BIDONE

Solutions du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 256 de ce volume. Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 374-382
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__374_1>

Solutions du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 256 de ce volume.

proposés à la page 256 de ce volume.

ENONCÉ *I. A un même triangle donné quelconque, on peut inscrire une infinité de systèmes de trois cercles dont les rayons soient proportionnels à des droites données, et dont chacun touche les deux autres et un côté du triangle donné.*

On propose de construire le plus petit de ces systèmes ?

II. Au système de trois cercles donnés quelconques, se touchant deux à deux, on peut circonscrire une infinité de triangles semblables à un triangle donné, de manière que chaque côté du triangle touche un des cercles donnés.

On propose de construire le plus grand de ces triangles ?

Première solution ;

Par M. Bidone, professeur de mathématiques à l'académie de Turin.

Soit $AA'A''$ un triangle (fig. 10), et soient C, C', C'', les centres de trois cercles dont chacun touche les deux autres et un cote de ce triangle.

Je dis que, si le triangle $AA'A''$ est le plus grand, parmi tous ceux de son espèce, qui puisse être circonscrit au système des trois cercles dont les centres sont C, C', C'', ces cercles seront, à l'inverse, les plus petits de tous ceux qui, ayant leurs rayons dans le même rapport que les leurs, puissent être inscrits au triangle $AA'A''$, de manière que chacun d'eux touche les deux autres et un côté du triangle.

Si, en effet, on pouvait, sous les conditions données, inscrire au triangle $AA'A''$ trois cercles plus petits que ceux dont les centres sont C, C', C''; en faisant croître proportionnellement les dimensions de la figure, on parviendrait à rendre ces trois cercles égaux à ceux dont les centres sont C, C', C''; et alors le triangle, devenu plus grand que $AA'A''$ se trouverait circonscrit comme lui à ces trois cercles, ce qui est contre l'hypothèse.

Je dis, en second lieu, que réciproquement, si le système des cercles dont les centres sont C, C', C'' est le plus petit de tous ceux de même espèce qu'il soit possible d'inscrire, sous les conditions données, au triangle $AA'A''$, ce triangle sera, à l'inverse, le plus grand parmi tous ceux de son espèce, qu'il soit possible de circonscrire, sous les mêmes conditions, au système de ces trois cercles.

Si, en effet, on pouvait, sous les conditions données, circonscrire à ce système un triangle plus grand que $AA'A''$, en faisant décroitre proportionnellement les dimensions de la figure, on parviendrait à rendre ce triangle égal à $AA'A''$, et alors le système des trois cercles devenus plus petits, se trouverait comme celui des trois cercles dont les centres sont C, C′, C″, inscrit à ce triangle, ce qui est contre l'hypothèse.

Il résulte de ces considérations, et de ce que, sur une ligne donnée, on peut toujours construire une figure semblable à une figure donnée, que chacun des deux problèmes que présente la question proposée, peut, par de simples proportions, être ramené à l'autre. Or, comme un problème est réputé résolu, lorsqu'on en a ramené la solution à celle d'un autre problème qu'on sait résoudre, et comme d'ailleurs le dernier des deux problèmes proposés permet une construction facile, c'est le seul dont nous nous occuperons ici.

Soient donc (fig. 10) C, C′, C″ les centres de trois cercles donnés, se touchant deux à deux; et proposons-nous de circonscrire à leur système, un triangle donné d'espèce, dont chaque côté touche un de ces cercles, et qui soit le plus grand possible. Concevons que le problème soit résolu, et que le triangle cherché soit AA′A″. Par les centres C, C′, C″ soient menées les droites B′B″, B″B, BB′, respectivement parallèles à A′A″, A″A, AA′ et formant par leur concours le triangle BB′B″, semblable à AA′A″. Soient enfin joints les centres C, C′, C″ par des droites qui formeront un triangle CC′C″, inscrit à BB′B″.

