ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Analise transcendante. Note sur les équations différentielles partielles et sur les intégrales définies

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 254-257
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__254_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les équations différentielles partielles et sur les intégrales définies ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

L'on a beaucoup multiplié, dans ces derniers temps, l'application des intégrales définies à l'intégration des équations différentielles partielles; mais personne, du moins que je sache, ne paraît avoir songé à renverser la question, je veux dire, à appliquer l'intégration des équations différentielles partielles à la recherche des intégrales définies. Cette manière de procéder peut pourtant conduire souvent au but d'une manière fort simple ; et c'est ce que je me propose de faire voir ici, par un exemple.

Soit la formule

$$y=\int e^{-bx}X\mathrm{d}x.\mathrm{Cos}.ax\ ,$$

où X désigne une fonction quelconque de x, sans a ni b, et où les limites de l'intégrale, indépendantes des mêmes quantités, sont d'ailleurs supposées quelconques. En différentiant deux fois successivement par rapport à a et b, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=-\int e^{-bx}Xx\mathrm{d}x.\mathrm{Sin}.ax\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}=-\int e^{-bx}Xx\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}a^2}=-\int e^{-bx}Xx^2\mathrm{d}x.\mathrm{Cos}\,ax\ , \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}b^2}=+\int e^{-bx}Xx^2\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax\ ;$$

d'où

$$\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{db^2}=0\,;$$

équation dont l'intégrale est, en général,

$$y=\varphi(b+a\sqrt{-1})+\psi(b-a\sqrt{-1})\,,$$

ainsi qu'on peut s'en convaincre par la différentiation et l'élimination des fonctions arbitraires. De là on tire

$$\frac{dy}{da}=\{\varphi'(b+a\sqrt{-1})-\psi'(b-a\sqrt{-1})\}\sqrt{-1}\,;$$

valeur qui se réduit à

$$\{\varphi'(b)-\psi'(b)\}\sqrt{-1}\,,$$

lorsqu'on suppose $a=0$; mais la valeur de $\frac{dy}{da}$ déterminée ci dessus prouve que, dans la même circonstance, ce coefficient différentiel doit s'évanouir; donc

$$\varphi'(b)=\psi'(b)\,,\qquad \text{d'où}\qquad \varphi(b)=\psi(b)\,,$$

et, par suite,

$$y=\varphi(b+a\sqrt{-1})+\varphi(b-a\sqrt{-1})\,.$$

En posant ici $a=0$, il vient

$$y=2\varphi(b)\,;$$

et, d'un autre côté, on doit avoir, dans le même cas,

$$y=\int e^{-bx}X\mathrm{d}x\,;$$

de sorte que, toutes les fois que l'on saura trouver cette dernière intégrale, on en déduira facilement la valeur complète de y.

Si, par exemple, on prend

$$X=x^{n-1},$$

on aura

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x,$$

dont l'intégrale entre $x=0$ et $x=\infty$ est

$$\frac{1}{b^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x;$$

donc

$$2\varphi(b)=\frac{1}{b^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x, \quad \text{d'où} \quad \varphi(b)=\tfrac{1}{2}b^{-n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x;$$

et par conséquent

$$y=\{\tfrac{1}{2}(b+a\sqrt{-1})^{-n}+\tfrac{1}{2}(b-a\sqrt{-1})^{-n}\}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x.$$

Si l'on fait ensuite

$$b=k\mathrm{Cos}.t, \qquad a=k\mathrm{Sin}.t,$$

on aura

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax=\frac{\mathrm{Cos}.nt}{k^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x. \qquad \left\{\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right\}$$

on trouverait semblablement

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.ax=\frac{\mathrm{Sin}.nt}{k^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x; \qquad \left\{\begin{matrix}x=0\\x=\infty\end{matrix}\right\}$$

k et t conservant les mêmes valeurs que dans la formule précédente.

La même marche peut conduire à un résultat que je me crois fondé à regarder comme intéressant. Soit

$\int\varphi$

$$\int\varphi(x,\,b)\,\mathrm{d}x=\psi(b)\,, \qquad (1)$$

et

$$\int\{\varphi(x\,,\,b+a\sqrt{-1})+\varphi(x\,,\,b-a\sqrt{-1})\}\,\mathrm{d}x=y\,,$$

l'on en conclura, en général, comme ci-dessus,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}a^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}b^2}=0\,; \qquad (2)$$

et par conséquent

$$y=\mathrm{F}(b+a\sqrt{-1})+\Phi(b-a\sqrt{-1})\,,$$

F et Φ désignant des fonctions arbitraires quelconques; mais, si l'on fait $a=0$, on devra avoir, en vertu de l'équation (1)

$$\mathrm{F}(b)+\Phi(b)=2\psi(b)\,;$$

d'où, en observant que a et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}$ doivent être nuls en même temps, on conclura

$$\mathrm{F}(b)=\Phi(b)=\psi(b)\,,$$

et par conséquent

$$y=\psi(b+a\sqrt{-1})+\psi(b-a\sqrt{-1})\,.$$

On trouverait de même que, sous la même condition,

$$\int\frac{\varphi(x\,,\,b+a\sqrt{-1})-\varphi(x\,,\,b-a\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x=y\,,$$

donne

$$y=\frac{\psi(b+a\sqrt{-1})-\psi(b-a\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\,;$$

ce qui fait voir que l'emploi du passage du réel à l'imaginaire est permis, toutes les fois qu'il est permis de différentier sous le signe $\int$ des fonctions que ce signe affecte, par rapport aux constantes que ces fonctions peuvent renfermer.

Les diverses formules qu'on avait obtenues, au moyen de ce passage, se trouvent, par ce qui précède, rigoureusement démontrées, et ce même passage cesse dès-lors d'être regardé comme le résultat d'une simple induction.

Pezenas, le 8 janvier 1822.