ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Questions résolues. Analise d'une solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 297-301
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__297_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Analise d'une solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

N. B. Cette solution, parvenue trop tard pour pouvoir être jointe à celle fournie par M. Tédenat, page 285, ayant avec cette dernière plusieurs points de ressemblance, les rédacteurs des *Annales* se trouvent, à regret, contraints de n'en donner ici qu'une courte analise.

M. Lhuilier commence par rappeler ce principe connu ; que *le point de la circonférence d'un cercle dont la somme des distances à deux points pris hors du cercle, est la moindre possible, est celui dont la tangente ou la normale fait des angles égaux avec les droites menées du même point aux deux points dont il s'agit.* Il en conclut de suite que le point du plan d'un triangle dont la somme des distances à ses trois sommets est la plus petite, est un point tel que les droites qui le joignent à ces sommets, font, deux à deux, des angles égaux entre eux et au tiers de quatre angles droits. Il observe, à ce sujet, que, si l'un des angles du triangle vaut le tiers de quatre angles droits, son sommet sera le point cherché ; et que, si l'angle excède cette grandeur, le problème sera insoluble.

M. Lhuilier se propose ensuite de déterminer, lorsque le problème est possible, les longueurs des droites menées du point cherché aux sommets du triangle, ainsi que les angles que font ces droites avec ses côtés ; voici, à peu près de quelle manière il y parvient.

Soient $AA'A''$ (fig. 1) le triangle donné, et P le point cherché ; soit circonscrit un cercle au triangle et soient prolongés PA, PA', PA'', jusqu'à ce qu'elles rencontrent de nouveau la circonférence en B, B', B'' ; soit enfin formé le triangle $BB'B''$.

L'angle B ayant pour mesure la moitié de l'arc $B'B''$, et l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc $A'A''$, il s'ensuit que la somme des angles A, B, a pour mesure la demi-somme des arcs $A'A''$, $B'B''$, laquelle est aussi la mesure de l'angle $A'PA''$ ou $\frac{2}{3}\varpi$; et, comme il en irait de même pour les angles B', B'', comparés aux angles A', A'', on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} A+B&=\tfrac{2}{3}\varpi\,, \\ A'+B'&=\tfrac{2}{3}\varpi\,, \\ A''+B''&=\tfrac{2}{3}\varpi\,; \end{aligned}\right\}\quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} B&=\tfrac{2}{3}\varpi-A\,, \\ B'&=\tfrac{2}{3}\varpi-A'\,, \\ B''&=\tfrac{2}{3}\varpi-A''\,. \end{aligned}\right.$$

La similitude des triangles APA'', $B''PB$, d'une part, et celle des triangles $A'PA''$, $B''PB'$ de l'autre, donnent les deux équations

$$AP\times BB''=B''P\times AA''\,,\qquad A'P\times B'B''=B''P\times A'A''\,;$$

d'où on déduit, en divisant et réduisant,

$$\frac{AP}{A'P}\times\frac{BB''}{B'B''}=\frac{AA''}{A'A''}\qquad \text{ou}\qquad \frac{AP}{A'P}=\frac{AA''}{A'A''}\times\frac{\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi-A)}{\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi-A')}\,;$$

c'est-à-dire,

$$A'A''\times AP\times\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi-A')=AA''\times A'P\times\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi-A)\,;$$

enfin le triangle APA' donne, à cause de $\text{Cos.}P=-\frac{1}{2}$,

$$\overline{AP}^2+AP\times A'P+\overline{A'P}^2=\overline{AA'}^2.$$

La combinaison de ces deux équations fera donc connaître AP et AP' ; et on déterminera ensuite chacun des deux angles $PA'A$ et PAA', par les divers procédés connus de la trigonométrie.

Après cette digression, M. Lhuilier, revenant à la question principale, annonce que le point du plan d'un quadrilatère dont la somme des distances à ses sommets est la plus petite, est le point d'intersection des deux diagonales de ce quadrilatère. Il ne démontre pas cette proposition, mais sa démonstration résulte immédiatement de ce que la ligne brisée est plus longue que la ligne droite avec laquelle elle a ses extrémités communes. On sent, d'après cela, que le problème ne peut être résolu, pour le quadrilatère, qu'autant que ce quadrilatère est convexe.

Après avoir observé que, dans tout polygone qui a un centre de figure, ce centre est le point dont la somme des distances aux sommets du polygone est la plus petite, M. Lhuilier passe au problème général, non dans la vue de le résoudre, mais afin de découvrir, au moins, quelques propriétés du point cherché. Par les mêmes moyens qu'avait employé M. Tédenat, il parvient à cette proposition, savoir: que *le point cherché doit être tellement situé que la somme des cosinus des angles que formeront les droites qui le joindront aux points donnés, avec un axe quelconque situé dans leur plan, soit constamment zéro.*

Les rédacteurs des *Annales*, en publiant la solution de M. Tédenat, ont négligé de faire voir comment ce principe seul pouvait être employé à obtenir, entre les angles autour du point cherché, des équations en nombre égal à celui de ces angles; ils croient devoir ici réparer cette omission.

