DU BOURGUET

Trigonométrie. Démonstration de quelques formules trigonométriques nouvelles ou peu connue

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 19-25
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__19_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstration de quelques formules trigonométriques nouvelles ou peu connues ;

Par M. DU BOURGUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.

SOIT $\varphi(n)$ une fonction quelconque d'un nombre n, que nous supposons essentiellement entier et positif ; convenons, pour abréger, de dénoter simplement par $P\{\varphi(g....h)\}$ le produit de toutes les valeurs que reçoit la fonction $\varphi(n)$, lorsqu'on y met successivement pour n les nombres consécutifs de la suite naturelle g, $g+1$, $g+2$,..., h ; en sorte qu'on ait

$$P\{\varphi(g....h)\}=\varphi(g)\times\varphi(g+1)\times\varphi(g+2)\times....\times\varphi(h).$$

Cette notation admise, le *Théorème de Côte* donne

$$a^{4m}-2a^{2m}b^{2m}\text{Cos.}z+b^{4m}=P\left\{a^2\pm2ab.\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}+b^2\right\};$$

la complication des calculs qu'elle exige. Il désirerait donc que l'on pût déterminer tous les systèmes de valeurs des inconnues qui satisfont à des équations proposées, sans être obligé d'y avoir recours. C'est là, en effet, un sujet qui serait tout à fait digne de fixer l'attention des géomètres. Toute la difficulté du problème se réduirait évidemment à savoir déterminer sans résoudre aucune équation, 1.° les limites extrêmes des valeurs de chacune des inconnues ; 2.° une limite au-dessous de laquelle ne pût tomber la différence entre deux valeurs de chacune de ces mêmes inconnues.

J. D. G.

pourvu qu'on prenne successivement le signe $+$ et le signe $-$ dans le second membre.

En exposant $b=a$, cette formule devient

$$2a^{4m}(1-\text{Cos.}z)=P\left\{2a^2\left[1\pm\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right]\right\};$$

sortant de dessous le signe P le facteur $2a^2$ qui deviendra au dehors $2^{2m}a^{4m}$, remarquant que $1-\text{Cos.}z=2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z$, et divisant par $4a^2$, il viendra

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1\pm\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\};$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1+\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\}\times P\left\{1-\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1-\text{Cos.}^2\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou, en extrayant la racine quarrée

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}z=2^{m-1}.P\left\{\text{Sin.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\}.$$

Faisant enfin $z=2x$, il viendra

$$\text{Sin.}x=2^{m-1}.P\left\{\text{Sin.}\frac{(0...m-1)\varpi+x}{m}\right\}.$$

En développant le second membre de cette équation, elle deviendra

$$\text{Sin.}x=2^{m-1}.\text{Sin.}\frac{x}{m}.\text{Sin.}\frac{\varpi+x}{m}.\text{Sin.}\frac{2\varpi+x}{m}...\text{Sin.}\frac{(m-2)\varpi+x}{m}.\text{Sin.}\frac{(m-1)\varpi+x}{m}; \quad \text{(I)}$$

mais comme, en général, $\text{Sin.}\frac{(m-n)\varpi+x}{m}=\text{Sin.}\frac{n\varpi-x}{m}$, on pourra encore mettre la même équation sous cette autre forme

$$\mathrm{Sin}.x=2^{m-1}.\mathrm{Sin}.\frac{x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{\varpi+x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{2\varpi+x}{m}\ldots\mathrm{Sin}.\frac{2\varpi-x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{\varpi-x}{m}. \quad \text{(II)}$$

Ces formules assez remarquables en elles-mêmes, conduisent immédiatement à celles que Lacroix a démontrées, d'après Lhuilier, dans son *Traité des différences et des séries* (*). Il suffit, en effet, pour les en déduire, de faire dans l'équation (I), $x=\frac{1}{2}\varpi$, et dans l'équation (II), $x=\frac{1}{4}\varpi$, en multipliant cette dernière par 2. On obtient ainsi

$$1=2^{m-1}\mathrm{Sin}.\frac{1}{m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{3}{m}\frac{\varpi}{2}\ldots\mathrm{Sin}.\frac{2m-3}{m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{2m-1}{m}\frac{\varpi}{2}. \quad \text{(B)}$$

$$\sqrt{2}=2^{m}.\mathrm{Sin}.\frac{1}{2m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{3}{2m}\frac{\varpi}{2}..\mathrm{Sin}.\frac{2m-3}{2m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{2m-1}{2m}\frac{\varpi}{2}. \quad \text{(A)}$$

La formule (B) est un peu plus élégante que celle de Lhuilier, que Lacroix a désignée par la même lettre. La différence nait de ce qu'ici les valeurs de m commencent à l'unité, tandis que, dans la formule de Lhuilier, elles commencent à zéro.