Cela posé, je dis que le triangle BB′B″ est le plus grand de tous les triangles semblables à AA′A″ qu'il soit possible de circonscrire au triangle donné CC′C″. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait, au triangle CC′C″, circonscrire un triangle semblable à AA′A″ plus grand que BB′B″; et, en menant au cercle des tangentes parallèles aux côtés de ce dernier triangle, ces tangentes formeraient un nouveau triangle circonscrit aux trois cercles, semblable à AA′A″, et évidemment plus grand que lui; en sorte que, contrairement à l'hypothèse, ce dernier ne serait pas celui qui résout le problème.

Le dernier des deux problèmes proposés, et conséquemment le premier, se trouve donc ramené au suivant: *A un triangle donné*, *circonscrire un autre triangle, donné d'espèce, qui soit le plus grand possible ?*

Or, on sait résoudre ce problème (*), et on sait, de plus, qu'il n'admet qu'une solution, si l'on indique à quel côté du triangle donné doit répondre chacun des angles du triangle cherché, qu'il en a six dans le cas contraire, et qu'alors conséquemment il donne lieu à un *maximum-maximorum* qu'on obtiendra de la manière suivante, ainsi qu'il sera démontré plus loin.

Sur les côtés du triangle $CC'C''$, pris pour cordes, et extérieurement à ce triangle, soient décrits des arcs de cercles respectivement capables des angles donnés du triangle cherché $BB'B''$, de manière que l'arc capable du plus petit angle, réponde au plus grand des trois côtés du triangle donné $CC'C''$, et que l'arc capable du plus grand angle, réponde à son plus petit côté ; menant alors, par les points C, C', C'', des droites respectivement parallèles à celles qui joignent les centres de ces arcs, ces droites formeront, par leur rencontre, le triangle cherché $BB'B''$.

Pour achever la solution du dernier des deux problèmes proposés, il suffira donc de mener aux cercles donnés des tangentes respectivement parallèles aux côtés du triangle $BB'B''$; ces droites formeront, par leur rencontre, le triangle demandé $AA'A''$.

Si c'est, au contraire, le premier problème qu'on veut résoudre, on décrira d'abord arbitrairement trois cercles, se touchant deux à deux, et ayant leurs rayons dans le rapport des droites données. On circonscrira ensuite, par ce qui vient d'être dit, au système de ces trois cercles, un triangle semblable au triangle donné, et le plus grand possible. Construisant enfin une figure semblable à celle qu'on aura obtenue, mais dans laquelle le triangle circonscrit soit égal au triangle donné, le problème se trouvera résolu.

Dans le cas où les rayons des trois cercles donnés ou cherchés doivent être égaux, et dans celui où le triangle donné ou cherché

(*) Voyez les pages 88 et suivantes de ce volume.

doit être équilatéral, il n'y a plus lieu au *maximum-maximorum*, ni au *minimum-minimorum*; parce que les six solutions du problème se réduisent alors à une solution unique.

Il reste à prouver qu'en construisant de la manière qui vient d'être indiquée, on obtient, en effet, le *minimum-minimorum*, pour le premier problème, et conséquement le *maximum-maximorum* pour le second.

Soit CC′C″ (fig. 11) un triangle donné, dont les angles soient γ, γ', γ''; soient décrits, sur les côtés de ce triangle, pris pour cordes, et extérieurement, des arcs de cercles respectivement capables des trois angles β, β', β'' d'un triangle donné quelconque; soient D, D′, D″ les centres de ces arcs, et soient joints ces points par des droites qui formeront le triangle DD′D″; soit enfin circonscrit au triangle CC′C″ un triangle BB′B″ dont les cotés soient respectivement parallèles à ceux du triangle DD′D″.

