
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Troisième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 303-305

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__303_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Troisième solution ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soit ACB le triangle à projeter, (fig. 9) et supposons, ce qui est permis, que le plan de projection passe par le point C ; soit CD l'intersection du plan de cette projection avec le plan du triangle ACB ; des points A et B soient abaissées, sur le plan de projection, les perpendiculaires AA'', BB'' ; en joignant CA'', CB'', A''B'', le triangle A''CB'' sera la projection du triangle ACB, et les prolongemens des droites AB, A''B'' devront rencontrer en un même point D l'intersection des plans des deux triangles. Soient enfin prolongés les droites CA'', CB'' en A' et B', de telle sorte que CA', CB' soient respectivement égales aux deux côtés de l'angle égal à C dans le triangle donné d'espèce auquel la projection de ACB doit être semblable. En joignant A'B', cette droite sera parallèle à A''B'', et A'CB' sera ce triangle donné d'espèce.

Les triangles ACB, A'CB' étant donnés, posons

$$CA = a, \quad CB = b, \quad \text{Ang. } ACB = \gamma, \quad AB = c$$

$$CA' = a', \quad CB' = b', \quad \text{Ang. } A'CB' = \gamma', \quad A'B' = c'$$

en désignant par λ le rapport inconnu entre les côtés homologues des deux triangles A'CB', A''CB'', on aura

$$CA'' = \lambda a', \quad CB'' = \lambda b', \quad A''B'' = \lambda c' ;$$

on aura de plus

$$\text{Aire de } ACB = \frac{1}{2} ab \sin. \gamma, \quad \text{Aire de } A''CB'' = \frac{1}{2} \lambda^2 a' b' \sin. \gamma' ;$$

Si donc l'on désigne par θ l'inclinaison des deux plans, on aura, comme l'on sait

$$\lambda^2 a' b' \sin. \gamma' = ab \sin. \gamma \cos. \theta \quad (I)$$

Présentement, en faisant $AA''=x$, $BB''=y$, les triangles rectangles $AA''C$ et $BB''C$, et le quadrilatère bi-rectangle $AA''B''B$ donneront

$$x^2 = a^2 - \lambda^2 a'^2, \quad y^2 = b^2 - \lambda^2 b'^2, \\ (x-y)^2 = c^2 - \lambda^2 c'^2;$$

La dernière de ces équations étant retranchée de la somme de deux autres, il viendra

$$2xy = a^2 + b^2 - c^2 - \lambda^2(a'^2 + b'^2 - c'^2) = 2ab \cos \gamma - 2\lambda^2 a'b' \cos \gamma';$$

ou en divisant par 2 et quarrant

$$x^2 y^2 = a^2 b^2 \cos^2 \gamma - 2\gamma^2 a b a' b' \cos \gamma \cos \gamma' + \lambda^4 a'^2 b'^2 \cos^2 \gamma';$$

égalant cette valeur de $x^2 y^2$ à celle qui résulte de la multiplication des deux premières équations, en changeant les cosinus en sinus, il viendra

$$\lambda^4 a'^2 b'^2 \sin^2 \gamma - (a^2 b'^2 - 2aa'bb' \cos \gamma \cos \gamma' + a'^2 b^2) \lambda^2 + a^2 b^2 \sin^2 \gamma = 0;$$

substituant enfin pour λ^2 sa valeur donnée par l'équation (1), on aura

$$a^2 a' b^2 b' \sin \gamma \sin \gamma' \cos^2 \theta - ab(a^2 b'^2 - 2aa'bb' \cos \gamma \cos \gamma' + a'^2 b^2) \cos \theta \\ + a^2 a' b^2 b' \sin \gamma \sin \gamma' = 0.$$

Cette équation donnera, étant résolue, la valeur de $\cos \theta$. (*) d'où

(*) En posant, pour abréger,

$$a^2 b'^2 - 2aa'bb' \cos(\gamma + \gamma') + a'^2 b^2 = M^2, \\ a^2 b'^2 - 2aa'bb' \cos(\gamma - \gamma') + a'^2 b^2 = N^2;$$

d'où

$$a^2 b'^2 - 2aa'bb' \cos \gamma \cos \gamma' + a'^2 b^2 = \frac{1}{2}(M^2 + N^2); \\ 2aa'bb' \sin \gamma \cos \gamma = \frac{1}{2}(M^2 - N^2);$$

les valeurs de $\cos \theta$ prendront cette forme très-simple

$$\cos \theta = \frac{(M \pm N)^2}{M^2 - N^2} = \frac{M \pm N}{M \mp N};$$

or, comme l'adoption des signes supérieurs conduirait à l'absurdité $\cos \theta > 1$, il faudra simplement écrire

$$\cos \theta = \frac{M - N}{M + N};$$

ce qui fournit cette construction très-remarquable :

ou

on conclura celle de λ , au moyen de l'équation (I) ; alors on aura x et y par les équations

$$x^2 = a^2 - \lambda^2 a'^2, \quad y^2 = b^2 - \lambda^2 b'^2 ;$$

on pourra donc connaître l'angle BCB'' ; cet angle étant déterminé, l'angle trièdre rectangle dont les arêtes sont CB'' , CB , CD donnera

$$\text{Sin.}BCD = \frac{\text{Sin.}BCB''}{\text{Sin.}\theta},$$

et on aura enfin, dans le même angle trièdre

$$\text{Tang.}B''CD = \text{Tang.}BCD \text{Cos.}\theta ;$$

alors on pourra sans peine construire la situation respective des deux triangles ACB et $A''CB''$ sur le développement de l'angle dièdre formé par leurs plans.