
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

Analise transcendante. Note sur les conditions d'intégrabilité

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 319-323

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__319_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les conditions d'intégrabilité;

Par M. B. D. C.

SOIENT x et y des fonctions quelconques d'une troisième variable t ; et soient représentés, en général, pour abréger,

$$\frac{d^k x}{dt^k} \quad \text{par} \quad x_k,$$

$$\frac{d^k y}{dt^k} \quad \text{par} \quad y_k,$$

quel que puisse être d'ailleurs le nombre entier positif k . Soit V une fonction quelconque de

$$x, x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_m,$$

$$y, y_1, y_2, y_3, \dots \dots \dots y_n,$$

où on suppose que m soit tout au plus égal à n , et posons

$$X = \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1} \right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2} \right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3} \right)}{dt^3} + \dots + \frac{d^m\left(\frac{dV}{dx_m} \right)}{dt^m}$$

$$Y = \left(\frac{dV}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dy_1} \right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_2} \right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dy_3} \right)}{dt^3} + \dots + \frac{d^n\left(\frac{dV}{dy_n} \right)}{dt^n}$$

Si Vdt est une différentielle exacte, on aura, comme l'on sait (*),

(*) Voyez la page 197 du présent volume.

$X=0$, $Y=0$; et réciproquement, si ces deux équations ont lieu, Vdt sera une différentielle exacte; et telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la fonction différentielle Vdt , lorsque x et y sont deux variables indépendantes l'une de l'autre.

Mais si, au contraire, y était une fonction de x , c'est-à-dire, si l'on avait $y=\varphi(x)$, il est clair qu'alors une seule condition serait nécessaire et suffisante pour rendre intégrable la fonction différentielle Vdt . Mais quelle devrait être cette condition unique? C'est ce que nous nous proposons ici de rechercher.

Désignons en général par $\varphi_k(x)$ la dérivée de l'ordre k de la fonction $\varphi(x)$, prise par rapport à x , quel que soit le nombre entier positif k ; à cause de $y=\varphi(x)$, on aura, en différentiant,

$$y = \varphi(x)$$

$$y_1 = \varphi_1(x) \cdot x_1$$

$$y_2 = \varphi_2(x) \cdot x_1^2 + \varphi_1(x) \cdot x_2$$

$$y_3 = \varphi_3(x) \cdot x_1^3 + 3\varphi_2(x) \cdot x_1 x_2 + \varphi_1(x) \cdot x_3$$

.....

Désignons par V' ce que devient V lorsqu'on y substitue ces valeurs en x, x_1, x_2, \dots, x_n pour y, y_1, y_2, \dots, y_n ; en posant

$$X' = \left(\frac{dV'}{dx} \right) - \frac{d\left(\frac{dV'}{dx_1} \right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dV'}{dx_2} \right)}{dt^2} - \frac{d^3\left(\frac{dV'}{dx_3} \right)}{dt^3} + \dots \pm \frac{d^n\left(\frac{dV'}{dx_n} \right)}{dt^n},$$

$X'=0$ sera évidemment l'équation de condition qu'il s'agit de déterminer.

Or, on a

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_1} = \frac{dV}{dx_1} + \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_n}{dx_1} \frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_2} = \frac{dV}{dx_2} + \frac{dy_2}{dx_2} \frac{dV}{dy_2} + \frac{dy_3}{dx_2} \frac{dV}{dy_3} + \dots + \frac{dy_n}{dx_2} \frac{dV}{dy_n},$$

.....

$$\frac{dV'}{dx_n} = \frac{dV}{dx_n} + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{dV}{dy_n};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx} \frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dV}{dy_2} + \dots + \frac{dy_i}{dx} \frac{dV}{dy_i} + \dots \\ &\quad - \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_1}{dx_1} \frac{dV}{dy_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_2}{dx_1} \frac{dV}{dy_2}\right)}{dt} - \dots - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} - \dots \\ &\quad + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2}\right)}{dt^2} + \frac{d^2\left(\frac{dy_2}{dx_2} \frac{dV}{dy_2}\right)}{dt^2} + \dots + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} + \dots \\ &\quad - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3}\right)}{dt^3} - \frac{d^3\left(\frac{dy_3}{dx_3} \frac{dV}{dy_3}\right)}{dt^3} - \dots - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^3} - \dots \\ &\quad + \dots + \dots \\ &\quad \pm \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}} \end{aligned}$$

Considérons, dans ce développement, la colonne dont le rang est $i+2$, laquelle est, comme on le voit,

$$\frac{dy_i}{dx} \frac{dV}{dy_i} - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2} \frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots + \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^{i+1}},$$

en la développant et ordonnant suivant les différentielles successives de $\frac{dV}{dy_i}$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \frac{dy_i}{dx} \left| \begin{array}{c} \frac{dV}{dy_i} - \frac{dy_i}{dx_1} \left| \begin{array}{c} \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{dy_i}{dx_2} \left| \begin{array}{c} \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots + \frac{dy_i}{dx_i} \frac{d^i\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^i} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)}{dt} \left| \begin{array}{c} +_2 \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt} \left| \begin{array}{c} - 3 \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt} \left| \begin{array}{c} + \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. + \dots \\ + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt^2} \left| \begin{array}{c} - 3 \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^2} \left| \begin{array}{c} + \dots \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^3} \left| \begin{array}{c} + \dots \dots \left| \begin{array}{c} + \frac{i}{2} \frac{d^{i-2}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-2}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ + \dots \dots \left| \begin{array}{c} + i \frac{d^{i-1}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-1}} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \pm \frac{d^i\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^i} \end{array}$$

Or, les coefficients des termes,

$$\frac{dV}{dx_i}, \quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}, \quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{i-1}\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^{i-1}},$$

de ce développement, égalés séparément à zéro, ne sont autre chose que les équations de condition qui exprimeraient que $y_i dy^i$ est une différentielle exacte de l'ordre i ; ces coefficients doivent donc être nuls d'eux-mêmes, puisque $y_i dy^i$ est en effet une telle différentielle; ce développement se réduit donc simplement à son dernier terme

$\frac{dy_i}{dx_i} \frac{d^i \left(\frac{dV}{dy_i} \right)}{dt^i}$; c'est donc aussi à ce dernier terme que se réduit la $(i+2)^{\text{me}}$ colonne du développement de X' ; d'où il suit que ce développement lui-même se réduit à

$$X' = \frac{dV}{dx} - \frac{d \left(\frac{dV}{dx_1} \right)}{dt} + \frac{d^2 \left(\frac{dV}{dx_2} \right)}{dt^2} - \dots + \frac{d^n \left(\frac{dV}{dx_n} \right)}{dt^n} + \frac{dy}{dx} \frac{dV}{dy} - \frac{dy_1}{dx_1} \frac{d \left(\frac{dV}{dy_1} \right)}{dt} + \frac{dy_2}{dx_2} \frac{d^2 \left(\frac{dV}{dy_2} \right)}{dt^2} - \dots + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{d \left(\frac{dV}{dy_n} \right)}{dt^n};$$

mais il est visible que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} = \dots = \frac{dy_n}{dx_n};$$

donc, on aura

$$X' = X + Y \frac{dy}{dx};$$

puis donc que la condition d'intégrabilité est, dans le cas présent, $X' = 0$, cette condition sera

$$X dx + X dy = 0 \quad \text{ou} \quad X x_1 + Y y_1 = 0.$$

Cette conclusion est exactement celle de Lagrange dans sa 21.^e leçon sur le *Calcul des fonctions* (*).

(*) Voyez la page 412 de l'édition in-8.^o ou la page 12 du supplément in-4^o.