
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LEGRAND

ROCHAT

PENJON

Questions résolues. Solutions du premier des deux problèmes de géométrie, proposé à la page 256 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 369-374

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__369_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solutions du premier des deux problèmes de géométrie ,
proposé à la page 256 de ce volume ;*

Par MM. LEGRAND , ROCHAT et PENJON. (*)



AVANT d'en venir à la solution du problème proposé , MM. Legrand , professeur de mathématiques , et Rochat , professeur de navigation à Saint-Brieux , ont cru nécessaire d'établir d'abord un théorème préparatoire. Ce théorème , qui peut être considéré comme un des points fondamentaux de la *Géométrie de la règle* , a été énoncé par M. Legrand , ainsi qu'il suit :

THÉOREME. Soit un quadrilatère complet quelconque , dont les côtés soient indéfiniment prolongés ; que ses trois diagonales soient aussi indéfiniment prolongées ; elles se couperont , deux à deux , en trois points. Par chacun de ces points soient menées des droites aux deux extrémités de la diagonale sur laquelle il ne se trouve pas , on aura ainsi six droites dont chacune déterminera deux points sur deux côtés du quadrilatère ; en sorte qu'on aura en tout douze de ces points , distribués , trois par trois , sur les quatre côtés de ce quadrilatère.

(*) M. Penjon a adressé aux Rédacteurs une solution du problème de la page 318 de ce volume ; mais cette solution est parvenue trop tard pour pouvoir être publiée avec les autres ; elle diffère peu , au surplus , de celle de M. Rochat.

(Note des éditeurs.)

Or, il arrivera que ces douze points se trouveront, deux à deux, situés sur douze nouvelles droites, concourant quatre à quatre aux trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère proposé.

Les démonstrations de ce théorème, données par MM. Legrand et Rochat, sont, l'une et l'autre, purement analytiques, et reviennent à peu près à ce qui suit.

Démonstration. Soit $AA'A''B''$ (fig. 5) le quadrilatère proposé, dont les diagonales sont AB , $A'B'$, $A''B''$, se coupant, savoir : AB et $A'B'$ en C'' , AB et $A''B''$ en C' , $A'B'$ et $A''B''$ en C . Soit joint le point C aux points A et B par deux droites dont la première coupe les côtés BA'' , BA' en n et q , et dont la seconde coupe les côtés AA'' , AB' en m et p . Comme la construction serait évidemment la même pour le point C' , relativement à la diagonale $A'B'$, et pour le point C'' , relativement à la diagonale $A''B''$; il suffit de démontrer 1.^o que les droites np et mq concourent au point C' ; 2.^o que les droites mn et qp concourent au point C'' .

Soient prises $A''A$ pour axe des x et $A''B$ pour axe des y , et soient

$$A''A=a, \quad A''A'=a', \quad A''B=b, \quad A''B'=b';$$

on aura, d'après cela, pour les équations

$$\text{du côté } AB' \dots\dots\dots ay+bx=ab',$$

$$\text{du côté } A'B \dots\dots\dots a'y+bx=a'b,$$

$$\text{de la diagonale } AB \dots\dots\dots ay+bx=ab,$$

$$\text{de la diagonale } A'B' \dots\dots\dots a'y+bx=a'b';$$

en conséquence, les équations du point B'' seront

$$x=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}, \quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'};$$

l'équation de la troisième diagonale $A''B''$ sera donc

$$aa'(b-b')y-bb'(a-a')x=0.$$

D'après cela on trouvera, pour les équations

$$\text{du point C ,} \quad x = \frac{aa'(b-b')}{a(b-b') + b(a-a')} , \quad y = \frac{bb'(a-a')}{a(b-b') + b(a-a')} ,$$

$$\text{du point C' ,} \quad x = \frac{aa'(b-b')}{a'(b-b') + b'(a-a')} , \quad y = \frac{bb'(a-a')}{a'(b-b') + b'(a-a')} ,$$

$$\text{du point C'' ,} \quad x = -\frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b} , \quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b} ;$$

on aura donc pour les équations

$$\text{de CA ,} \quad a(2b-b')y + bb'x = ab'b' ,$$

$$\text{de CB ,} \quad aa'y + b'(2a-a')x = aa'b' ;$$

d'après quoi on trouvera les équations des points m , n , p , q , ainsi qu'il suit

$$\begin{aligned} \text{pour } m \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{aa'}{2a-a'} , \\ y = 0 \end{array} \right. ; & \quad \text{pour } p \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{aa'(b-b')}{2ab-a'(b+b')} , \\ y = \frac{2bb'(a-a')}{2ab-a'(b+b')} ; \end{array} \right. \\ \text{pour } n \left\{ \begin{array}{l} x = 0 , \\ y = \frac{bb'}{2b-b'} ; \end{array} \right. & \quad \text{pour } q \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2aa'(b-b')}{2ab-b'(a+a')} , \\ y = \frac{bb'(a-a')}{2ab-b'(a+a')} ; \end{array} \right. \end{aligned}$$

il est remarquable que la situation du point m est indépendante de celles des points B et B' et que celle du point n est indépendante de celles des points A et A' .

