
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

**Questions résolues. Solution du problème de statique
proposé à la page 72 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 291-297

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__291_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solution du problème de statique proposé à la page 72
de ce volume (*) ;*

Par M. BÉRARD , principal du collège de Briançon, membre
de plusieurs sociétés savantes.



CE problème, quoique très-élémentaire, mérite néanmoins quelque attention ; tant parce qu'il est susceptible d'une application journalière que parce qu'il est très-facile de se méprendre en essayant de le résoudre. C'est par ce double motif que nous avons cru devoir le généraliser un peu, en l'énonçant ainsi qu'il suit :

(*) On a déjà publié une solution du même problème à la page 196 de ce volume ; mais, comme celle-ci est plus générale, il a paru convenable d'en faire mention. On en a seulement modifié les notations, afin d'en rendre plus facile la comparaison avec la première, que M. Bérard n'avait pu encore connaître lorsqu'il a rédigé celle-ci.

PROBLÈME. Déterminer l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement, pour un corps pesant de figure quelconque, posant par deux points sur deux plans dont la commune section est horizontale et perpendiculaire au plan vertical qui passe par ces deux points, en ayant égard au frottement ?

Solution. Supposons que le plan vertical dont il s'agit soit le plan même de la figure (fig. 1). Soient OA, OB ses intersections avec les deux plans sur lesquels le corps est appuyé; soient A et B les deux points où ce corps les touche, et soit joint AB. Soient OX et OY une horizontale et une verticale conduites par O dans le plan même de la figure.

Pour fixer les idées, supposons que OA soit au-dessous de l'horizontale et OB à gauche de la verticale; ainsi qu'il arriverait si, par exemple, OB étant le profil d'un rempart, OA était celui d'un glacis. Soit p l'angle, complément de AOY, que fait OA avec l'horizontale; et soit q l'angle, complément de BOX, que fait OB avec la verticale.

Soit C le point de AB où cette droite est rencontrée par la verticale passant par le centre de gravité du corps; soient $CA=a$, $CB=b$. Si nous décomposons le poids R de ce corps en deux forces verticales M , N ; passant respectivement par les points A, B; nous aurons

$$M = \frac{b}{a+b} R, \quad N = \frac{a}{a+b} R. \quad (1)$$

Soient enfin t et u les angles OAB et OBA que fait la droite AB avec les droites OA et OB; comme on a évidemment

$$\text{Ang. AOB} = \frac{1}{2} \pi + p + q,$$

on aura

$$\frac{1}{2} \pi + p + q + t + u = \pi;$$

c'est-à-dire,

$$p + q + t + u = \frac{1}{2} \pi. \quad (2)$$

Pour

Pour plus de généralité, soient g l'angle du frottement sur OA et h l'angle du frottement sur OB.

Soit décomposée la force M au point A, en deux autres P et T , la première dirigée suivant AB et la seconde formant avec AO un angle OAT égal à l'angle du frottement augmenté d'un angle droit; cette dernière sera détruite par la résistance de OA.

Soit pareillement décomposée la force N , au point B, en deux autres Q et U , la première dirigée suivant BA et la seconde formant avec BO un angle OBU, complément de celui du frottement; cette dernière sera détruite par la résistance de OB.

Il ne restera donc plus que les deux seules forces P , Q ; et, comme elles sont directement opposées, il faudra et il suffira pour l'équilibre qu'elles soient égales; c'est-à-dire, que la condition d'équilibre sera exprimée par l'équation

$$P=Q; \quad (3)$$

la question se trouve donc réduite à évaluer P et Q .

Or, on a, par les théories connues,

$$\text{Sin.TAP} : \text{Sin.TAM} :: M : P = M \cdot \frac{\text{Sin.TAM}}{\text{Sin.TAP}},$$

$$\text{Sin.UBQ} : \text{Sin.UBN} :: N : Q = N \cdot \frac{\text{Sin.UBN}}{\text{Sin.UBQ}};$$

on a, d'un autre côté,

$$\text{Ang.TAM} = g - p, \quad \text{Ang.TAP} = \frac{1}{2}\pi + g + t;$$

$$\text{Ang.UBN} = \frac{1}{2}\pi - h - q, \quad \text{Ang.UBQ} = \frac{1}{2}\pi - h + u;$$

d'où

$$\text{Sin.TAM} = \text{Sin.}(g - p); \quad \text{Sin.TAP} = \text{Cos.}(g + t);$$

