
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

**Algèbre élémentaire. Démonstration abrégée du binôme de
Newton, pour le cas de l'exposant entier et positif**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 205-206

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__205_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

*Démonstration abrégée du BINOME DE NEWTON, pour
le cas de l'exposant entier et positif ;*

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier de génie, ancien élève
de l'école polytechnique.

~~~~~  
SOIT, pour abréger,

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-\mu+2}{\mu-1} = f(m, \mu) ;$$

il s'agit de prouver que le terme général du développement de  
 $(x+a)^m$  est  $f(m, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu+1}$ , ou, ce qui revient au même, que

$$(x+a)^m = \sum \{ f(m, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu+1} \} ; \quad (1)$$

en développant le second membre depuis  $\mu=1$  jusqu'à  $\mu=\infty$ .

Cette assertion se vérifiant facilement pour les quelques premières  
valeurs de  $m$ , tout se réduit à prouver que l'équation (1) aura  
lieu si l'on a

$$(x+a)^{m-1} = \sum \{ f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu} \} ; \quad (2)$$

or, on tire de là, en multipliant de part et d'autre par  $x+a$ ,

Tom. XIV.

$$(x+a)^m = (x+a) \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu}\}; \quad (3)$$

d'où il suit, en comparant (3) à (1) que tout se réduit à prouver que

$$(x+a) \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu}\} = \sum \{f(m, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu+1}\}. \quad (4)$$

Or, en faisant, tour à tour, la multiplication par  $x$  et par  $a$ , et prenant les termes généraux correspondans des deux produits, on trouve

$$x \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu}\} = \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu+1}\},$$

$$a \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu}\} = \sum \{f(m-1, \mu-1) a^{\mu-1} x^{m-\mu+1}\};$$

donc, en ajoutant

$$(x+a) \sum \{f(m-1, \mu) a^{\mu-1} x^{m-\mu}\} = \sum \{[f(m-1, \mu) + f(m-1, \mu-1)] a^{\mu-1} x^{m-\mu+1}\} \quad (5)$$

or, il est très-facile de s'assurer que

$$f(m-1, \mu) + f(m-1, \mu-1) = f(m, \mu);$$

donc l'équation (4), et par suite l'équation (1) se trouve pleinement justifiée (\*).

(\*) On a déjà donné dans ce recueil ( tom. II, pag. 207 ) une démonstration de la formule du binome, indépendante, comme celle-ci, de la théorie des combinaisons.