Soient joints CD′, CD″; et des points D′, D″ soient abaissées sur CC″ et CC′ les perpendiculaires D′m' et D″m''; les points m' et m'' seront les milieux de ces droites; les angles m'D′C et m''D″C seront respectivement égaux aux angles β' et β''; et on aura de plus D′D″ moitié de B′B″. (*)

Nommant donc c, c', c'' les trois côtés du triangle CC′C″ et b, b', b'' ceux du triangle BB′B″; on aura, q étant le quadrans,

$$\mathrm{D'D''}=\tfrac{1}{2}b\,,\ \mathrm{Ang.D'CD''}=[\gamma+(q-\beta')+(q-\beta'')]=\beta+\gamma\,,$$

$$\mathrm{CD'}=\frac{c'}{2\mathrm{Sin.}\beta'}\,,\qquad \mathrm{CD''}=\frac{c''}{2\mathrm{Sin.}\beta''}\,.$$

Or, le triangle D′CD″ donne

$$\overline{\mathrm{D'D''}}^2=\overline{\mathrm{CD'}}^2-2\mathrm{CD'.CD''}.Cos.\mathrm{D'CD''}+\overline{\mathrm{CD''}}^2\,;$$

substituant donc, il viendra

(*) Voyez la page 24 de ce volume.

$$\frac{b^2}{4}=\frac{c'^2}{4\text{Sin.}^2\beta'}-\frac{2c'c''}{4\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''}\text{Cos.}(\beta+\gamma)+\frac{c''^2}{4\text{Sin.}^2\beta''},$$

c'est-à-dire,

$$b^2=\frac{c'^2\text{Sin.}^2\beta''-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)+c''^2\text{Sin.}^2\beta'}{\text{Sin.}^2\beta'\text{Sin.}^2\beta''}.$$

Mais, en désignant par C l'aire du triangle CC′C″, on a

$$c'^2\text{Sin.}^2\beta''=c'^2\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}(\beta+\beta')$$
$$=c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$
$$-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)=-2c'c''\text{Cos.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Cos.}\gamma$$
$$+2c'c''.\text{Sin.}\gamma.\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$=-2c'c''\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}\gamma+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$
$$c''^2\text{Sin.}^2\beta'=c''^2\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}(\beta+\beta'')$$
$$=c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+c''^2\text{Cos.Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$

donc

$$c'^2\text{Sin.}^2\beta''-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)+c''^2\text{Sin.}^2\beta'$$
$$=c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+(c'^2-2c'c''\text{Cos.}\gamma+c''^2)\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$=c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin}\beta'\text{Sin.}\beta''.$$

Posant donc

$$\text{M}^2=\left\{\begin{array}{l} c^2\text{Cos.}\beta\ \text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta'' \\ +c'^2\text{Sin.}\beta\ \text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta'' \\ +c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta'' \end{array}\right.,$$

il viendra

$$b=\frac{\text{M}}{\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''},\quad b'=\frac{\text{M}}{\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}\beta},\quad b''=\frac{\text{M}}{\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'},$$

Si l'on désigne par B l'aire du triangle BB′B″, on aura

$$B=\frac{bb'\text{Sin.}\beta''}{2}=\frac{\text{M}^2}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''},$$

et par conséquent

$$B=2C+\frac{c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''}\,.$$

Présentement pour que ce triangle soit un *maximum* absolu, il faut qu'on ne puisse faire subir aux angles β, β', β'' aucune permutation sans en diminuer la surface ; il faut donc qu'on ait

$$2C+\frac{c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''}$$

$$>2C+\frac{c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}\beta'+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta''\text{Sin.}\beta'+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}\beta'}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}\beta'}\,;$$

inégalité qui, en remarquant que $\text{Sin.}\beta$, $\text{Sin.}\beta'$, $\text{Sin.}\beta''$ sont essentiellement positifs, devient, en transposant, réduisant et chassant le dénominateur,

$$(c'^2-c''^2)\text{Sin.}(\beta''-\beta')>0\ ;$$

il faut donc que

$$c'-c''\quad\text{et}\quad\beta''-\beta'\,,$$

soient de mêmes signes, ou qu'en supposant $c'>c''$ on ait $\beta'<\beta''$; ainsi l'angle β étant déterminé à correspondre au côté C, il faut que le plus petit des deux autres angles corresponde au plus grand des deux autres côtés, *et vice versâ* ; d'où il est facile de conclure la construction indiquée ci-dessus.