$$\text{Sin.UBN} = \text{Cos.}(h + q), \quad \text{Sin.UBQ} = \text{Cos.}(h - u);$$

donc

$$P = M \cdot \frac{\text{Sin.}(g-p)}{\text{Cos.}(g-t)}, \quad Q = N \cdot \frac{\text{Cos.}(h+q)}{\text{Cos.}(h+u)} ;$$

et par conséquent (3)

$$M \cdot \frac{\text{Sin.}(g-p)}{\text{Cos.}(g-t)} = N \cdot \frac{\text{Cos.}(h+q)}{\text{Cos.}(h+u)} ;$$

ou, en mettant pour M et N leurs valeurs (1) et réduisant,

$$b \cdot \text{Sin.}(g-p) \text{Cos.}(h-u) = a \text{Cos.}(h+q) \text{Cos.}(g+t) ; \quad (4)$$

telle est donc l'équation qu'il faut combiner avec l'équation (2) pour obtenir les angles inconnus t et u .

On tire de l'équation (2)

$$u = \frac{1}{2} \pi - (p+q+t) ;$$

d'où

$$\text{Sin.}u = \text{Cos.}(p+q+t), \quad \text{Cos.}u = \text{Sin.}(p+q+t) ;$$

mais on a

$$\text{Cos.}(h-u) = \text{Cos.}h \text{Cos.}u + \text{Sin.}h \text{Sin.}u ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{Cos.}(h-u) = \text{Cos.}h \text{Sin.}(p+q+t) + \text{Sin.}h \text{Cos.}(p+q+t) ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Cos.}(h-u) = \text{Sin.}(p+q+h+t) .$$

On trouverait de même

$$\text{Cos.}(g+t) = \text{Sin.}(p+q-g+u) ;$$

au moyen de quoi l'équation (4) pourra prendre ces deux formes

$$b \text{Sin.}(g-p) \text{Sin.}(p+q+h+t) = a \text{Cos.}(h+q) \text{Cos.}(g+t) ,$$

$$b \text{Sin.}(g-p) \text{Cos.}(h-u) = a \text{Cos.}(h+q) \text{Sin.}(p+q-g+u) .$$

Développant la première par rapport à t seulement, en divisant par $\text{Cos.}t$, et la seconde par rapport à u seulement, en divisant par $\text{Cos.}u$, il viendra

$$\begin{aligned} \text{Tang.}t &= \frac{a\text{Cos.}(q+h)\text{Cos.}g + b\text{Sin.}(p-g)\text{Sin.}(p+q+h)}{a\text{Cos.}(q+h)\text{Sin.}g - b\text{Sin.}(p-g)\text{Cos.}(p+q+h)}, \\ -\text{Tang.}u &= \frac{a\text{Cos.}(q+h)\text{Sin.}(p+q-g) + b\text{Sin.}(p-g)\text{Cos.}h}{a\text{Cos.}(q+h)\text{Cos.}(p+q-g) + b\text{Sin.}(p-g)\text{Sin.}h}; \end{aligned}$$

développant la première par rapport à g seulement, en divisant haut et bas par $\text{Cos.}g$; et la seconde par rapport à h seulement, en divisant haut et bas par $\text{Cos.}h$; il viendra

$$\begin{aligned} \text{Tang.}t &= \frac{a\text{Cos.}(q+h) + b\text{Sin.}(p+q+h)(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g)}{a\text{Cos.}(q+h)\text{Tang.}g - b\text{Cos.}(p+q+h)(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g)}, \\ -\text{Tang.}u &= \frac{b\text{Sin.}(p-g) + a\text{Sin.}(p+q-g)(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h)}{b\text{Sin.}(p-g)\text{Tang.}h + a\text{Cos.}(p+q-g)(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h)}; \end{aligned}$$

développant encore, savoir: la première par rapport à h , en divisant haut et bas par $\text{Cos.}h$, et la seconde par rapport à g , en divisant haut et bas par $\text{Cos.}g$, on aura

$$\begin{aligned} \text{Tang.}t &= \frac{a(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h) + b(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g)[\text{Sin.}(p+q) + \text{Cos.}(p+q)\text{Tang.}h]}{a\text{Tang.}g(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h) - b(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g)[\text{Cos.}(p+q) - \text{Sin.}(p+q)\text{Tang.}h]}, \\ -\text{Tang.}u &= \frac{b(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g) + a(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h)[\text{Sin.}(p+q) - \text{Cos.}(p+q)\text{Tang.}g]}{b\text{Tang.}h(\text{Sin.}p - \text{Cos.}p\text{Tang.}g) + a(\text{Cos.}q - \text{Sin.}q\text{Tang.}h)[\text{Cos.}(p+q) + \text{Sin.}(p+q)\text{Tang.}g]} \end{aligned}$$

