
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DU BOURGUET
CARDINALI
LANJUINAIS
LE GRAND

**Questions résolues. Solutions du problème d'analyse indéterminée,
proposé à la page 140 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 241-243

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__241_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solutions du problème d'analyse indéterminée, proposé
à la page 140 de ce volume;*

Par MM. DU BOURGUET, S..., CARDINALI, LANJUINAIS
et LE GRAND.



ÉNONCÉ. *On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des trois derniers par la somme des deux du milieu, on obtienne un produit égal au cube d'un moyen arithmétique entre les deux premiers de ces quatre nombres ?*

La difficulté de ce problème paraît consister principalement en ce que, s'élevant naturellement au troisième degré, il faut le rabaisser au second. C'est, en effet, ce qu'ont fait M. Du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial, M. S..., et M. Le Grand, élève de l'école normale; MM. Cardinali, professeur

à Trévise, et Lanjuinais, professeur à Rodez, l'ont traité par des méthodes indirectes : mais MM. Du Bourguet et Le Grand sont les seuls qui se soient proposés d'en assigner toutes les solutions ; ils ont trouvé, le premier, qu'elles étaient au nombre de trois, et le second, qu'elles étaient au nombre de quatre ; mais on peut dire qu'elles sont réellement au nombre de cinq, comme nous allons le faire voir, en suivant à peu près l'analyse de M. Du Bourguet.

Solution. Soient $2x$ le premier terme, et $2y$ la raison de la progression ; ses quatre termes seront

$$-2x, 2x+2y, 2x+4y, 2x+6y ;$$

et l'on devra avoir, par l'énoncé du problème,

$$(6x+12y)(4x+6y)=(2x+y)^3.$$

Posant $2x+y=z$, d'où $2x=z-y$, cette équation deviendra

$$(2z+4y)(3z+9y)=z^3,$$

ou, en posant $6y=t$ et développant

$$t^2+5zt+(6-z)z^2=0 ;$$

d'où

$$t=z \frac{-5 \pm \sqrt{4z+1}}{2}.$$

Soit fait $\pm \sqrt{4z+1}=u$, d'où $4z+1=u^2$ et $z=\frac{u^2-1}{4}$; donc

$$t=\frac{(u^2-1)(u-5)}{8} ;$$

et

$$y=\frac{(u^2-1)(u-5)}{48}, \quad x=\frac{(u^2-1)(17-u)}{96}.$$

Par l'inspection de ces valeurs, on voit évidemment que u ne peut être qu'un nombre impair ; posant donc $u=2v+1$, il viendra enfin

$$x=\frac{v(v+1)(8-v)}{12}, \quad y=\frac{v(v+1)(v-2)}{6}.$$

La nécessité d'avoir x positif renferme les valeurs de v entre -1 et $+8$; mais, attendu que les valeurs $+1, +4, +5, +7$ de v rendent x fractionnaire, on ne peut admettre que les six systèmes que voici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = -1, \\ x = 0, \\ y = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu = 0, \\ x = 0, \\ y = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu = 2, \\ x = 3, \\ y = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu = 3, \\ x = 5, \\ y = 2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu = 6, \\ x = 7, \\ y = 28; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu = 8, \\ x = 0, \\ y = 72; \end{array} \right.$$

et, puisque les valeurs -1 et 0 de ν donnent les mêmes valeurs pour x et y , le problème n'a réellement que les cinq solutions suivantes :

$$\div 0. 0. 0. 0,$$

$$\div 6. 6. 6. 6,$$

$$\div 10. 14. 18. 22,$$

$$\div 14. 70. 126. 182,$$

$$\div 0. 144. 288. 432.$$