Nous croyons devoir faire remarquer, en passant, que la valeur de B peut être mise sous cette forme très-simple

$$B=2C+\tfrac{1}{2}\{c^2\text{Cot}\beta+c'^2\text{Cot.}\beta'+c''^2\text{Cot.}\beta''\}\,.$$

Si l'on suppose, au contraire, donnés les côtés du triangle BB'B'' et les angles du triangle CC'C'', en posant, pour abréger

$$N^2=\left\{\begin{array}{l} b^2\text{Cos.}\gamma\text{Sin.}\gamma'\text{Sin.}\gamma'' \\ +b'^2\text{Sin.}\gamma\text{Cos.}\gamma'\text{Sin.}\gamma''+4B\text{Sin}\,\gamma\text{Sin.}\gamma'\text{Sin.}\gamma'' \\ +b''^2\text{Sin.}\gamma\text{Sin.}\gamma'\text{Cos.}\gamma'' \end{array}\right.,$$

on trouvera

$$c=\frac{2B\text{Sin.}\gamma}{N}\,,\quad c'=\frac{2B\text{Sin.}\gamma'}{N}\,,\quad c''=\frac{2B\text{Sin.}\gamma''}{N}\,,$$

d'où

d'où on conclura

$$C=\frac{2B^2}{b^2\text{Cot.}\gamma+b'^2\text{Cot.}\gamma'+b''^2\text{Cot.}\gamma''+4B}\ ;$$

de cette valeur de C et de celle de B resulte cette relation remarquable

$$\frac{C}{B}=\frac{c^2\text{Cot.}\beta+c'^2\text{Cot.}\beta'+c''^2\text{Cot.}\beta''}{b^2\text{Cot.}\gamma+b'^2\text{Cot.}\gamma'+b''^2\text{Cot.}\gamma''}\ .$$

A l'aide de ce qui précède, on parviendra facilement aux résultats suivants.

I. Soient a, a', a'' les trois côtés d'un triangle donné, A son aire, λ, λ', λ'' des droites auxquelles les rayons des trois cercles inscrits doivent être proportionnels, et r, r', r'' ces rayons ; en posant, pour abréger,

$$Q^2=\left\{\begin{array}{l}\ \ \tfrac{1}{2}a^2[(\lambda+\lambda')^2+(\lambda+\lambda'')^2-(\lambda'+\lambda'')^2]\\ +\tfrac{1}{2}a'^2[(\lambda+\lambda')^2+(\lambda'+\lambda'')^2-(\lambda+\lambda'')^2]+8A\sqrt{\lambda\lambda'\lambda''(\lambda+\lambda'+\lambda'')}\ ,\\ +\tfrac{1}{2}a''[(\lambda+\lambda'')^2+(\lambda'+\lambda'')^2-(\lambda+\lambda')^2]\end{array}\right.$$

il viendra

$$r=\frac{2\lambda A}{\lambda a+\lambda'a'+\lambda''a''+Q}\ ,$$

$$r'=\frac{2\lambda' A}{\lambda a+\lambda'a'+\lambda''a''+Q}\ ,$$

$$r''=\frac{2\lambda'' A}{\lambda a+\lambda'a'+\lambda''a''+Q}\ .$$

II. Si au contraire, les rayons r, r', r'' des trois cercles étant donnés, on demande les côtés a, a', a'' du plus grand triangle circonscrit dont les angles soient α, α', α'' ; en posant, pour abréger,

$$P^2=\left\{\begin{array}{l}\ \ (r+r')^2\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Cos.}\alpha''\\ +(r'+r'')^2\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''+4\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''\sqrt{rr'r''(r+r'+r'')}\ ,\\ +(r''+r)^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''\end{array}\right.$$

on trouvera

$$a=\frac{r\text{Sin.}\alpha+r'\text{Sin.}\alpha'+r''\text{Sin.}\alpha''+P}{\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''}\ ,$$

$$a' = \frac{r\text{Sin.}\alpha + r'\text{Sin.}\alpha' + r''\text{Sin.}\alpha'' + P}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha''},$$

$$a'' = \frac{r\text{Sin.}\alpha + r'\text{Sin.}\alpha' + r''\text{Sin.}\alpha'' + P}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'}.$$