En concentrant, pour plus de briéveté, les seconds membres des équations (B) et (A), et multipliant la première par 2, elles deviennent

$$2=2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\varpi\right\}, \qquad \text{(B')}$$

$$\sqrt{2}=2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}; \qquad \text{(A')}$$

et il est très-remarquable qu'on obtient la racine quarrée du produit

$$2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\varpi\right\},$$

par la simple substitution de $\frac{\varpi}{2}$ à ϖ.

De cette relation on peut conclure, en quarrant l'équation (A'),

(*) Voyez le n.° 1094, page 431, équations (A) et (B).

$$2^m P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou, en se rappelant que $\text{Sin.}2x=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x$

$$2^m P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{2\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\varpi}{2}\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou, en remarquant que 2 est m fois facteur dans le second membre,

$$P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\},$$

ou encore

$$P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}P\left\{\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou enfin

$$P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}; \qquad (C)$$

d'où résulte encore

$$P\left\{\text{Tang.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=1.$$

Posant $\frac{\varpi}{4m}=\omega$, d'où $m=\frac{\varpi}{4\omega}$, et $2m-1=\frac{\varpi-2\omega}{2\omega}$, il viendra, en substituant dans l'équation (C) et développant,

$$\text{Sin.}\omega\text{Sin.}3\omega\text{Sin.}5\omega\ldots\ldots\text{Sin}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)=\text{Cos.}\omega\text{Cos.}3\omega\text{Cos.}5\omega\ldots\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega); \qquad (D)$$

équation qui, au surplus, se vérifie aisément d'elle-même, en observant que

$$\begin{aligned}
&\text{Sin.}\ \omega=\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\ \omega),\\
&\text{Sin.}3\omega=\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi\omega-3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-3\omega)=\text{Cos.}3\omega,\\
&\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\ \omega)=\text{Cos.}\ \omega.
\end{aligned}$$

Si l'on divise le premier membre de l'équation (D) par le second, et *vice versâ*, il viendra

$$\text{Tang.}\varpi\text{Tang.}3\varpi\ldots\text{Tang.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\varpi)=\text{Cot.}\varpi\text{Cot.}3\varpi\ldots\text{Cot.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\varpi)=1\ .$$

L'équation (A) peut être écrite ainsi

$$1=2^{\frac{2m-1}{2}}.\text{Sin.}\frac{\varpi}{4m}\ \text{Sin.}\frac{3\varpi}{4m}.\text{Sin.}\frac{5\varpi}{4m}\ldots\ldots\text{Sin.}\frac{(2m-1)\varpi}{4m}\ ;$$

en y mettant pour m la valeur $\frac{\varpi}{4\omega}$, et ayant égard à l'équation (D), elle devient

$$\frac{1}{2^{\frac{\varpi-2\omega}{4\omega}}}=\text{Sin.}\omega\text{Sin.}3\omega\ldots\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)=\text{Cos.}\omega\text{Cos.}3\omega\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\ .$$

L'équation (II) divisée par $\text{Sin.}\frac{x}{m}$ devient

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}\frac{x}{m}}=2^{m-1}.\text{Sin.}\frac{\varpi+x}{m}\ \text{Sin.}\frac{2\varpi+x}{m}\ \text{Sin.}\frac{3\varpi+x}{m}\ldots\text{Sin.}\frac{(m-1)\varpi+x}{m}\ ;$$

faisant, dans cette équation, $x=0$; en remarquant qu'alors on doit avoir

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}\frac{x}{m}}=m\ ,\ (*)$$

il viendra, en divisant par 2^{m-1},

$$\frac{m}{2^{m-1}}=\text{Sin.}\frac{\varpi}{m}\ \text{Sin.}\frac{2\varpi}{m}\ \text{Sin.}\frac{3\varpi}{m}\ldots\text{Sin.}\frac{(m-1)\varpi}{m}\ ;$$

posant alors $\frac{\varpi}{m}=\omega$, d'où $m=\frac{\varpi}{\omega}$, il viendra

$$\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}.\omega}=\text{Sin.}\omega\text{Sin.}2\omega\text{Sin.}3\omega\ldots\ldots\text{Sin.}(\varpi-\omega)\ .\qquad\text{(E)}$$

(*) Voyez mon *Traité de calcul différentiel et intégral*, art. 60.