Si l'on suppose présentement que les frottemens sur OA et OB sont respectivement des fractions $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$ de la pression; on aura

$$\text{Tang.}g = \frac{1}{m}, \quad \text{Tang.}h = \frac{1}{n};$$

ce qui donnera, en substituant et réduisant,

$$\left. \begin{aligned} \text{Tang. } t &= \frac{ma(n\text{Cos. } q - \text{Sin. } q) + b(m\text{Sin. } p - \text{Cos. } p)[n\text{Sin. } (p+q) + \text{Cos. } (p+q)]}{a(n\text{Cos. } q - \text{Sin. } q) - b(m\text{Sin. } p - \text{Cos. } p)[n\text{Cos. } (p+q) - \text{Sin. } (p+q)]} \\ \text{Tang. } u &= \frac{nb(m\text{Sin. } p - \text{Cos. } p) + a(n\text{Cos. } q - \text{Sin. } q)[m\text{Sin. } (p+q) - \text{Cos. } (p+q)]}{b(m\text{Sin. } p - \text{Cos. } p) + a(n\text{Cos. } q - \text{Sin. } q)[m\text{Cos. } (p+q) + \text{Sin. } (p+q)]} \end{aligned} \right\} (5)$$

Si, pour en revenir à la question, telle qu'elle avait été proposée, on suppose $p=q=0$, ces formules deviendront

$$\text{Tang. } t = \text{Cot. } u = \frac{mna - b}{n(a+b)}. \quad (6)$$

Cette formule fait voir que, la longueur $AB = a + b$ restant la même, ainsi que les nombres m et n , on pourra rendre l'angle z d'autant plus petit, et conséquemment donner d'autant plus de pied à l'échelle, que b sera plus grand par rapport à a ; c'est-à-dire, d'autant plus que le centre de gravité de l'échelle sera plus rapproché de son extrémité inférieure.

Cette considération explique un phénomène qui malheureusement a été plus d'une fois funeste aux ouvriers. On peut remarquer, en effet, que l'homme placé sur une échelle fait corps avec elle; de manière qu'à mesure qu'il s'élève il en élève aussi le centre de gravité. Il peut donc se faire que l'échelle lui paraissant solidement établie lorsqu'il ne la monte pas encore, ou lorsqu'il en monte les échelons les plus bas, elle cesse ensuite de l'être et finisse par glisser sur le terrain, lorsqu'il sera parvenu aux échelons supérieurs. On évite une partie de ce danger lorsque l'échelle a beaucoup plus de masse à sa partie inférieure qu'à sa partie supérieure: on peut s'en garantir, dans tous les cas, en suspendant à l'échelon le plus bas un poids au moins égal à celui d'un homme.

Si l'on suppose l'échelle uniformément pesante et si, en outre, on suppose les frottemens les mêmes pour ses deux extrémités, on aura $b = a$, $n = m$, et la formule 6 deviendra

$$\text{Tang. } t = \frac{m^2 - 1}{2m} .$$

Si, dans cette dernière hypothèse, on suppose, comme on l'admet communément, $m = 3$, il viendra

$$\text{Tang. } t = \frac{4}{3} ;$$

alors donc la longueur, la hauteur et la base du plan incliné seront entre elles comme les nombres 5, 4, 3.

S'il s'agissait de deux échelles adossées et assemblées à charnière, telles qu'on les emploie pour tailler les arbres ; il suffirait de supposer $n = \infty$, ce qui donnerait

$$\text{Tang. } t = \frac{ma}{a+b} ;$$

Nous ne pousserons pas plus loin les nombreuses conséquences qu'on pourrait déduire de nos formules. Ceux qui pourront être curieux des recherches de cette nature pourront consulter notre *Statique des voûtes* (In-4.°, Paris, F. Didot, 1810), dans laquelle ils verront d'autres effets également curieux du frottement. Nous nous bornerons à observer qu'on pourrait, par analogie, rechercher l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement, pour un corps de figure quelconque, posant par trois points sur les trois faces d'un angle trièdre, ou même sur trois surfaces courbes données quelconques, en ayant toujours égard au frottement. Le problème aurait ainsi toute la généralité qu'il peut comporter.
