
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Troisième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 350-356

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__350_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Troisième solution ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soient A et B les deux joueurs , m et n leurs adresses respectives , p et q le nombre des jetons qu'ils ont chacun.

Soient, dans un état quelconque du jeu , x le nombre des jetons de A et Z_x son espérance; au coup suivant , cette espérance deviendra Z_{x+1} ou Z_{x-1} ; or , la probabilité qu'elle deviendra Z_{x+1} est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle deviendra Z_{x-1} est $\frac{n}{m+n}$. On aura donc, en vertu d'un principe connu (*),

$$Z_x = \frac{m}{m+n} Z_{x+1} + \frac{n}{m+n} Z_{x-1} ,$$

ou

$$mZ_{x+1} - (m+n)Z_x + nZ_{x-1} = 0 ;$$

équation linéaire du second ordre , aux différences finies , entre les deux variables x et Z .

Pour l'intégrer , nous ferons usage de la méthode donnée par M. Lagrange , dans les *Mémoires de l'académie de Berlin* , pour 1775 (**).

Posant donc

$$Z_x = \alpha^x , \text{ d'où } Z_{x+1} = \alpha^{x+1} , \quad Z_{x-1} = \alpha^{x-1} ;$$

il viendra , en substituant , et divisant par α^{x-1} ;

$$m\alpha^2 - (m+n)\alpha + n = 0 ,$$

(*) Voyez ci-dessus page 341.

(**) Voyez aussi le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral* de M. Lacroix , deuxième édition , pages 575 et suivantes.

(Notes des éditeurs.)

ou encore

$$(m\alpha - n)(\alpha - 1) = 0 ;$$

ce qui donne pour α ces deux valeurs

$$\alpha = 1 , \quad \alpha = \frac{n}{m}$$

d'où on conclura

$$\alpha^x = 1 , \quad \alpha^x = \left(\frac{n}{m}\right)^x$$

et par conséquent

$$Z_x = G + H \left(\frac{n}{m}\right)^x ,$$

G et H étant des constantes arbitraires.

Pour déterminer ces constantes, nous remarquerons 1.° que, si A n'avait plus aucun jeton, son espérance serait absolument nulle, puisque la partie se trouverait terminée au profit de B ; 2.° qu'au contraire s'il avait $p+q$ jetons ; son espérance se trouverait changée en certitude, puisque la partie se trouverait terminée à son profit. On voit donc que

$$\text{à } x=0 \quad \text{doit répondre } Z_x = 0 ,$$

$$\text{à } x=p+q \quad \text{doit répondre } Z_x = 1 ,$$

ce qui donne les deux équations

$$0 = G + H , \quad 1 = G + H \left(\frac{n}{m}\right)^{p+q} ;$$

d'où

$$G = \frac{m^{p+q}}{m^{p+q} - n^{p+q}} , \quad H = - \frac{m^{p+q}}{m^{p+q} - n^{p+q}} ;$$

substituant donc dans la valeur de Z_x , elle deviendra

$$Z_x = \frac{m^x - n^x}{m^{p+q} - n^{p+q}} \cdot m^{p+q-x} ;$$

or, lorsque A a x jetons, B en a $p+q-x$; désignant donc par y le nombre de jetons de B lorsque A en a x , on pourra écrire

$$Z_x = \frac{m^y(m^x - n^x)}{m^p + q - n^p + q}.$$

Si l'on désigne par Z_y l'espérance correspondante de B, on aura pareillement

$$Z_y = \frac{n^x(m^y - n^y)}{m^p + q - n^p + q}.$$

Telles sont donc les espérances respectives de A et B, lorsque le premier a x jetons et le second y ; si donc on désigne simplement par X et Y leurs espérances respectives lorsque le premier a p jetons et le second q , ainsi que la question le suppose, on aura

$$X = \frac{m^q(m^p - n^p)}{m^p + q - n^p + q}, \quad Y = \frac{n^p(m^q - n^q)}{m^p + q - n^p + q}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $n=m$, ces valeurs semblent devenir $\frac{0}{0}$; mais, si on les réduit d'abord à leur plus simple expression, on a pour ce cas

$$X = \frac{p}{p+q}, \quad Y = \frac{q}{p+q};$$

comme on pouvait bien le prévoir.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir servent à résoudre, non seulement la question proposée, mais encore les deux questions suivantes:

1.^o *Quelles doivent être les adresses respectives des deux joueurs, pour qu'en leur distribuant un nombre de jetons donné d'une manière déterminée, leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

2.^o *Les adresses respectives des deux joueurs étant connues, de quelle manière faut-il répartir entre eux un nombre de jetons donné, pour que leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

Nous allons donner un exemple de chacune de ces deux questions.

Exemple I. On donne 4 jetons à A et 2 à B ; quelles doivent être leurs adresses respectives pour que l'espérance de A soit à celle de B comme 850 est à 81 ?

On a ici $X = \frac{850}{850+81} = \frac{850}{931}$; on a de plus $p=4$, $q=2$, et $p+q=6$; donc

$$\frac{850}{931} = \frac{m^2(m^4-n^4)}{m^6-n^6} = \frac{m^2(m^2+n^2)}{m^4+m^2n^2+n^4} ;$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant par n^4 ,

$$81 \left(\frac{m}{n} \right)^4 + 81 \left(\frac{m}{n} \right)^2 - 850 = 0 .$$

Cette équation donne d'abord

$$\left(\frac{m}{n} \right)^2 = \frac{-81 \pm 531}{162} ;$$

rejetant la racine négative qui rendrait $\frac{m}{n}$ imaginaire, il vient

$$\left(\frac{m}{n} \right)^2 = \frac{25}{9} \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{n} = \frac{5}{3} ,$$

ainsi l'adresse de A doit être à celle de B dans le rapport de 5 à 3.

