ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie élémentaire. Sur la nature des courbes qu'on obtient en coupant un cone par un plan

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 113-119
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__113_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la nature des courbes qu'on obtient en coupant un cône par un plan ;

Par M. GERGONNE.

IL n'est point sans intérêt de savoir que, de quelque manière qu'on coupe un cône droit ou oblique par un plan, on ne peut jamais obtenir que l'une des trois courbes connues sous la dénomination de *lignes du second ordre.* C'est, par exemple, par suite de ce principe que la perspective d'un cercle sur un plan situé d'une manière quelconque par rapport à ce cercle est constamment une de ces courbes, quelle que soit d'ailleurs la situation de l'œil par rapport au tableau ; et on pourrait en déduire beaucoup d'autres conséquences remarquables.

Cependant la démonstration que l'on donne de ce principe dans les traités élémentaires n'est relative qu'au seul cône droit. A la vérité, on pourrait facilement l'étendre au cône oblique ; mais dans le cas seulement où le plan coupant serait perpendiculaire à celui qui, passant par le sommet et par le centre de la base du cône, serait perpendiculaire au plan de cette base. Il serait donc démontré alors qu'on peut obtenir toutes ces courbes en coupant un cône oblique par un plan ; mais non pas qu'on ne saurait en obtenir d'autres.

Cette négligence serait excusable, si l'on ne pouvait étendre au cône oblique, coupé d'une manière quelconque, la démonstration que l'on donne pour le cône droit; mais la vérité est que la démonstration n'est ni plus longue ni plus difficile pour l'un que pour l'autre. Celle qu'on va voir m'a été communiquée, il y a déjà plusieurs années, par M. Vecten, alors professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.

Soit S le sommet d'un cône, droit ou oblique (fig. 2, 3, 4), coupé d'une manière quelconque par un plan donnant une section MAN. Par l'un quelconque M des points de cette section, soit conduit un plan parallèle à la base, la section MGNH sera un cercle, coupé par la section oblique à la base suivant une corde MN. Par le milieu P de cette corde, menons au cercle un diamètre GH, qui lui sera perpendiculaire. Par le sommet S et par ce diamètre, soit conduit un plan qui coupera le cône suivant les droites SG, SH, et la section oblique suivant AP. Il pourra arriver (fig. 2) que AP prolongée rencontre SH en un point B situé du même côté du sommet S que le point A; ou que ce point B (fig. 3) soit situé de l'autre côté du sommet par rapport au point A, ou enfin (fig. 4) que AP soit parallèle à SH. Dans ces trois cas, on aura également, par la propriété du cercle,

$$\overline{PM}^2 = PG.PH.$$

On aura donc (fig. 2, 3)

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA.PB} = \frac{PG}{PA} \cdot \frac{PH}{PB};$$

mais, dans les triangles GPA, HPB, on peut, aux rapports des côtés, substituer ceux des sinus des angles opposés; on aura donc ainsi

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA.PB} = \frac{\text{Sin.BAS}}{\text{Sin.HGS}} \cdot \frac{\text{Sin.ABS}}{\text{Sin.GHS}};$$

or, il est aisé de voir que le second membre de cette équation est constant, quel que soit d'ailleurs la situation du point M sur la courbe ; donc le premier l'est aussi, quel que soit ce point M; donc il y a un rapport constant entre les quarrés des ordonnées parallèles PM et les produits des abscisses correspondantes PA et PB tombant de différens côtés de l'ordonnée (fig. 2) et du même côté de cette ordonnée (fig. 3) ; donc cette courbe est une ellipse (fig. 2) et une hyperbole (fig. 3); on voit de plus que AB en est un diamètre, et que PM est parallèle à la tangente à son extrémité.

