
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

**Géométrie analitique. Sur une méthode analitique pour la
recherche des foyers des sections coniques**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 317-321

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__317_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Sur une méthode analitique pour la recherche des foyers des sections coniques ;

Par M. BRET , professeur à la faculté des sciences de Grenoble.



Au Rédacteur des Annales ;

MONSIEUR ET CHER CONFRÈRE ,

M. Poncelet , dans son intéressant mémoire , inséré à la page 301 du présent volume , observe que la définition des foyers des sections coniques , telle qu'on la donne dans les élémens de *Géométrie analitique* , n'est point satisfaisante , et il propose de la remplacer par une autre plus analitique ; mais il me semble qu'avant d'opérer ce changement , il serait convenable d'examiner d'abord plus particulièrement la définition des foyers donnée par Euler.

Lorsque la section conique est rapportée à son premier axe ou axe principal , comme axe des abscisses , on dit communément que le foyer est un point tel que sa distance à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle et entière de l'abscisse correspondante ; mais il est évident que rien n'empêche de généraliser cette idée , et de donner un caractère des foyers qui puisse convenir à tous les systèmes de coordonnées parallèles à deux axes fixes. Je propose donc la définition suivante :

Tom. VIII , n.º XI , 1.º mai 1818.

Le foyer (α , β) d'une section conique est un point tellement situé que sa distance, à un point quelconque de (x, y) de la courbe, est une fonction rationnelle et entière des coordonnées de ce point.

En partant de là, je cro's qu'on peut exposer, très-simplement et d'une manière générale, la théorie des foyers.

Soit, en effet, l'équation générale du second degré

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2a'x + 2b'y + d = 0,$$

rapportée, pour plus de simplicité, à un système de coordonnées rectangulaires. On aura, d'après cela, pour la distance du point (α, β) au point (x, y)

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2};$$

si donc l'on veut que le point (α, β) soit un foyer, on devra avoir

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = gx + hy + k;$$

et tout se réduira à exprimer que cette équation est identique avec la proposée, ou du moins qu'elle n'en diffère que par un facteur constant λ ; il faudra donc déterminer α et β de manière à rendre identique, quels que soient x et y , l'équation

$$\begin{aligned} & (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (gx + hy + k)^2 \\ &= \lambda(ax^2 + by^2 + 2cxy + 2a'x + 2b'y + d). \end{aligned}$$

On obtient ainsi, entre les six inconnues α , β , g , h , k , λ ; les six équations suivantes, en nombre suffisant pour les déterminer

$$\begin{aligned} 1 - g^2 &= \lambda a, & -\alpha - kg &= \lambda a', \\ 1 - h^2 &= \lambda b, & -\beta - kh &= \lambda b', \\ -gh &= \lambda c, & \alpha^2 + \beta^2 - k^2 &= \lambda d, \end{aligned}$$

Il résulte de là que les sections coniques ont, généralement parlant, quatre foyers; car, par l'élimination de g , h , k , λ , on parvient à deux équations du second degré entre α , β et les coefficients de la proposée.

Pour faire à l'ellipse l'application de cette analyse nous prendrons son équation la plus simple, qui est, comme l'on sait,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0 ;$$

on aura alors

$$a = \frac{1}{A^2}, \quad b = \frac{1}{B^2}, \quad c = 0, \quad a' = 0, \quad b' = 0, \quad d = -1 ;$$

en sorte que les six équations ci-dessus deviendront

$$\begin{aligned} 1 - g^2 &= \frac{\lambda}{A^2}, & \alpha + hg &= 0, \\ 1 - h^2 &= \frac{\lambda}{B^2}, & \beta + kh &= 0, \\ gh &= 0, & \alpha^2 + \beta^2 - k^2 &= -\lambda ; \end{aligned}$$

d'où l'on tirera ces deux systèmes de valeurs

$$\begin{aligned} g &= 0, & h &= 0, \\ h &= \frac{1}{B} \sqrt{B^2 - A^2}, & g &= \frac{1}{A} \sqrt{A^2 - B^2}, \\ k &= B, & k &= A, \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, \\ \beta &= -\sqrt{B^2 - A^2}, & \alpha &= -\sqrt{A^2 - B^2}. \end{aligned}$$

Or, comme A est nécessairement plus grand ou plus petit que B , il s'ensuit que, excepté le cas du cercle, pour lequel on a à la

fois $\alpha=0$, $\beta=0$, toujours l'un de ces systèmes sera réel et l'autre imaginaire. Ainsi, indépendamment de deux foyers réels, situés sur son grand axe, l'ellipse en a deux autres imaginaires, situés sur son petit axe.

Si, dans ces deux séries de valeurs, on change B en $B\sqrt{-1}$, on aura les formules qui conviennent à l'hyperbole dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - 1 = 1 ;$$

ces formules seront

$$\begin{aligned} g &= 0, & h &= 0, \\ h &= \frac{1}{B} \sqrt{A^2 + B^2}, & g &= \frac{1}{A} \sqrt{A^2 + B^2}, \\ k &= B\sqrt{-1}, & k &= A, \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, \\ \beta &= -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{-1}; & \alpha &= -\sqrt{A^2 + B^2}; \end{aligned}$$

de sorte qu'ici ce sera toujours le second système qui sera réel.

S'il s'agit de la parabole, on pourra prendre l'équation

$$y^2 - 2Px = 0 ;$$

ce qui donnera

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0, \quad a'=-P, \quad b'=0, \quad d=0 ;$$

en conséquence, nos six équations deviendront

$$\begin{aligned} 1 - g^2 &= 0, & \alpha + kg &= \lambda P, \\ 1 - h^2 &= \lambda, & \beta + kh &= 0, \\ gh &= 0, & \alpha^2 + \beta^2 - k^2 &= 0 ; \end{aligned}$$

d'où on tirera

$$\begin{aligned} g &= \pm 1, & k &= \frac{1}{2}P, \\ h &= 0, & u &= \frac{1}{2}P, \\ \lambda &= 1, & \beta &= 0. \end{aligned}$$

J'observerai, en terminant, que l'équation

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-\beta)^2} = gx + hy + k;$$

offre un moyen bien simple de construire les sections coniques par l'intersection d'une droite mobile constamment parallèle à une droite fixe, avec un cercle variable de rayon, dont le centre fixe n'est autre chose que le foyer de la courbe (*).

Agréez, etc.

Grenoble, le 21 avril 1818.

(*) Ce que propose ici M. Bret vaut, sans contredit, incomparablement mieux que ce qu'on pratique communément, dans la vue de parvenir aux foyers des sections coniques; mais cela ne peut guère servir à découvrir les points remarquables dans les courbes des degrés supérieurs. Nous persistons donc à penser que, pour parvenir à la découverte de ces sortes de points, il faut se proposer le problème suivant :

Trouver deux points du plan d'une courbe auxquels tous les points de cette courbe étant rapportés, son équation devienne la plus simple possible.

On voit bien que, si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe, il faudra, pour résoudre le problème, éliminer x et y entre cette équation et les deux équations

$$\left. \begin{aligned} (x-u)^2 + (y-\beta)^2 &= r^2, \\ (x-u')^2 + (y-\beta')^2 &= r'^2, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

et profiter ensuite de l'indétermination des quatre constantes u, β, u', β' pour rendre l'équation résultante en r et r' la plus simple possible. Mais l'élimination ne pourrait être que très-laborieuse, même pour le second degré. A la vérité, on pourrait substituer à l'une des équations (A) la différence de ces deux