV}{dx_1} + \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_n}{dx_1} \frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_2} = \frac{dV}{dx_2} + \frac{dy_2}{dx_2} \frac{dV}{dy_2} + \frac{dy_3}{dx_2} \frac{dV}{dy_3} + \dots + \frac{dy_n}{dx_2} \frac{dV}{dy_n},$$

.....

$$\frac{dV'}{dx_n} = \frac{dV}{dx_n} + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{dV}{dy_n};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_i}{dx} \frac{dV}{dy_i} + \dots \\ &- \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_1}{dx_1} \frac{dV}{dy_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_2}{dx_1} \frac{dV}{dy_2}\right)}{dt} - \dots - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} - \dots \\ &+ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2}\right)}{dt^2} + \frac{d^2\left(\frac{dy_2}{dx_2} \frac{dV}{dy_2}\right)}{dt^2} + \dots + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} + \dots \\ &- \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3}\right)}{dt^3} - \dots - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^3} - \dots \\ &+ \dots \dots \dots + \dots \dots \dots \\ &+ \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}} \end{aligned}$$

Considérons, dans ce développement, la colonne dont le rang est $i+2$, laquelle est, comme on le voit,

$$\frac{dy_i}{dx} \frac{dV}{dy_i} - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots + \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}} ;$$

en la développant et ordonnant suivant les différentielles successives de $\frac{dV}{dy_i}$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \frac{dy_i}{dx} \frac{dV}{dy_i} - \frac{dy_i}{dx_1} \frac{dV}{dt} + \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{dy_i}{dx_2} \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots + \frac{dy_i}{dx_i} \frac{d^i\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^i} \\ - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)}{dt} + 2 \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt} - 3 \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt} + \dots \\ + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt^2} - 3 \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^2} + \dots \\ - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^3} + \dots + \frac{i}{1} \frac{i-1}{2} \frac{d^{i-2}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-2}} \\ + \dots + \frac{d^{i-1}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-1}} \\ + \frac{d^i\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^i} \end{array} + \dots$$

Or, les coefficients des termes,

$$\frac{dV}{dx_i}, \quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}, \quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{i-1}\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^{i-1}},$$

de ce développement, égaux séparément à zéro, ne sont autre chose que les équations de condition qui exprimeraient que $y_i dt^i$ est une différentielle exacte de l'ordre i ; ces coefficients doivent donc être nuls d'eux-mêmes, puisque $y_i dt^i$ est en effet une telle différentielle; ce développement se réduit donc simplement à son dernier terme

$\frac{dy_i}{dx_i} \frac{d^i \left(\frac{dV}{dy_i} \right)}{dt^i}$; c'est donc aussi à ce dernier terme que se réduit

la $(i+2)^{\text{me}}$ colonne du développement de X' ; d'où il suit que ce développement lui-même se réduit à

$$X' = \frac{dV}{dx} - \frac{d \left(\frac{dV}{dx_1} \right)}{dt} + \frac{d^2 \left(\frac{dV}{dx_2} \right)}{dt^2} - \dots + \frac{d^n \left(\frac{dV}{dx_n} \right)}{dt^n} \\ + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} - \frac{dy_1}{dx_1} \frac{d \left(\frac{dV}{dy_1} \right)}{dt} + \frac{dy_2}{dx_2} \frac{d^2 \left(\frac{dV}{dy_2} \right)}{dt^2} - \dots + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{d^n \left(\frac{dV}{dy_n} \right)}{dt^n};$$

mais il est visible que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} = \dots = \frac{dy_n}{dx_n};$$

donc, on aura

$$X' = X + Y \frac{dy}{dx};$$

puis donc que la condition d'intégrabilité est, dans le cas présent, $X'=0$, cette condition sera

$$Xdx + Xdy = 0 \quad \text{ou} \quad Xx_1 + Yy_1 = 0.$$

Cette conclusion est exactement celle de Lagrange dans sa 21.^e leçon sur le *Calcul des fonctions* (*).

(*) Voyez la page 412 de l'édition in-8.^o ou la page 12 du supplément in-4.^o.