Soient A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1}, A_n les angles consécutifs autour du point cherché; si l'on prend successivement pour axe chacune des droites menées de ce point aux points donnés, l'angle que formera cette droite avec elle-même étant zéro, aura son cosinus $=+1$; il faudra donc que la somme des cosinus des angles que les autres formeront avec elle soit $=-1$; on aura ainsi

$$\begin{array}{l}
0=1+\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}(A_1+A_2+A_3)+\ldots+\text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}),\\
0=1+\text{Cos.}A_2+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}(A_2+A_3+A_4)+\ldots+\text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_n\quad),\\
0=1+\text{Cos.}A_3+\text{Cos.}(A_3+A_4)+\text{Cos.}(A_3+A_4+A_5)+\ldots+\text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_1\quad),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0=1+\text{Cos.}A_n+\text{Cos.}(A_n+A_1)+\text{Cos.}(A_n+A_1+A_2)+\ldots+\text{Cos.}(A_n+A_1+\ldots+A_{n-2});
\end{array}$$

on pourra, au surplus, simplifier ces équations en observant qu'on a:

$$\begin{array}{l}
\text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1})=\text{Cos.}A_n\ ,\ \text{Cos.}(A_1+A_2+\ldots+A_{n-2})=\text{Cos.}(A_{n-1}+A_n)\ ,\ \ldots.\ ,\\
\text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_n)=\text{Cos.}A_1\ ,\ \text{Cos.}(A_2+A_3+\ldots+A_{n-1})=\text{Cos.}(A_n+A_1)\ ,\ \ldots.\ ,\\
\text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_1)=\text{Cos.}A_2\ ,\ \text{Cos.}(A_3+A_4+\ldots+A_n)=\text{Cos.}(A_1+A_2)\ ,\ \ldots.\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \ldots.\ ;
\end{array}$$

on pourra aussi, si l'on veut, employer l'équation

$$A_1+A_2+A_3+\ldots.+A_n=2\varpi\ ;$$

mais en se rappelant qu'elle se trouve comportée par les n équations ci-dessus.

Si, par exemple, on n'a que trois points donnés, il viendra

$$\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}A_3=-1,\ \text{Cos.}A_2+\text{Cos.}A_1=-1,\ \text{Cos.}A_3-\text{Cos.}A_2=-1\ ;$$

d'où
$$\text{Cos.}A_1=\text{Cos.}A_2=\text{Cos.}A_3=-\tfrac{1}{2}\ ;$$

et partant,
$$A_1=A_2=A_3=\tfrac{2}{3}\varpi.$$

Si l'on a quatre points, les équations seront

$$\begin{array}{l}
\text{Cos.}A_1+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}A_4=-1\ ,\\
\text{Cos.}A_2+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}A_1=-1\ ,\\
\text{Cos.}A_3+\text{Cos.}(A_1+A_2)+\text{Cos.}A_2=-1\ ,\\
\text{Cos.}A_4+\text{Cos.}(A_2+A_3)+\text{Cos.}A_3=-1\ ;
\end{array}$$

équations entre lesquelles éliminant les deux quantités $\text{Cos.}(A_1+A_2)$ et $\text{Cos.}(A_2+A_3)$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}A_1=\text{Cos.}A_3\ ,\\ \text{Cos.}A_2=\text{Cos.}A_4\ ;\end{array}\right\}\quad \text{d'où}\quad \left\{\begin{array}{l}A_1=A_3\ ,\\ A_2=A_4\ ;\end{array}\right.$$

M. Lhuilier, étendant les procédés du calcul différentiel à des points situés d'une manière quelconque dans l'espace, parvient, à leur égard, au même principe général, c'est-à-dire, qu'il prouve que *le point dont la somme des distances à des points donnés dans l'espace est la plus petite, doit être tellement située que la somme des cosinus des angles que formeront, avec une droite quelconque, les droites menées de ce point aux points donnés soit zéro.*

M. Lhuilier confirme ces résultats du calcul différentiel, tant pour des points compris dans un même plan, que pour des points situés d'une manière quelconque dans l'espace, par des considérations fort simples que voici :

Par le point cherché soit fait passer une droite quelconque PP' (fig. 2); que A soit un des points donnés, et que P et P' soient deux points pour lesquels les sommes des distances aux points donnés soient égales; il est clair que, si le point P devient le point cherché, le point P' devra se confondre avec lui.

Cela posé, des points A comme centres, et avec les distances AP pour rayons, soient décrits des arcs Pp, rencontrant en p les droites AP'.

Puisque $\Sigma(AP)=\Sigma(AP')$, il s'ensuit que $\Sigma(P'p)=0$; donc aussi

$$\frac{\Sigma(P'p)}{PP'} \quad \text{ou} \quad \Sigma\left(\frac{P'p}{PP'}\right)=0\ ;$$

mais

$$\text{limite}\,\frac{P'p}{PP'}=\text{Cos.}AP'P\ ;\ \text{donc}\ \Sigma(\text{Cos.}AP'P)=0\ ,$$

ce qui ramène à la proposition déjà énoncée.

M. Lhuilier termine par observer que la méthode différentielle, ainsi que cette dernière, s'appliquent également au cas où ce ne serait pas précisément la somme des distances du point cherché aux points donnés qui devrait être la plus petite, mais la somme des produits de ces distances par des nombres donnés, ou la somme de leurs puissances ayant le même exposant, ou enfin la somme des produits de ces puissances par des nombres donnés.