On aura aussi (fig. 4)

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP}=PH.\frac{PG}{AP},$$

ou, en substituant au rapport des côtés du triangle APG, le rapport des sinus des angles opposés,

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP}=PH.\frac{\text{Sin.SAP}}{\text{Sin.SGH}};$$

Or, le second membre de cette équation est constant, quel que soit le point M sur la courbe ; donc le premier l'est aussi, quel que soit ce point M ; il y a donc un rapport constant entre les quarrés des ordonnées parallèles à PM et les abscisses qui leur correspondent ; la courbe est donc une parabole dont AP est un diamètre et dans laquelle les ordonnées sont parallèles à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Ces sortes de démonstrations ne sauraient au surplus avoir quelque prix qu'à raison de leur extrême simplicité ; elles sont d'ailleurs les seules qu'on puisse donner à ceux à qui la géométrie analitique à trois dimensions est étrangère ; mais cette géométrie en offre une qui peut d'autant mieux figurer dans un traité de géométrie analitique que du moins elle ne fait pas alors bigarrure avec le ton général de l'ouvrage, et offre au lecteur un sujet d'exercice de plus.

Soient a, b, c les coordonnées du sommet d'un cône à base circulaire, rapporté à trois axes rectangulaires quelconques. Soient α, β, γ les coordonnées du centre de sa base, dont nous supposons le plan donné par l'équation

$$A(x-\alpha)+B(x-\beta)+C(z-\gamma)=0\ , \qquad (1)$$

dans laquelle il est permis de supposer A, B, C liés par la condition

$$A^2+B^2+C^2=1\ . \qquad (2)$$

Si nous représentons par r le rayon de cette base, son périmètre sera donné par le système de l'équation (1) et de la suivante qui est celle d'une sphère ayant même centre et même rayon

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \qquad (3)$$

Cela posé, on pourra prendre pour les équations d'une droite menée d'une manière quelconque par le sommet du cône

$$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}\ ; \qquad (4)$$

X, Y, Z étant trois indéterminées qu'il est permis de supposer liées par la relation

$$X^2+Y^2+Z^2=1\ . \qquad (5)$$

En combinant entre elles les équations (1, 4), les valeurs qui en résulteront pour x, y, z seront les coordonnées du point où notre droite

droite doit percer le plan de la base du cône, on trouvera ainsi, pour ces coordonnées,

$$x=a-X.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,,$$

$$y=b-Y.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,,$$

$$z=c-Z.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,.$$

Si présentement on veut que la droite (4) soit sur le cône, il faudra que le point où elle perce le plan de sa base soit un point du périmètre de cette base, et conséquemment un point de la sphère (3); il faudra donc exprimer que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la sphère; or, des formules ci-dessus, on tire

$$x-\alpha=a-\alpha-X.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,,$$

$$y-\beta=b-\beta-Y.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,,$$

$$z-\gamma=c-\gamma-Z.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}\,;$$

exprimant donc que la somme des quarrés de ces valeurs est égale à r^2, nous aurons

$$r^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma).$$

$$-2\frac{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)\}}{AX+BY+CZ}$$

$$+(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2}{(AX+BY+CZ)^2}.$$

En chassant le dénominateur et ayant égard à la relation (5), cette équation devient

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2\}(AX+BY+CZ)^2$$

$$-2\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)\}(AX+BY+CZ)$$

$$+\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2=0; \qquad (6)$$

elle exprime la relation qui doit exister entre X, Y, Z, déjà liés par la condition (5), pour que la droite (4) soit sur le cône.

Des équations (4, 5), on tire

$$X=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$Y=\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$Z=\frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}};$$

d'où

$$AX+BY+CZ=\frac{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)=\frac{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (6), on aura, pour l'équation de la surface convexe du cône dont il s'agit,

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{\{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)\}^2}$$

$$-2.\frac{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)}{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)\}}$$

$$+\frac{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2}{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2}=0\,. \qquad (7)$$

Or, puisque ce cône est quelconque par rapport aux plans coordonnés, il s'ensuit que réciproquement les plans coordonnés sont quelconques par rapport à lui; donc, en particulier, sa trace sur le plan des xy est son intersection par un plan quelconque; or, on obtient l'équation de cette trace en faisant $z=0$; donc la section du cône par un plan quelconque est une ligne du second ordre, puisque, par cette hypothèse, on obtiendra une équation du second degré en x et y. Il serait d'ailleurs facile de prouver que cette équation pourra indistinctement exprimer une parabole, une ellipse ou une hyperbole, et même une section conique dont les dimensions seraient données.