Exemple II. L'adresse de A étant à celle de B dans le rapport de 3 à 2, de quelle manière faut-il repartir 5 jetons entre eux pour que leurs espérances soient dans le rapport de 135 à 76 ?

On a ici $X = \frac{135}{135+76} = \frac{135}{211}$, $m=3$, $n=2$, $p+q=5$, d'où

$q=5-p$; donc

$$\frac{135}{211} = \frac{3^{5-p}(3^p-2^p)}{5^5-2^5} = \frac{3^{5-2p} \cdot 3^{2p}}{211} ,$$

ou

$$135 = 243 - 243 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^p ,$$

d'où

$$\left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

donc $p=2$ et conséquemment $q=3$; ainsi il faut donner 2 jetons à A et 3 à B.

Quant à la question proposée dans la note de la page 224 de ce volume, sa résolution complète exigerait une discussion dans laquelle nous n'avons pas actuellement le loisir de nous engager. (*)

Nous nous bornerons donc à remarquer que, x désignant toujours le nombre des jetons de A, à un coup quelconque, et t exprimant le nombre des coups qu'il reste encore à jouer, pour que la partie finisse; si l'on représente par $Z_{x,t}$ la probabilité que la partie finira précisément après ce nombre de coups, cette probabilité, au coup suivant, deviendra $Z_{x+1,t-1}$ ou $Z_{x-1,t-1}$; or, la probabilité qu'elle prendra la première de ces deux valeurs est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle prendra la seconde est $\frac{n}{m+n}$; on doit donc avoir

$$Z_{x,t} = \frac{m}{m+n} Z_{x+1,t-1} + \frac{n}{m+n} Z_{x-1,t-1};$$

équation du second ordre aux différences finies et partielles entre les deux variables indépendantes x , t et leur fonction Z . En posant, pour abréger,

$$m = M(m+n), \quad n = N(m+n),$$

elle devient

$$Z_{x,t} = MZ_{x+1,t-1} + NZ_{x-1,t-1}. \quad (\Delta)$$

Pour intégrer cette équation, on peut encore faire usage de la

(*) Ce problème a été aussi traité par M. Laplace: voyez les *Mémoires des Savans étrangers*; tome VII, page 153.

(Note des éditeurs.)

méthode de M. Lagrange déjà indiquée (*). Posant donc

$$Z_{x,t} = a \alpha^x \beta^t, \text{ d'où } Z_{x+1,t-1} = a \alpha^{x+1} \beta^{t-1}, \quad Z_{x-1,t-1} = a \alpha^{x-1} \beta^{t-1},$$

il viendra, en substituant, divisant par $a \alpha^{x-1} \beta^{t-1}$ et transposant,

$$M \alpha^2 - \beta \alpha + N = 0,$$

cette équation étant successivement résolue par rapport à α et à β donne

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4MN}}{2M}, \quad \beta = \frac{M \alpha^2 + N}{\alpha};$$

de là, en développant en série,

$$\alpha^x = \frac{1}{M^x} \left\{ \beta^x - \frac{x}{1} M N \beta^{x-2} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-3}{2} M^2 N^2 \beta^{x-4} - \dots \right\}$$

$$\beta^t = M^t \alpha^t + \frac{t}{1} M^{t-1} N \alpha^{t-2} + \frac{t}{1} \cdot \frac{t-1}{2} M^{t-2} N^2 \alpha^{t-4} + \dots;$$

donc

$$Z_{x,t} = \frac{a}{M^x} \left\{ \beta^{x+t} - \frac{x}{1} M N \beta^{x+t-2} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-3}{2} M^2 N^2 \beta^{x+t-4} - \dots \right\},$$

$$Z_{x,t} = a \left\{ M^t \alpha^{x+t} + \frac{t}{1} M^{t-1} N \alpha^{x+t-2} + \frac{t}{1} \cdot \frac{t-1}{2} M^{t-2} N^2 \alpha^{x+t-4} + \dots \right\};$$

or, on sait qu'à ces valeurs on peut substituer celles-ci

$$Z_{x,t} = \frac{1}{M^x} \varphi(x+t) - \frac{x}{1} \frac{N}{M^{x-1}} \varphi(x+t-2) + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-3}{2} \frac{N^2}{M^{x-2}} \varphi(x+t-4) - \dots,$$

$$Z_{x,t} = M^t \psi(x+t) + \frac{t}{1} M^{t-1} N \psi(x+t-2) + \frac{t}{1} \cdot \frac{t-1}{2} M^{t-2} N^2 \psi(x+t-4) + \dots,$$

puis encore celles-ci

$$Z_{x,t} = \frac{1}{M^x} Z_{0,x+t} - \frac{x}{1} \frac{N}{M^{x-1}} Z_{0,x+t-2} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-3}{2} \frac{N^2}{M^{x-2}} Z_{0,x+t-4} - \dots,$$

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; tome III.^e, page 248, n.^o 1012.

$$Z_{x,t} = M^t Z_{x+t,0} + \frac{t}{1} M^{t-1} N Z_{x+t-2,0} + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} M^{t-2} N^2 Z_{x+t-4,0} + \dots;$$

voilà donc deux intégrales de l'équation (Δ) , et il est même aisé de s'assurer, *a priori*, qu'elles la rendent identique; mais on voit qu'elles supposent que l'on connaisse l'une ou l'autre des premières bandes horizontale ou verticale de la table à double entrée dont cette équation exprime la loi.