D'après ces résultats , les équations des quatre droites mn , pq , $m\gamma$, np , pourront être mises sous cette forme

$$\text{pour } mn , \quad \frac{aa'}{2a-a'} \left\{ y - \frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b} \right\} + \frac{bb'}{2b-b'} \left\{ x + \frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b} \right\} = 0 ,$$

$$\text{pour } pq , \quad \frac{aa'}{2a+a'} \left\{ y - \frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b} \right\} + \frac{bb'}{2b+b'} \left\{ x + \frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b} \right\} = 0 ,$$

$$\text{pour } np, \frac{aa'}{2a-3a'} \left\{ y - \frac{bb'(a-a')}{a'(b-b') + b'(a-a')} \right\} - \frac{bb'}{2b-b'} \left\{ x - \frac{aa'(b-b')}{a'(b-b') + b'(a-a')} \right\} = 0,$$

$$\text{pour } mq, \frac{aa'}{2a-a'} \left\{ y - \frac{bb'(a-a')}{a'(b-b') + b'(a-a')} \right\} - \frac{bb'}{2b-b'} \left\{ x - \frac{aa'(b-b')}{a'(b-b') + b'(a-a')} \right\} = 0;$$

or, on voit que les deux premières équations sont satisfaites par les coordonnées du point C'' , et que les deux dernières le sont par les coordonnées du point C' .

Soient r , s , t , v les intersections de mn et CA'' , de np et CB' ; de pq et CB'' , de mq et CA' : ces quatre points étant situés par rapport au quadrilatère $mnpq$ de la même manière que le sont les quatre points m , n , p , q par rapport au quadrilatère $A'A'B'B'$, on en peut conclure, par ce qui précède, que les points r , s ainsi que les points v , t sont en ligne droite avec le point B , et que les points r , v ainsi que les points s , t sont en ligne droite avec le point A .

En général, en remarquant que la propriété qui est contenue dans l'énoncé du théorème appartient non seulement au quadrilatère proposé, mais encore à tous les quadrilatères que forment les lignes de la figure, prises quatre à quatre, on trouvera une multitude de points qui jouissent de la propriété d'être trois à trois sur une même ligne droite; et c'est une remarque qui a été faite également par MM. Legrand et Rochat.

Le théorème qui vient d'être démontré se déduit aisément de la proposition suivante :

Si par un point P , pris comme on le voudra sur le plan d'un angle quelconque ASB (fig. 6), on mène tant de droites qu'on voudra, coupant l'un des côtés de l'angle en A , A' , A'' ..., et l'autre en B , B' , B'' ..., et que C , C' , C'' ..., soient les points d'intersection des diagonales des quadrilatères $A'A'B'B''$, $A''ABB''$, $A'ABB'$...; ces points C , C' , C'' ... seront tous en ligne droite entre eux et avec le sommet S de l'angle dont il s'agit.

Cette dernière proposition se démontre facilement, en considérant
que

que le quadrilatère $A''ABB''$ est toujours, pour une situation convenable de l'œil et du tableau, la perspective d'un rectangle $A''ABB''$ (fig. 7); que $B'A'$ (fig. 6), concourant au même point que BA et $B''A''$, doit être la perspective d'une parallèle $B'A'$ (fig. 7) à BA et $B''A''$; que conséquemment les points C , C' , C'' (fig. 6) doivent être les perspectives des centres C , C' , C'' (fig. 7) des rectangles $A''A'B'B''$, $A''ABB''$, $A'ABB'$; et que ces centres se trouvant sur une parallèle à AA'' et BB'' , les perspectives de ces trois droites doivent concourir en un même point S . (fig. 6)

Ce tour de démonstration, outre son extrême brièveté, a encore l'avantage précieux de faire apercevoir sur-le-champ, dans la figure 6, une multitude de points qui doivent se trouver en ligne droite.

On pourrait aussi démontrer la même proposition en observant que, par une propriété connue des lignes du second ordre, et qui a été employée, avec avantage, par M. Rochat lui-même (*), cette proposition serait vraie, si l'on substituait une quelconque de ces lignes à l'angle ASB (fig. 6); et qu'ainsi elle doit avoir également lieu pour cet angle, puisque le système de deux droites est véritablement une ligne du second ordre.

M. Legrand remarque encore que, dans le cas particulier où les droites AB , $A'B'$, $A''B''$ (fig. 8), sont parallèles, elles sont toutes divisées en deux parties égales par la droite qui joint les points C , C' , C'' .

La solution du problème proposé est une conséquence toute naturelle des considérations précédentes : voici à quoi elle se réduit.

PROBLÈME. On connaît dans un quadrilatère complet (fig. 9) deux côtés $A''A$, $A''B$, la diagonale AB qui joint leurs extrémités, et le point C d'intersection des deux autres diagonales; il faut, avec la règle seulement, achever le quadrilatère ?

Construction. Soient m le point de concours de $A''A$ et BC , et n celui de $A''B$ et AC ; soit C'' le point de concours de AB et

(*) Voyez le tome 1.^{er} des *Annales*, page 342.

mn ; Soient enfin B' et A' les intersections de $A''B$ et $A''A$ avec $C''C$; les droites AB' , BA' seront les deux autres côtés du quadrilatère cherché.

Cette construction est aussi celle qu'indique M. Penjon , professeur de mathématiques au lycée d'Angers , qui renvoie , pour sa démonstration , à la *Geométrie de position* de M. Carnot , et à son *Mémoire sur les transversales*. Il remarque que ce n'est que par pure élégance qu'on opère sur le point donné C , et qu'en lui substituant tout autre point de la droite $A''C$ les points qu'on substituerait aux points m et n appartiendraient à une droite qui couperait le prolongement de AB au même point C'' où elle est coupée par mn . M. Penjon observe encore que , si le prolongement de $A''C$ passe par le milieu de AB , mn se trouvant alors parallèle à cette dernière droite , le problème ne peut plus être résolu avec la règle seulement.