Or, par l'hypothèse, m étant un nombre entier, $\frac{\varpi}{\omega}$ doit en être un aussi ; c'est-à-dire, que ω est un sous-multiple de ϖ. Si, en outre, il est aussi un sous-multiple de $\frac{1}{2}\varpi$, ce qui aura toujours lieu, dans la nouvelle division du cercle, toutes les fois que ω, sous-multiple de ϖ, ne sera pas 8° ou 40° ; la série (E) aura un nombre $\frac{\varpi}{\omega}-1$ impair de facteur ; et le $\left(\frac{\varpi}{2\omega}\right)^{me}$ facteur, qui sera le moyen entre tous, sera $\text{Sin.}\frac{1}{2}\varpi=1$; de plus, les $\frac{\varpi}{2\omega}-1$ facteurs situés à la droite de celui-là, seront respectivement égaux aux $\frac{\varpi}{2\omega}-1$ facteurs situés à sa gauche, puisque la somme des arcs également distants des extrêmes et constamment égale à ϖ. Donc, en extrayant la racine quarrée des deux membres de l'équation (E), il viendra

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}.\omega}}\left\{\begin{aligned}&=\text{Sin.}\omega\,\text{Sin.}2\omega\,\text{Sin.}3\omega\ldots\ldots\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\ ,\\&=\text{Cos.}\omega\,\text{Cos.}2\omega\,\text{Cos.}3\omega\ldots\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\ ;\end{aligned}\right.$$

d'où on tire encore les équations

$$1\left\{\begin{aligned}&=\text{Tang.}\omega\,\text{Tang.}2\omega\,\text{Tang.}3\omega\ldots\ldots\text{Tang.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\\&=\text{Cot.}\,\omega\ \text{Cot.}\,2\omega\ \text{Cot.}\,3\omega\ldots\ldots\ \text{Cot.}\ (\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\end{aligned}\right.$$

Si nous posons $\omega=1°$; nous aurons

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}.\omega}}=\sqrt{\frac{200}{2^{199}}}=\sqrt{\frac{400}{2^{200}}}=\frac{20}{2^{100}}=\frac{10}{2^{99}}\ ;$$

en passant donc aux logarithmes de Briggs, nous trouverons

$$\text{Log.Sin.}1°+\text{Log.Sin.}2°+\text{Log.Sin.}3°+\ldots\ldots+\text{Log.Sin.}99°=1-99°\text{Log.}2\ ,\quad\text{(F)}$$

$$\text{Log.Tang.}1°+\text{Log.Tang.}2°+\text{Log.Tang.}3.°+\ldots+\text{Log.Tang.}99°=0\ ;\quad\text{(G)}$$

mais si au rayon 1 on veut substituer le rayon 1 00000 00000, comme on le fait dans les tables trigonométriques, afin d'éviter les logarithmes négatifs, il faudra ajouter 99 dixaines au second membre

membre de l'équation (F) ; si de plus on veut pousser jusqu'à 100°, cette équation deviendra

$$\text{Log.Sin.}1^\circ+\text{Log.Sin.}2^\circ+\text{Log.Sin.}3^\circ+\ldots+\text{Log.Sin.}100^\circ=1001-99\text{Log.}2\,,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log.Sin.}1^\circ+\text{Log.Sin.}2^\circ+\text{Log.Sin.}3^\circ+\ldots+\text{Log.Sin.}100^\circ=971,1983.$$

Ainsi pour le rayon 1 .00000 00000 et la division centésimale, le produit des sinus naturels de tous les degrés du quart de cercle est un nombre qui a 972 chiffres à sa partie entière.

Si ω, sous-multiple de ϖ, ne l'est pas de $\frac{1}{2}\varpi$, ce qui aura lieu seulement, comme nous l'avons déjà observé, lorsque ω sera égal à 40° ou à 8° ; alors le second membre de l'équation (E) aura un nombre pair de facteurs ; et sa première moitié, dont le dernier facteur sera $\text{Sin}\frac{1}{2}(\varpi-\omega)$, sera égale à la dernière, dont le premier facteur sera $\text{Sin.}\frac{1}{2}(\varpi+\omega)$. Extrayant donc la racine quarrée des deux membres, il viendra

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}\cdot\omega}}=\text{Sin.}\omega\text{Sin.}2\omega\text{Sin.}3\omega\ldots\ldots\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varpi-\omega)\,.$$

En faisant successivement $\omega=40^\circ$ et $\omega=8^\circ$, on aura

$$\text{Sin.}40^\circ\text{Sin.}80^\circ=\tfrac{1}{4}\sqrt{5}\,;$$

$$\text{Sin.}8^\circ.\text{Sin.}16^\circ.\text{Sin.}24^\circ.\text{Sin.}32^\circ\ldots\text{Sin.}96^\circ=\frac{5}{4096}\,.$$